

PROGRAMME 2020

Collection

Indice

MATHS

T^{le}

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

bordas
éditeur

Les ressources numériques de votre manuel

Ces ressources sont accessibles par smartphone avec l'application **Bordas Flashpage** (→ rabat F), sur le site ressources élève lycee.editions-bordas.fr et dans le **manuel numérique**.

Les corrections détaillées de plus de 190 exercices et sujets de bac



Accédez aux **corrigés rédigés et détaillés** des exercices des pages *Pour travailler en autonomie* et de certains sujets des pages *Cap vers le bac*.

1.3.1 L'équation différentielle $y' + 3y = 0$ s'écrit aussi $y' = -3y$. Elle est de la forme $y' = ay$ avec $a = -3$. On sait alors que les fonctions solutions de cette équation (E) sont de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où a est une constante réelle, donc ici de la forme $x \mapsto Ce^{-3x}$.

a. La fonction $x \mapsto -2e^{-3x}$ est bien solution de (E), car elle est de la forme $x \mapsto Ce^{-3x}$, avec $C = -2$.

b. La fonction $x \mapsto 2e^{-3x}$ est bien solution de (E), car elle est de la forme $x \mapsto Ce^{-3x}$, avec $C = 2$.

c. Puisque $2e^{3(-1)} = 2e^{-3} = 2e^3e^{-6}$, la fonction $h : x \mapsto 2e^{3(-1-x)}$ est de la forme $x \mapsto Ce^{-3x}$, avec $C = 2e^3$. On calcule $h(1) : h(1) = 2e^3 = 2$. Cette fonction est bien la solution f de (E) telle que $f(1) = 2$.

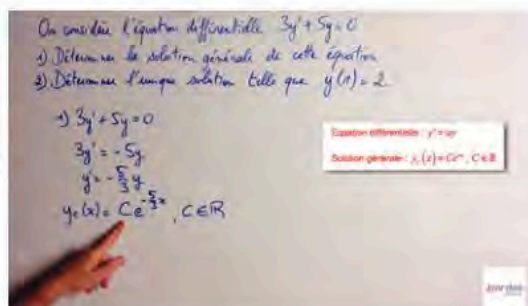
d. La fonction $j : x \mapsto \frac{1}{3}e^{-3x}$ est bien solution de (E), car elle est de la forme $x \mapsto Ce^{-3x}$, avec $C = \frac{1}{3}$. On calcule la dérivée de $j : j'(x) = \frac{1}{3} \times (-3)e^{-3x} = -e^{-3x}$, car la dérivée de e^x est e^x . $j'(0) = -e^0 = -1$. Puisque $j'(0)$ est différent de 3, cette fonction n'est pas la solution g de (E) telle que $g'(0) = 3$.

En conclusion, les réponses a, b et c sont exactes, la réponse d est fautive.

59 vidéos

De nombreuses vidéos se trouvent dans le manuel, elles sont indiquées par les pictos ci-contre :

vidéo 07.02
Résoudre une équation différentielle du 1^{er} ordre sans second membre.



Ces vidéos vous permettront de **revoir à votre rythme** ce qui est appris en classe !

Une banque d'exercices interactifs différenciés

Plus de 1000 exercices interactifs autocorrectifs à réponse personnalisée et de difficulté progressive (QCM, glisser-déposer, relier...) avec un tableau de bord de suivi. Disponible uniquement dans la version off-line payante du manuel numérique.

2 Classe les fonctions suivantes selon leur limite quand x tend vers 1 ou quand x tend vers 0.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ $x > 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ $x < 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ $x > 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ $x < 0$
$f(x) = \frac{3-x}{1-x}$	$f(x) = \frac{-4}{1-x}$	$f(x) = \frac{x-1}{e^x-1}$	$f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$
	$f(x) = \frac{x+3}{x-1}$	$f(x) = \frac{2-x}{1+e^x}$	

Génial ! Tout est correct !

Les clés du BAC

L'épreuve écrite de spécialité de Mathématiques	page II
--	---------

Se préparer au Grand oral	page III
----------------------------------	----------

A Le Grand oral : qu'est-ce que c'est ?	page III
--	----------

B Préparer son projet et organiser ses idées	page IV
---	---------

1. Choisir une question et la débroussailler
2. Organiser son temps et orienter ses recherches

C Structurer son discours	page VII
----------------------------------	----------

1. Construire un plan pertinent
2. Formuler une accroche percutante
3. Soigner son discours
4. Travailler sa conclusion

D Préparer sa prise de parole	page IX
--------------------------------------	---------

1. Quelle est mon expérience de l'oral ?
2. Apprendre à gérer son temps
3. Mémoriser son discours
4. Travailler sur son apparence et sa posture

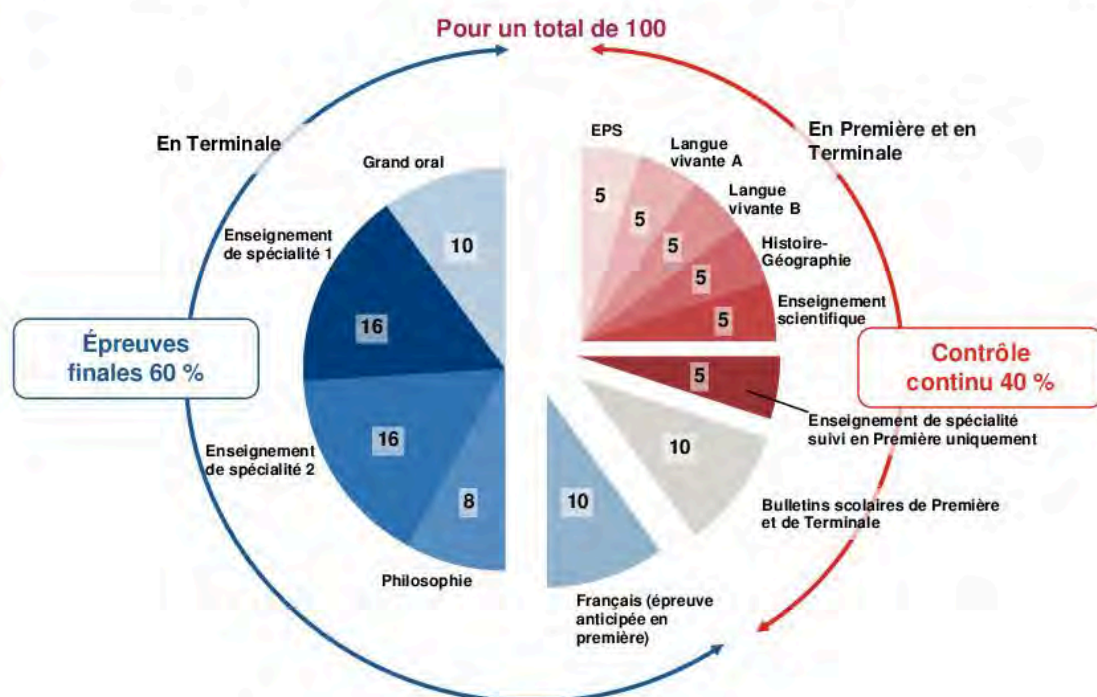
E Se préparer à l'entretien avec le jury	page XIII
---	-----------

1. Préparer un support pour le jury
2. Distinguer les différents types de questions du jury
3. Justifier ses choix d'orientation

F Grille d'évaluation indicative du Grand oral	page XVI
---	----------

L'épreuve écrite de spécialité de Mathématiques

L'épreuve écrite de spécialité de Mathématiques compte pour 16% de la note finale du baccalauréat.



L'organisation générale du baccalauréat : épreuves et coefficient

Cette épreuve est notée sur 20 points.

Elle a lieu **fin mars et dure 4 h.**

Le sujet comporte de trois à cinq exercices indépendants les uns des autres. Il précise si l'usage de la calculatrice est autorisé.

Chaque exercice est noté sur 4 à 8 points.

De nombreux exercices du manuel permettent de se préparer à cette épreuve écrite tout au long de l'année.
→ Rendez-vous page 5 du manuel.

Le jour J

N'oublie pas d'emmener ta convocation, ta calculatrice (avec des piles neuves), à boire, à grignoter et une montre !

À la date de publication de ce manuel, les notions suivantes sont exclues de l'épreuve :

- Fonctions sinus et cosinus (chapitre 8, p. 264 à 289)
- Calcul intégral (chapitre 10, p. 324 à 361)
- Concentration, loi des grands nombres (p. 406 à 407 dans le chapitre 12)

De plus, la section Combinatoire et dénombrement du programme est mobilisable mais ne peut constituer le ressort essentiel d'un exercice.

! L'évaluation portant sur ces notions sera intégrée dans la note figurant sur les bulletins scolaires, prise en compte au baccalauréat. Il est aussi possible d'être interrogé sur ces notions lors du Grand oral ou lors de l'épreuve orale de contrôle (rattrapage).

Se préparer au Grand oral

A Le Grand oral : qu'est-ce que c'est ?

L'épreuve du « Grand oral » est l'une des cinq épreuves terminales du baccalauréat et compte pour **10 % de la note finale**. Elle a lieu à la fin de l'année de Terminale.

Cette épreuve se démarque des autres car on **utilise les savoirs acquis dans ses enseignements de spécialité pour soutenir une prise de parole originale**. C'est l'occasion de montrer qu'on est capable de s'exprimer de façon claire et convaincante sur un sujet qui nous intéresse. Cette épreuve est donc très utile non seulement pour le bac, mais aussi parce qu'elle anticipe les attentes des études supérieures et de sa future vie professionnelle. Tes professeurs t'accompagneront dans la préparation de cet exercice que l'on peut choisir de travailler seul(e) ou avec des camarades.

Cette année, tu as choisi deux enseignements de spécialité : tu as travaillé avec ton professeur à partir de différents axes d'étude et tu as pu pressentir les multiples **enjeux** liés à ces matières. Le Grand oral permet d'approfondir une ou deux thématique(s) de ton choix, liées à ces deux spécialités, et qui ont éveillé ta curiosité lorsque tu as réfléchi à ton orientation : comme s'il te revenait de faire deux enquêtes dont on attend que tu délivres les résultats. Tu « prépares le terrain » de tes études supérieures et tu montres que tu t'es informé(e) sur telle ou telle perspective.

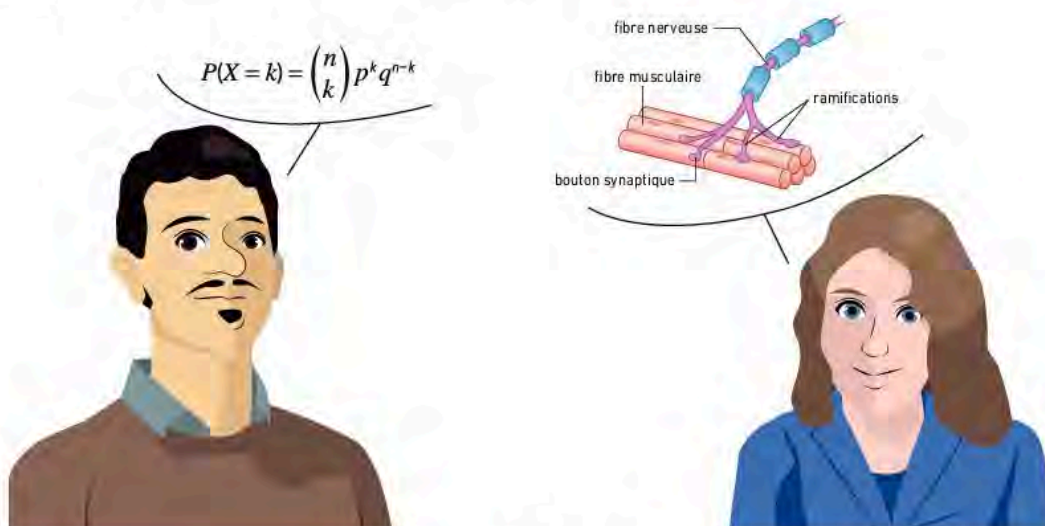
Le jour J, on présente au jury sa (ou ses deux) question(s) : **le jury en choisit une** et on doit s'exprimer durant **20 minutes** pour montrer la façon dont on s'est **personnellement investi pour y répondre**.

Le premier temps de l'épreuve consiste à présenter la réponse à sa question pendant 5 minutes. Quand on t'écoute, on doit comprendre d'où tu es parti(e), comment a progressé ta réflexion et le (ou les) résultat(s) à l'arrivée qui te permet(tent) de répondre à la question de départ. L'objectif est de rendre compte de tes résultats de façon **claire, argumentée et synthétique**. Tu n'auras pas de **notes écrites**, mais tu auras eu le temps pendant l'année de digérer tes découvertes et d'en proposer une version condensée. Attention : on juge **tout autant la solidité de tes connaissances que ta capacité à les transmettre** de façon pertinente et stimulante (voir p. XVI).

Comme toute prise de parole, ton discours est **adressé** : tu auras en face de toi deux professeurs de disciplines différentes que tu dois intéresser, dont un **expert** d'un des deux enseignements de spécialité que tu as choisi. Ton discours va devoir « parler » à tout le monde !

Le jour J

Au moment de la préparation précédant ton passage, tu peux si tu le souhaites réaliser un **support sur papier que tu remettras au jury**. Pour apprendre à le préparer, rends-toi à la page XIV. Ce support peut t'être utile pour remettre à plat les éléments principaux de ton discours, mais il peut également servir au jury pour te relancer en cas de blanc.



Chaque membre du jury est un expert d'une discipline. Il faut adapter ton discours.

Puis, dans un deuxième temps, un échange de 10 minutes a lieu avec le jury.

Rassure-toi : ce temps est d'abord **un échange** avec le jury qui t'invite à **préciser et approfondir** des éléments que tu as abordés. Durant ces 10 minutes, il t'interroge sur ta présentation mais il peut aussi élargir le propos au programme de tes enseignements de spécialité : il est donc tout à fait possible que l'on te pose une question sur d'autres notions moins liées à ton sujet de départ. On évalue aussi ta capacité d'adaptation : sois très attentif(ve) aux questions qu'on te pose et ne considère pas que ce sont des questions pièges pour te déstabiliser.

Cet échange ne peut t'apporter que des avantages !

Avec une présentation réussie, on peut se permettre d'aller encore plus loin et de revenir sur des éléments plus en profondeur. Si on a le sentiment d'avoir échoué, **cela peut être l'occasion de se rattraper** en montrant qu'on a bel et bien travaillé la question pour cette épreuve, et qu'on maîtrise bien les connaissances acquises dans ses deux spécialités.

Enfin, un dernier temps de 5 minutes permet d'échanger sur son projet d'orientation. La question présentée est **liée aux études que tu aimerais poursuivre** : elle est le reflet de ta curiosité et de ta motivation sur le long terme. Il est évident que se projeter et imaginer le chemin qu'on va emprunter dans la voie professionnelle est complexe : c'est pour cela qu'on doit s'être préparé en amont à cette étape pour en parler avec assurance.

Astuce

Imagine que tu poses une question que personne ne s'est jamais posée, et tu es le (la) seul(e) à en détenir la réponse. C'est comme si tu lançais un débat dans l'intention de donner envie à ton public d'interagir avec toi. Mieux vaut pour cela **maîtriser ton sujet**, et le prouver en utilisant un vocabulaire adapté qui montre que tu sais de quoi tu parles !

B Préparer son projet et organiser ses idées

« Pour commencer, il faut commencer... et on n'apprend pas à commencer, pour commencer, il faut simplement du courage. »

Vladimir Jankélévitch, philosophe (1903 – 1985)

Le discours doit être une synthèse dynamique de sa recherche mise en œuvre tout au long de l'année. **Plus on s'y sera préparé à l'avance, plus on est sûr de maîtriser son sujet et d'en parler sans ennuyer son auditoire.**

1. Choisir une question et la débroussailler

Tout d'abord, on doit trouver une question sur chacun de ses enseignements de spécialité ou une question en lien avec ses deux enseignements de spécialité. Le programme de l'enseignement de spécialité permet d'approfondir des questions en classe, et c'est dans ce réservoir qu'on va puiser pour orienter son choix. Il est important de te demander si cette question se rapproche de tes envies d'orientation professionnelle : tu n'as pas besoin de connaître forcément le métier que tu veux faire mais il te faudra savoir vers quels études et domaines d'activités tu souhaites t'orienter. En effet, on évaluera le lien du discours avec ton orientation. Après avoir défini les enjeux de l'étude, on doit rendre compte de la façon dont elle a été réalisée et justifier ses choix mis en œuvre : prends donc bien le temps de réfléchir lors de cette étape préparatoire.

Astuce

Cette liberté de choix est une chance, mais aussi un défi : parfois, plus les idées foisonnent, moins on réussit à s'arrêter à l'une d'entre elles. Une fois ta décision prise, il faut éviter de changer d'avis en cours de route ! Le plus important est cette notion d'« envie » : sans ce moteur, on n'aura pas le sentiment que tu réponds à une question que tu as choisie parce que tu t'es senti concerné(e) par elle. Fais-toi confiance !

Cible un sujet qui t'a interpellé(e) lors de ton année d'enseignement. Y a-t-il un événement récent qui aurait suscité ta curiosité ? As-tu vécu une expérience particulière ou as-tu réfléchi à quelque chose, mais sans avoir le temps de le mûrir suffisamment ? As-tu été interpellé(e) par une information, une émission, un article, un cours que tu souhaiterais approfondir ?

Astuce

Feuillette ton manuel pour avoir une idée de tout ce que tu vas apprendre cette année et repérer les sujets qui t'intéressent. Tu trouveras notamment dans chaque chapitre une page « Des pistes pour le Grand oral » avec un exemple de question à traiter. Cela pourra être une source d'inspiration.

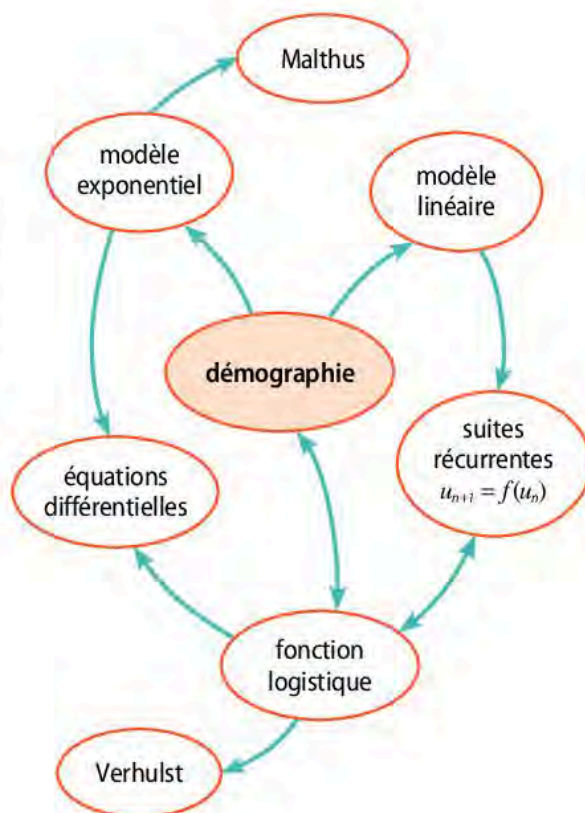
EXERCICE 1

Débroussailler un thème

Commence par nommer une **thématique** qui t'intéresse, liée au programme que tu étudies en classe et à ton orientation. Inscris-la dans une bulle au centre d'une grand page blanche horizontale. À partir de ce noyau, inscris un sous-thème que tu trouves associé à ce thème et décline-le en essayant d'étendre au maximum un premier réseau. Pense aux questions *Qui ? Quoi ? Pourquoi ? Où ? Quand ? Comment ?* Une fois que tu crois avoir épuisé ton réservoir d'idées pour ce sous-thème, trouve un second sous-thème et recommence l'opération.

Astuce

Reprends cette carte plusieurs fois, à différents moments de la journée. Tu trouveras des choses bien différentes !



EXERCICE 2

Choisir un sujet

- 1 Les idées foisonnent, et tu vas devoir en choisir une et évacuer les autres. Comment faire ? Choisis en une, celle qui t'intrigue le plus, dont tu penses qu'elle est la plus stimulante. Réfléchis : qu'est-ce qui t'intéresse le plus dans ce domaine ? Qu'est-ce qui te questionne ? Pourquoi ?
- 2 Prends quelques minutes pour partager les raisons de ton choix à quelqu'un de ton entourage. Pour cela, imagine que tu dois le convaincre d'être ton associé(e) pour réaliser une expérience, et que sa présence est essentielle à sa mise en œuvre. Après avoir pris la parole, demande à ton (ta) partenaire de reformuler ton propos, et de te poser des questions sur le sujet.
 - Rien ne vaut l'avis des autres ! Prends soin de noter ce que ton (ta) partenaire a retenu de l'exposé de ton idée : quels éléments n'a-t-il (n'a-t-elle) pas rappelés ? As-tu suffisamment insisté là-dessus quand tu en as parlé ?
 - Il ne s'agit pas d'énoncer ton projet, de parler de ce que tu vas chercher à démontrer (tu ne le sais pas encore !). Il s'agit plutôt de sentir si tu es spontanément et suffisamment intéressé(e) par un thème pour susciter la curiosité de quelqu'un d'autre et lancer une discussion.

2. Organiser son temps et orienter ses recherches

Choisir l'angle de son projet de recherche : la question.

En faisant l'inventaire des sources d'information disponibles, on peut se rendre compte que certaines questions posées par la communauté scientifique ou le grand public sont souvent loin d'être évidentes ou que des opinions peuvent diverger pour y répondre. D'autres questions sont parfois complexes ou demandent à être mises en perspective. L'objectif est de **faire sa propre enquête** : à partir d'hypothèses, on doit faire une recherche pour tenter d'apporter ses réponses.

Autrement dit, la présentation n'est ni une définition ni un catalogue : on ne doit pas avoir l'impression d'entendre une liste d'informations, mais quelqu'un qui donne **une réponse argumentée à une question**. On doit trouver un cheminement logique dans ce qui est dit : un point de départ et un point d'arrivée. Le propos est donc **personnel, construit et appuyé sur des exemples précis** qui témoignent de la solidité du raisonnement. En un mot, l'objectif est d'être **clair(e) et convaincant(e) !**

Éviter de s'éparpiller et être stratégique. Pour cela, on liste toutes les étapes de son travail, et on détermine dès le départ **le temps qu'on va consacrer** à chacune d'elles. On doit essayer d'être le plus précis possible, en comptant toujours plusieurs temps vides : en effet, on oublie toujours des choses. Ces échéances sont très importantes pour **ne pas se retrouver enfoui sous les échéances à la dernière minute !**

Exemple de planning possible :

- ✓ 1^{er} trimestre Choisir ma question
- ✓ 10/01 Quels articles sur mon sujet ?
- ✓ 20/02 Enquête
- ✓ 05/03 Quels docs sont les plus importants ?
- ✓ 05/04 Rédaction de la présentation (2 semaines)
- ✓ 20/04 Mes fiches de révision
- ✓ 03/05 Définitions clés et vocabulaire : apprendre par ♥ !
- ✓ 15/05 Introduction et conclusion...
- ✓ 2^e quinzaine de mai Répétition de la situation d'oral...

Rassembler la matière et les supports associés à son sujet :

il peut s'agir de faits (événements historiques, événements de société), d'articles de journaux, de résultats d'expériences (actuelles ou anciennes), de connaissances (données scientifiques, théories, modèles, données culturelles) ou de différents points de vue sur la question. On veille à **diversifier ses sources** : manuel, livres, revues, vidéos, sites Internet, cours, exercices et TP réalisés avec son professeur au lycée... Il ne s'agit pas de les démultiplier, mais de **sélectionner les plus pertinentes** en gardant toutefois en tête les autres. Même si on ne garde pas tout pour la version finale, **ces informations pourront éventuellement être utiles lorsqu'il s'agira de répondre aux questions au cours de l'entretien.**

On doit avoir des connaissances solides sur son sujet, et maîtriser les notions scientifiques qui lui sont liées : assure-toi d'être **bien avisé(e) des éléments du programme** (Terminale, mais aussi Première) et de **connaître le vocabulaire scientifique** mobilisé pour la présentation. Pour s'exprimer clairement, on doit être à l'aise avec ce « langage », et donc **en avoir appris les définitions.**

Astuce

Au cours du travail, ton sujet et ta problématique évoluent. C'est tout à fait normal ! Il peut arriver que ta question prenne du temps pour se stabiliser. Néanmoins, il est essentiel de réussir à en formuler une première version dès le départ puisqu'elle est le fil rouge qui orientera toute la logique de ton argumentation.

Astuce

Garde bien la source de tous ces documents et classe-les dans un dossier bien rangé pour vite les retrouver.

Astuce

Si des éléments te paraissent un peu flous, ne les évite pas : aborde-les avant ta présentation, pour ne pas prendre le risque d'être mis en difficulté lors de l'échange avec le jury.

Astuce

Tu veux en savoir plus sur tel métier / telle entreprise ? Tu voudrais interviewer un professionnel ? Réaliser un sondage en ligne ? Visiter un lieu ? Profite de cette occasion du Grand oral pour enquêter sur ton terrain : ton discours sera d'autant plus convaincant !

EXERCICE 3 Repérer et sélectionner les idées essentielles d'une information

Podcast Science est une émission hebdomadaire qui couvre chaque semaine un sujet scientifique. Tu peux la trouver ici : <https://www.podcastscience.fm/>. Son objectif ? Faire aimer la science au plus grand nombre par le biais d'une communication accessible et dynamique.

- 1 Avec un(e) camarade, réserve une heure pour écouter un de ces podcasts en ligne. Chacun(e) de vous prend en note le maximum d'éléments-clés : des références (date, auteur, thématique principale de l'émission), les grands axes du sujet, les questions soulevées, les axes du débat, quelques données chiffrées et des exemples.
- 2 Compare ta prise de notes avec celle de ton (ta) camarade : avez-vous relevé les mêmes informations ? Mettez-vous d'accord sur le plus utile afin d'aboutir à un relevé commun.

Le jour J

Pour t'aider, sois attentif(ve) à la répétition de certains propos, à leur **intonation**, et à l'emploi des **mots d'articulation** qui indiquent les différents moments de synthèse. Ce sont comme des indices d'écoute que tu devras t'efforcer de mettre en valeur lorsque tu prendras la parole à ton tour !

C Structurer son discours**1. Construire un plan pertinent**

Il existe différents plans pour organiser un discours.

Pour aller au-delà des plans classiques thématiques, on peut suivre cette méthode :

A – Accroche

B – Annonce de la question et explication : on définit son sujet et on explique pourquoi on a choisi de préparer cette question.

C – Développement progressif de la question : on informe, discute le sujet au moyen de données et de connaissances scientifiques précises, détaillées et variées. On démontre la cohérence de son idée en justifiant ses arguments par des exemples :

- données chiffrées, schémas, illustrations concrètes ;
- applications, expériences menées ;
- témoignages.

D – Conclusion : réponse à la question.

Le jour J

Pour éviter toute monotonie dans ton discours, il peut être utile d'avoir en tête différents types d'arguments :

- argument par la cause : on s'appuie sur la cause d'un phénomène ;
- argument par la conséquence : on s'appuie sur les effets d'un phénomène et on montre ses avantages et ses inconvénients ;
- argument par la comparaison : on établit un parallèle entre deux situations ;
- argument d'autorité : on peut citer les propos d'un expert, d'un scientifique reconnu ;
- argument de valeur : on fait appel aux grands principes fondant la société (écologie, éthique...).

2. Formuler une accroche percutante

L'accroche est la première phrase qu'on prononce dans son introduction : elle doit être **très courte** (15 secondes maximum), percutante et pertinente par rapport à son sujet. Son rôle est d'**interpeller l'auditoire** et d'attirer son attention : il faut donc éviter le plus possible les lieux communs ou les banalités. On peut :

- faire un état des lieux de la question : on situe le sujet dans le contexte actuel ;
- relater un fait surprenant, marquant, une anecdote ;
- poser une question : cette question n'attend pas de réponse, mais a pour objectif d'interpeller le jury ; comme s'il était directement concerné. Exemple : « Avez-vous déjà pensé à... ? », « Vous êtes-vous déjà retrouvé(e) dans une situation où... ? »... ;
- faire une remarque personnelle qui montre sa motivation et les raisons du choix de son sujet.

Le jour J

Essaye toujours de connaître une anecdote, la dernière étude sur ton sujet ou la façon dont la presse et les médias en ont parlé, etc. Rien de mieux qu'un savoir actualisé pour montrer que tu es au courant de l'évolution de la recherche scientifique.

3. Soigner son discours

Un propos doit être fluide pour être agréable à entendre. Fais des phrases simples et courtes, avec une seule idée par phrase. Associe à **chaque argument** une **articulation logique du discours**, ces petits mots sont essentiels pour signifier à son jury :

- **qu'on commence, qu'on développe une nouvelle idée** : *commençons par, d'abord, avant tout, en premier lieu, d'une part, certes, s'il est vrai que, sait-on que...*
- **qu'on marque un lien** entre ce qui précède et ce qui suit : *puis, aussi, ensuite, d'autre part, de plus, ainsi, par conséquent, c'est pourquoi, cependant, toutefois, pourtant, au contraire, d'ailleurs...*
- **qu'on rappelle** ce qui a été dit, en fait le bilan : *ainsi, de même, de là, d'où, pour cela...*
- **qu'on conclut** : *donc, enfin, en résumé, en définitive, pour conclure...*

Le jour J

Sois conscient(e) de tes **tics de langage**. Interdis-toi les « du coup », « en fait », tout comme « euh », « voilà » ou « genre ». S'il t'arrive de faire une faute de français, excuse-toi et corrige-toi : ne fais pas comme si personne ne l'avait entendue.

EXERCICE 4 Varier son vocabulaire

Sans notes, répète ta présentation avec un(e) camarade. Son rôle est de relever toutes les fois où tu as recouru aux verbes passe-partout « être », « avoir », « faire », « voir », « dire » ou « mettre ».

Une fois la présentation terminée, cherche un autre terme pour remplacer chacun d'entre eux.

4. Travailler sa conclusion

La conclusion doit être soignée : ce temps laisse une impression définitive de son enthousiasme sur l'auditoire. On fait un **bilan très bref** de ce qu'on vient d'exposer et on peut faire une **ouverture** : en montrant que les enjeux de son sujet sont aussi liés à tel autre sujet, en mentionnant une appropriation de sa thématique dans un autre domaine (cinéma, enjeu de société...).

Le jury doit sentir qu'on s'apprête à terminer son discours : on peut marquer un temps de pause, ralentir le débit de sa voix et faire entendre dans le ton la clôture de son intervention.

Le jour J

Tu n'as aucune idée d'ouverture pour ta conclusion ? Eh bien ce n'est pas grave ! Contente-toi de faire une synthèse de ton intervention : il vaut mieux éviter une conclusion « remplissage » qui pourrait tout gâcher !

D Préparer sa prise de parole

1. Quelle est mon expérience de l'oral ?

Tu as déjà eu une expérience de prise de parole en public au lycée.

1. L'épreuve orale de français avec la lecture à haute voix d'un texte : tu as lu l'extrait de façon expressive si tu t'en es emparé(e) et si tu l'as doté d'une intention.

2. L'expérimentation en équipe : lorsque tu as dû exprimer ton point de vue, te positionner et prendre en charge une partie d'un travail et donc négocier avec tes camarades et argumenter.

3. L'exposé ou la restitution d'un travail en classe : tu as déjà fait des exposés devant la classe et résolu des exercices au tableau.

Astuce

Les meilleures notes à l'épreuve orale de français sont obtenues par les élèves qui ont non seulement prouvé qu'ils connaissent bien leur sujet, mais surtout qui ont défendu leur présentation de façon convaincante.



« La parole n'a pas été donnée à l'homme : il l'a prise. »

Louis Aragon, écrivain (1897-1982)

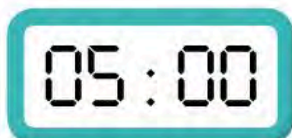
Si tout le monde a la parole, très peu de personnes la prennent. Dans la parole, la différence ne se fait pas entre celui qui se tait et celui qui parle, mais entre celui qui ne fait que parler, et celui qui s'exprime comme il faut. On pense souvent que bien parler est d'emblée une qualité qu'on a la chance d'avoir toujours eue... On entend dire que c'est « tout un art » : « si l'on n'est pas naturellement doué pour cela, on ne sera jamais capable de se sentir à l'aise ». Bref, l'oral fait peur.

Il n'y a pourtant pas de quoi, car, comme dans les autres matières, l'oral s'apprend avec des techniques fondamentales à maîtriser. Quelle que soit la façon dont on se situe, on a tous forcément quelque chose à améliorer avec la parole... La question c'est : quoi ?



→ Voir **EXERCICE 7**

2. Apprendre à gérer son temps



On peut prévoir à l'avance le temps de pause de sa voix en le marquant d'un coup de crayon sur son brouillon. Le stress de l'intervention en temps réel fait très souvent légèrement accélérer le débit initial de la voix. Pour éviter le risque de parler trop longtemps, on distingue à l'avance les principaux moments : le début (1 min 30 s), les arguments (3 min) et la conclusion (30 s). On peut s'entraîner avec un(e) camarade à dire chacun des morceaux de son intervention l'un après l'autre sans dépasser le temps qu'on a déterminé.

3. Mémoriser son discours

On l'a bien compris : l'objectif n'est pas de réciter son discours, mais de se sentir libéré(e) du texte pour être pleinement dans sa présentation au jury. N'oublie pas que tu n'auras pas de notes avec toi.

Commence par te concentrer sur le début et la fin : il est essentiel de garder comme horizon mental la conclusion de sa démonstration pour faire sentir qu'on sait où l'on va.

Astuce

Enregistre-toi sur ton téléphone et écoute-toi régulièrement lors de tes déplacements.

Astuce

Tu peux recopier le contenu entier de ton exposé sur des feuilles en plusieurs exemplaires. Fixe-les sur des murs stratégiques de chez toi : ce sont les murs des lieux où tu passes beaucoup de temps (la salle de bains, ta chambre, les toilettes...).

N'hésite pas à réaliser une fiche aide-mémoire de poche où tu auras inscrit tes arguments et exemples sous forme de mots-clés, ainsi que les articulations de liaison qui font passer d'une idée à l'autre.

EXERCICE 5 Mémoriser les notions scientifiques et les mots-clés

Pendant ta préparation, tu as recensé dans le cours et dans le manuel toutes les notions scientifiques, les mots-clés et les schémas en lien avec ta question. Trouve un(e) camarade qui a choisi le même chapitre que toi pour sa présentation.

- 1 Chacun de vous liste sur une page les éléments qu'il (elle) prévoit de mobiliser dans sa présentation.
- 2 Échangez vos feuilles et interrogez-vous sur les notions comme si vous étiez un membre du jury. Par exemple : « Quelle est la définition de ... ? » « Pouvez-vous m'expliquer le mécanisme de ... ? »

EXERCICE 6 Mémoriser par le corps

« On apprend par corps et non par cœur. »

Pierre Bourdieu, sociologue (1930 – 2002)

Quand tu te sens prêt(e), répète ton discours en déclamant chacune de ses parties dans une pièce différente de chez toi :

- la porte d'entrée : l'accroche ;
- le couloir : l'introduction ;
- la première pièce : le premier axe... etc.

À chaque fois que tu oublies un élément ou que tu butes sur une information, fais demi-tour et reprends la parole à la pièce précédente.

4. Travailler sur son apparence et sa posture

**Astuce**

Tu peux utiliser une salle de classe vide pour te mettre en situation. Demande à un(e) camarade de se placer au fond de la salle puis, tout en t'écoutant faire un discours, de bouger de temps en temps : tu dois réussir à faire ton discours sans être perturbé(e).

Travailler sa posture pour être regardé(e) : avant même de formuler des phrases, une intervention commence dès qu'on se présente devant le public. Des études ont montré que plus de 60 % de l'efficacité d'une prise de parole repose sur le langage corporel. Il faut donc travailler sa posture.

• **Se tenir bien.** Avant de commencer à parler, on s'**anc**re bien dans le sol, les pieds écartés de manière à se sentir stable. Imaginer qu'on tire un fil de marionnette au-dessus de son crâne et qu'il tend tout son corps est un bon exercice. Si on est bien d'aplomb, le « trac » se voit moins.

- **Contrôler les gestes** qui peuvent parasiter son auditoire : on évite de se balancer, de passer d'une jambe sur l'autre, de fermer les poings, de se tripoter les mains ou de les mettre dans ses poches. On fait en sorte que ses mains soient toujours visibles : elles permettent de mettre en valeur ses paroles.

- **Regarder son public bien en face.** Ne pas le fuir. Le regard est déterminant car il permet de capter l'attention de ceux qui nous écoutent. Il nous permet aussi de nous adapter : si on sent que le public n'est pas attentif, on peut prendre un ton plus animé. On peut penser aussi à balayer du regard tous les membres de l'auditoire.

- **Être souriant(e)**, montrer son envie, sa détermination !

Travailler son expression pour être écouté(e) : on n'écrit pas comme l'on parle. Le style oral a ses règles : **les phrases courtes et les moments où on hausse le ton, on ralentit ou on marque des pauses sont essentiels.**

- **Faire un court temps de silence** avant de prendre la parole. Cela te permettra de te concentrer, et de vérifier que ton auditoire est attentif. **Ne parle pas trop vite :** le plus souvent, sous l'effet du stress, on a tendance à accélérer le rythme de sa parole.

- **Faire des pauses entre ses phrases** quand on parle. Les silences te permettent de reprendre ton souffle, contrôler ta parole, mais aussi de capter l'attention ou de susciter une attente.

- **Articuler.** Si tu manges tes mots, tu donneras l'impression que tu veux te débarrasser de ton discours, et l'auditoire n'aura pas le temps de comprendre ce que tu dis.

Astuce

Si tu as tendance à ne pas parler assez fort, c'est peut-être parce que tu n'es pas sûr(e) de toi ou parce que tu as le trac : un simple exercice de respiration abdominale peut te permettre de gérer ton stress et de projeter ta voix comme il faut dans l'espace.

- **Varié le ton pour ne pas ennuyer :** il peut être tantôt fort, tantôt doux, tantôt grave, tantôt drôle. Il suffit de varier le volume de ta voix ainsi que son débit pour réveiller ton public.

Le jour J

Adopte une tenue qui te ressemble mais que tu auras réservée pour le Grand oral : cela peut t'aider à te mettre en conditions, comme l'acteur qui enfiler son costume !

EXERCICE 7 Se filmer avec la caméra du smartphone

Fais un petit discours à un(e) camarade : tu peux, par exemple, raconter une expérience que tu as vécue ou défendre un point de vue sur un sujet d'actualité. Demande-lui de te filmer avec ton smartphone : une première fois assis(e), face à lui (elle), autour de la même table et une deuxième fois debout, à quelques mètres de distance.

- 1 Commence par demander à ton ami(e) de relever les **éléments positifs** de ta prise de parole. Visualise la vidéo pour en tirer des conseils pour t'améliorer.

- 2 Note les moments où tu sens que l'information est la plus audible. Pour quelles raisons, selon toi ?

- 3 À l'inverse, essaye de comprendre les éléments de ton langage responsables de l'imprécision ou de la confusion des idées que tu exprimes :

- Est-ce dit trop rapidement ?
- T'entend-on suffisamment ?
- As-tu une voix trop monocorde ?

Sois bienveillant(e) ! Cet exercice est difficile, mais tu dois garder en tête que l'image amplifie toujours les défauts : ce n'est pas une image fidèle de la réalité, et dis-toi que c'est plus une loupe qu'un miroir de ton apparence. Pour t'aider, imagine que tu analyses quelqu'un d'autre.

EXERCICE 8 Varier les tons de sa voix

Quand tu parles, le ton de ta voix est peut-être souvent le même, et tu ne t'en rends pas forcément compte. Sur des petits papiers, inscris les différents tons de la voix : *abrupt, tendu, doux, enthousiaste, surpris, grave, impatient, magistral, timide, uniforme*. Pioche un papier au hasard et lis les phrases suivantes :

- Est-ce dit trop rapidement ?
- Tu es au courant ?
- Ces chiffres sont catastrophiques !
- Il faut changer les choses.
- J'ai réussi !
- Je suis très content(e) d'apprendre cela
- C'est horrible...
- Mais qu'attends-tu pour le faire ?
- Hier soir, ils ont annoncé une bonne météo.
- Si j'étais toi, je tenterais ma chance.

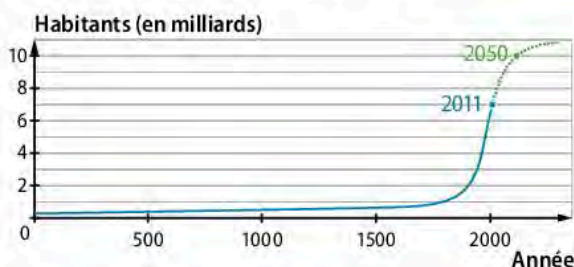
Si vous êtes deux : placez-vous l'un(e) en face de l'autre et faites l'exercice en vous répondant.

N'hésite pas à ajouter des gestes pour accompagner ta parole ! Une fois l'exercice réalisé, choisis la tonalité la plus adaptée à chaque phrase et relis-les.

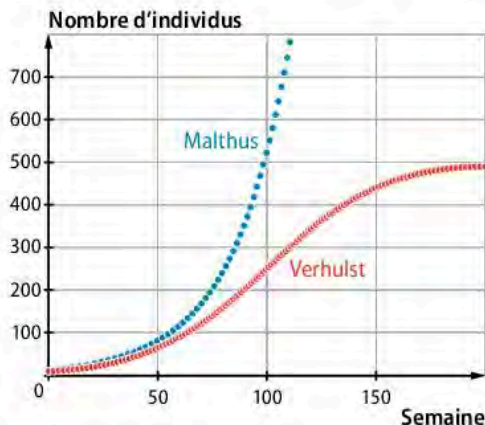
E Se préparer à l'entretien avec le jury

1. Préparer un support pour le jury

Durant les 20 minutes de préparation, on doit **mettre en ordre ses idées** sur la question choisie par le jury. L'exposé se fait **sans notes**, mais on a la possibilité de remettre au jury un support. Celui-ci est utile pour plusieurs raisons : il peut **illustrer ce qu'on décrit, concrétiser une idée** ou la démontrer. Cela peut aussi être une occasion de proposer **une interprétation graphique** qu'on peut citer comme un raccourci efficace pour faciliter la compréhension de la démonstration. Tout dépend donc de l'objectif qui est visé. Quoi qu'il en soit, cette fiche doit être très lisible et la plus simple possible à comprendre.



Croissance de la population mondiale :
– modèle linéaire jusqu'en 1850
– modèle exponentiel de 1850 à 2020



Schémas possibles

Modèle de Malthus : $u_{n+1} - u_n = tu_n$

Modèle de Verhulst : $v_{n+1} - v_n = tv_n \left(1 - \frac{v_n}{M}\right)$

Astuce

Réalise à plusieurs reprises ton support avant le Grand oral pour l'avoir bien en tête le jour J et ne pas perdre trop de temps à le réaliser.

Le jour J

Tu peux faire figurer ton plan sur ton support avec les principaux enjeux de ta prise de parole : les réécrire peut te permettre de te les remémorer visuellement une dernière fois, mais c'est aussi un aperçu que tu donnes au jury qui pourra s'y référer lors de l'entretien. Prends soin de le rédiger lisiblement.

Le jour J

Tu peux ajouter quelques sources d'information précises que tu as peur d'oublier comme une source, un résultat d'expérience, des formules, des chiffres clés : si jamais tu oublies de les dire, il restera une trace de ton travail à partir de laquelle on pourra t'interroger.

2. Distinguer les différents types de questions du jury

À la suite de sa présentation, on doit réagir aux questions des examinateurs pendant 10 minutes. Si tu le souhaites, tu peux t'asseoir : cela t'aidera à laisser redescendre la pression. Rassure-toi : tu ne vas pas subir un interrogatoire ! Le jury n'est pas là pour te mettre en difficulté mais pour t'encourager à approfondir. Il n'y a pas de questions pièges. Dans cet échange, on montre surtout la **solidité de ses connaissances** et sa capacité à prendre de la distance, à **argumenter** et à **élargir son exposé** à d'autres parties du programme.

Prends le temps d'évaluer les réactions du jury et de cerner la nature de la question : mieux vaut quelques secondes de silence plutôt qu'une réponse toute faite ou précipitée.

L'examineur peut poser plusieurs types de questions qu'on doit bien écouter pour orienter ses réponses. Il pourra ainsi demander de :

- **Préciser, clarifier** : il peut arriver qu'on soit passé trop vite sur une information et qu'on se soit exprimé de façon confuse. En te demandant de préciser ou de clarifier, le jury veut vérifier que tu maîtrises bien ton information.

- **Développer** : le jury veut obtenir une information manquante ou vérifier si on a suffisamment de connaissances sur un sujet abordé pendant la question. Il peut te suggérer de développer une idée pour t'orienter dans ta démarche ou pour voir les liens que tu tisses avec d'autres entrées du programme. **N'oublie pas que tu peux être interrogé(e) sur des notions de ton enseignement de spécialité que tu as apprises lors du 3^e trimestre !**

- **Justifier** : on peut être questionné sur son choix personnel de sujet, sur la façon dont on a préparé son exposé ou sur l'origine de son contenu.

3. Justifier ses choix d'orientation

L'épreuve se termine avec un échange de 5 minutes sur son projet d'orientation.

Tu dois expliquer en quoi la question traitée éclaire ton projet de poursuite d'études, voire ton projet professionnel : au cours de la préparation de ta question, as-tu pris conscience des attentes de tes études l'année prochaine ? En quoi ton projet a-t-il été **l'occasion pour toi de te préparer aux enjeux de la profession** que tu envisages pour ton avenir ?

Le jury est conscient de la difficulté à se positionner dès maintenant avec assurance sur l'avenir. Il n'attend pas que tu lui prouves que tu es sûr(e) à 100 % de tes orientations ! Tu dois rendre compte de la **curiosité** et du **sérieux** avec lesquels tu t'es posé des questions concrètes sur tes projets possibles. Autrement dit : tu as **5 minutes pour exprimer tes motivations**.

Commence par exposer les différentes étapes de la maturation de ton projet : pour te renseigner sur ton orientation, tu as pu faire des rencontres inspirantes, enquêter auprès de ton entourage, t'engager dans des actions ponctuelles, dans des activités extra-scolaires... Tu as peut-être eu la chance de partir à l'étranger ou de faire un stage en lien avec ton projet d'études. Tu peux aussi avoir développé ton intérêt pour un métier par le biais d'un enseignement, et l'avoir approfondi dans le choix de ta spécialité.

Explique la manière dont tu souhaites mener ton projet après le baccalauréat : as-tu choisi de faire une licence ? Un BTS ou un DUT ? Une classe préparatoire ? Une école ? Sais-tu d'ores et déjà le nombre d'années d'études qui t'attend pour obtenir ton diplôme ? **Explique les moyens que tu veux mettre en œuvre pour faire aboutir ton projet.**

Astuce

Ton envie de démarrer telles ou telles études est née par hasard ? Aucun problème ! Tu peux très bien commencer par l'annoncer ainsi, du moment que par la suite tu montres de façon convaincante que tu t'es personnellement renseigné(e) sur ce sujet (en allant par exemple sur le site de l'ONISEP www.onisep.fr qui est très complet).

Astuce

Ne sois pas dupe de toi-même : il est inutile d'inventer des histoires pour te mettre en valeur. Le jury n'est pas là pour te juger, mais pour t'entendre en toute honnêteté rendre compte d'un projet. Celui-ci ne doit pas être exceptionnel ! Il doit seulement te correspondre.

EXERCICE 9 Se renseigner sur son projet d'orientation sur place

Rien ne vaut l'expérience d'être plongé(e) à l'avance dans l'environnement dans lequel on fera ses études supérieures. On peut ainsi **se projeter très concrètement** sur l'année prochaine et cela se sentira très nettement au Grand oral.

Surveille les **Journées Portes Ouvertes** des écoles ou des Universités que tu vises et rends-toi sur place avec un camarade. Ces journées ont lieu une fois par an, et elles sont des vitrines de tous les enseignements dispensés par une structure, présentés de façon dynamique par des personnes qui te guident. Si toutefois tu manques la date, cela ne t'empêche pas d'essayer de te rendre à un autre moment dans le lieu.

Avant de partir, gagne du temps en faisant la liste de tous les sujets que tu voudrais idéalement aborder. Formule par avance des questions très précises pour obtenir en retour des réponses ou des informations les plus personnalisées possibles.

Sur place, tu peux récolter des informations de plusieurs façons :

- **en trouvant le bureau du Service d'Information et d'Orientation (SIO)** : ce service peut te renseigner et peut-être même te mettre en relation avec des étudiants ;
- **en te rapprochant des associations étudiantes** : certaines peuvent faire écho à ton projet (aide humanitaire, développement durable, santé...) et c'est une bonne façon de rencontrer des étudiants qui t'accueilleront avec plaisir ;
- **en te rendant à la cafétéria** : il n'y a rien de tel pour prendre la température du lieu.

Tu auras aussi plus de chances de trouver des étudiants disposés à discuter !

EXERCICE 10 Argumenter oralement autour de projets d'orientation

Il existe une grande diversité de formations post-baccalauréat. Aucune n'est meilleure qu'une autre, mais chacune a ses spécificités qui correspondent à différents profils d'études ou motivations et préparent plus ou moins précisément à des métiers.

- 1** Associe chacune des diverses formations ci-dessous aux caractéristiques qui lui correspondent le mieux.
- 2** Argumente oralement en échangeant à ce sujet avec un camarade.

Médecine (L.AS)

Médecine (PAAS)

Institut de Formation en Soins Infirmiers

DUT informatique

CPGE BCPST

CPGE MPSI ou PCSI

Licence Mathématiques

Licence STAPS

Licence Sciences de la vie et de la Terre

Licence Physique-Chimie

Une filière non sélective à l'entrée
et de bonnes chances d'obtenir un diplôme

De nombreux débouchés

Des études courtes

La perspective d'un métier qui me passionne

Un encadrement très présent

Beaucoup d'autonomie

Une charge de travail adaptable à mon projet

La perspective d'un métier à haut revenu

La perspective de pouvoir exercer un métier
à court terme

F Grille d'évaluation indicative du Grand oral

Voici les critères sur lesquels tu seras évalué(e).

	Très insuffisant	Insuffisant	Satisfaisant	Très satisfaisant
Qualité orale de l'épreuve	- Difficilement audible sur l'ensemble de la prestation. - Le candidat ne parvient pas à capter l'attention.	- La voix devient plus audible et intelligible au fil de l'épreuve mais demeure monotone. - Vocabulaire limité ou approximatif.	- Quelques variations dans l'utilisation de la voix ; prise de parole affirmée. Il utilise un lexique adapté. - Le candidat parvient à susciter l'intérêt.	- La voix soutient efficacement le discours. - Qualités prosodiques marquées (débit, fluidité, variations et nuances pertinentes, etc.). - Le candidat est pleinement engagé dans sa parole. Il utilise un vocabulaire riche et précis.
Qualité de la prise de parole en continu	Énoncés courts, ponctués de pauses et de faux démarrages ou énoncés longs à la syntaxe mal maîtrisée.	Discours assez clair mais vocabulaire limité et énoncés schématiques.	Discours articulé et pertinent, énoncés bien construits.	Discours fluide, efficace, tirant pleinement profit du temps et développant ses propositions.
Qualité des connaissances	Connaissances imprécises, incapacité à répondre aux questions, même avec une aide et des relances.	Connaissances réelles, mais difficulté à les mobiliser en situation à l'occasion des questions du jury.	Connaissances précises, une capacité à les mobiliser en réponses aux questions du jury avec éventuellement quelques relances.	Connaissances maîtrisées, les réponses aux questions du jury témoignent d'une capacité à mobiliser ces connaissances à bon escient et à les exposer clairement.
Qualité de l'interaction	- Réponses courtes ou rares. - La communication repose principalement sur l'évaluateur.	- L'entretien permet une amorce d'échange. - L'interaction reste limitée.	Répond, contribue, réagit. Se reprend, reformule en s'aidant des propositions du jury.	- S'engage dans sa parole, réagit de façon pertinente. - Prend l'initiative dans l'échange. - Exploite judicieusement les éléments fournis par la situation d'interaction.
Qualité et construction de l'argumentation	- Pas de compréhension du sujet. - Discours non argumenté et décousu.	- Début de démonstration mais raisonnement lacunaire. - Discours insuffisamment structuré.	Démonstration construite et appuyée sur des arguments précis et pertinents.	Maîtrise des enjeux du sujet, capacité à conduire et exprimer une argumentation personnelle, bien construite et raisonnée.

PROGRAMME 2020

Collection

Indice

MATHS

1^{re}

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sous la direction de

Michel PONCY

Denis VIEUDRIN

Jean-Louis BONNAFET

Mickaël BORDONARO

Nicolas BUYLE-BODIN

Sébastien CANTE

Stéphane GAMEL

Arnaud GAZAGNES

Adèle GODEFROY

Maxime GUERY

Catherine LEBERT

Xavier MORER

Jean-Philippe PERRET

Marie-Christine RUSSIER

Les partenaires numériques de la collection Indice

CASIO

 TEXAS INSTRUMENTS



GeoGebra

NUMWORKS

m@ths et tiques

PARTIE 1 ■ Algèbre et géométrie

1 COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Découvrir 10

Le cours et ses capacités 12

1. Raisonnement par récurrence 12
2. Principes additif et multiplicatif –
Dénombrement des k -uplets 14
3. Dénombrements des k -uplets d'éléments distincts 16
4. Combinaisons 18
5. Triangle de Pascal 20

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Étudier et faire une démonstration 24

Exercices 25

- dont Automatismes et rituels 25
- Pour travailler en autonomie 34
- Parcours différenciés 36
- Travaux pratiques 40

CAP vers le Bac 41

- Des pistes pour le Grand oral 41
- Zoom sur l'algorithmique 42
- Sujet commenté 43
- Pour se préparer à l'écrit 44

Ressources Vidéos 13 ; 21
numériques Animation 20
Corrigés détaillés 34 ; 35 ; 44

2 VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Découvrir 48

Le cours et ses capacités 50

1. Vecteurs de l'espace 50
2. Droites et plans de l'espace 52
3. Positions relatives de droites et de plans 54
4. Bases et repères de l'espace 56
5. Représentation paramétrique d'une droite 58

Étudier et faire une démonstration 62

Exercices 63

- dont Automatismes et rituels 63
- Pour travailler en autonomie 72
- Parcours différenciés 74
- Travaux pratiques 79

CAP vers le Bac 80

- Des pistes pour le Grand oral 80
- Sujet commenté 81
- Pour se préparer à l'écrit 82

Ressources Vidéos 53 ; 55 ; 59 ; 60
numériques Animation 54
Corrigés détaillés 72 ; 73 ; 82 ; 83

3 ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Découvrir 86

Le cours et ses capacités 88

1. Produit scalaire dans l'espace 88
2. Produit scalaire dans un repère de l'espace 90
3. Orthogonalité de droites et de plans 92
4. Vecteur normal à un plan 94

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

5. Applications du produit scalaire 96

Étudier et faire une démonstration 100

Exercices 101

- dont Automatismes et rituels 101
- Pour travailler en autonomie 112
- Parcours différenciés 114
- Travaux pratiques 119

CAP vers le Bac 120

- Des pistes pour le Grand oral 120
- Sujet commenté 121
- Pour se préparer à l'écrit 122

Ressources Vidéos 89 ; 97 ; 98
numériques Animations 86 ; 92
Corrigés détaillés 112 ; 113 ; 122 ; 123

PARTIE 2 ■ Analyse

4 LES SUITES

Découvrir 126

Le cours et ses capacités 128

1. Limite finie ou infinie d'une suite 128
2. Opérations sur les limites 130
3. Autres théorèmes sur les limites 132
4. Théorèmes de comparaison
et croissances comparées 134

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Étudier et faire une démonstration 138

Exercices 139

- dont Automatismes et rituels 139
- Pour travailler en autonomie 148
- Parcours différenciés 150
- Travaux pratiques 154

CAP vers le Bac 156

- Des pistes pour le Grand oral 156
- Zoom sur le tableau 157
- Zoom sur l'algorithmique 158
- Sujet commenté 159
- Pour se préparer à l'écrit 160

Ressources Vidéos 129 ; 131 ; 133 ; 135 ; 136 ; 137
numériques Animation 128
Corrigés détaillés 148 ; 149 ; 160

5 FONCTIONS : LIMITES ET DÉRIVATION

Découvrir 164

Le cours et ses capacités 166

1. Limites d'une fonction et asymptotes 166
 2. Limites : somme et produit 168
- DÉMONSTRATION AU PROGRAMME
3. Limites : quotient et composée 170
- DÉMONSTRATION AU PROGRAMME
4. Théorèmes de comparaison
et croissances comparées 172
- DÉMONSTRATION AU PROGRAMME
5. Compléments de dérivation 174

Étudier et faire une démonstration 176

Exercices 177

- dont Automatismes et rituels 177
- Pour travailler en autonomie 186
- Parcours différenciés 188
- Travaux pratiques 193

* À la date de publication de ce manuel, certaines notions de ce chapitre sont exclues de l'épreuve écrite.

CAP vers le Bac	194
Des pistes pour le Grand oral	194
Sujet commenté	195
Pour se préparer à l'écrit	196
Ressources numériques	
Vidéos	169 ; 171 ; 173 ; 175
Animation	172
Corrigés détaillés	186 ; 187 ; 196 ; 197

6 CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ

Découvrir	200
Le cours et ses capacités	202
1. Continuité et applications	202
2. Équation $f(x) = k$ avec f continue	204
3. Convexité d'une fonction	206
DÉMONSTRATION AU PROGRAMME	
Étudier et faire une démonstration	210
Exercices	211
dont Automatismes et rituels	211
Pour travailler en autonomie	220
Parcours différenciés	222
Travaux pratiques	226
CAP vers le Bac	227
Des pistes pour le Grand oral	227
Zoom sur l'algorithmique	228
Sujet commenté	229
Pour se préparer à l'écrit	230
Ressources numériques	
Vidéos	205 ; 207 ; 209
Animations	201 ; 202 ; 204 ; 206
Corrigés détaillés	220 ; 221 ; 230

7 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Découvrir	234
Le cours et ses capacités	236
1. Logarithme népérien d'un réel strictement positif	236
2. Relation fonctionnelle du logarithme népérien	238
3. Limites liées à la fonction $\ln$	240
Étudier et faire une démonstration	242
Exercices	243
dont Automatismes et rituels	243
Pour travailler en autonomie	252
Parcours différenciés	254
Travaux pratiques	259
CAP vers le Bac	261
Des pistes pour le Grand oral	261
Zoom sur le tableur	262
Sujet commenté	263
Pour se préparer à l'écrit	264
Ressources numériques	
Vidéos	237 ; 239 ; 241
Animations	235 ; 240
Corrigés détaillés	252 ; 253 ; 264 ; 265

8 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES *

Découvrir	268
Le cours et ses capacités	270
1. Fonctions sinus et cosinus	270
2. Équations et inéquations trigonométriques	272

** À la date de publication de ce manuel, les notions de ce chapitre sont exclues de l'épreuve écrite.

Exercices	274
dont Automatismes et rituels	274
Pour travailler en autonomie	282
Parcours différenciés	284
Travaux pratiques	287

CAP vers le Bac	288
Des pistes pour le Grand oral	288
Sujet commenté	289
Pour se préparer à l'écrit	290

Ressources numériques	
Vidéos	273
Animations	268 ; 269 ; 270 ; 272
Corrigés détaillés	282 ; 283 ; 290

9 PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Découvrir	294
Le cours et ses capacités	296
1. Primitives d'une fonction	296
DÉMONSTRATION AU PROGRAMME	
2. Recherche des primitives d'une fonction	298
3. Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + f$	300
DÉMONSTRATION AU PROGRAMME	
Étudier et faire une démonstration	302
Exercices	303
dont Automatismes et rituels	303
Pour travailler en autonomie	312
Parcours différenciés	314
Travaux pratiques	319
CAP vers le Bac	321
Des pistes pour le Grand oral	321
Zoom sur l'algorithmique	322
Sujet commenté	323
Pour se préparer à l'écrit	324

Ressources numériques	
Vidéos	297 ; 299 ; 301
Corrigés détaillés	312 ; 313 ; 324 ; 325

10 CALCUL INTÉGRAL **

Découvrir	328
Le cours et ses capacités	330
1. Intégrale d'une fonction continue et positive	330
2. Intégrale d'une fonction continue	332
DÉMONSTRATION AU PROGRAMME	
3. Propriétés et intégration par parties	334
4. Applications du calcul intégral	336
Étudier et faire une démonstration	338
Exercices	339
dont Automatismes et rituels	339
Pour travailler en autonomie	348
Parcours différenciés	350
Travaux pratiques	355
CAP vers le Bac	357
Des pistes pour le Grand oral	357
Zoom sur l'algorithmique	358
Sujet commenté	359
Pour se préparer à l'écrit	360

Ressources numériques	
Vidéos	333 ; 335 ; 337
Animations	328 ; 330
Corrigés détaillés	348 ; 349 ; 360 ; 361

PARTIE 3 ■ Probabilités

11 LOI BINOMIALE

Découvrir	364
Le cours et ses capacités	366
1. Épreuve de Bernoulli	366
2. Loi binomiale	368
Exercices	374
dont Automatismes et rituels	374
Pour travailler en autonomie	384
Parcours différenciés	386
Travaux pratiques	391
CAP vers le Bac	393
Des pistes pour le Grand oral	393
Zoom sur l'algorithmique	394
Sujet commenté	395
Pour se préparer à l'écrit	396
Ressources numériques	
Vidéos	367 ; 369 ; 370
Animations	365 ; 368
Corrigés détaillés	384 ; 385 ; 396 ; 397

12 VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI DES GRANDS NOMBRES *

Découvrir	400
Le cours et ses capacités	402
1. Opérations sur les variables aléatoires	402
2. Échantillon d'une loi de probabilité	404
DÉMONSTRATION AU PROGRAMME	
3. Loi des grands nombres	406
Étudier et faire une démonstration	408
Exercices	409
dont Automatismes et rituels	409
Pour travailler en autonomie	418
Parcours différenciés	420
Travaux pratiques	423
CAP vers le Bac	425
Des pistes pour le Grand oral	425
Sujet commenté	426
Pour se préparer à l'écrit	427
Ressources numériques	
Vidéos	405 ; 407
Corrigés détaillés	418 ; 419 ; 427 ; 428

COMPLÉMENTS

Algorithmique et programmation	430
Rappels	440
Logique	448
Logiciels	452
Tableur	452
GeoGebra	454
Cabri Express	458
Xcas	459
Calculatrices	460
Casio	460
Numworks	462
Texas Instruments	464
Corrigés	466
Index	479

* À la date de publication de ce manuel, certaines notions de ce chapitre sont exclues de l'épreuve écrite.

ILS ONT FAIT L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Jean le Rond d'ALEMBERT	316
ARCHIMÈDE	354
Jacques BERNOULLI	366 ; 406
Irénée-Jules BIENAYMÉ	406
Bernard BOLZANO	224
Henri BRIGGS	260
William BROUNCKER	356
Augustin-Louis CAUCHY	164 ; 200 ; 204
René DESCARTES	14
EUCLIDE	155
Leonhard EULER	154 ; 257 ; 319 ; 320
Pierre de FERMAT	181
Leonardo FIBONACCI	215
Sir Francis GALTON	365
Carl Friedrich GAUSS	354
Hermann Günther GRASSMANN	116
Christian HUYGENS	281
Joseph-Louis LAGRANGE	76 ; 226
Gottfried Wilhelm LEIBNIZ	78 ; 330
Thomas MALTHUS	147 ; 315 ; 321
Benoît MANDELBROT	152
John NAPIER	235 ; 236 ; 238
Isaac NEWTON	146
Blaise PASCAL	20
Giuseppe PEANO	12
Henri POINCARÉ	10 ; 12
Bernhard RIEMANN	143 ; 342
Pafnouti TCHEBYCHEV	401 ; 406
Pierre-François VERHULST	147 ; 315 ; 321
John WALLIS	352
Karl WEIERSTRASS	202

LES PICTOS DU MANUEL

ALGO	Algorithme	PYTHON	Programmation
LOGIQUE	Vocabulaire ensembliste et logique		
ORAL	Exercice à l'oral		
CALC	Utilisation d'une calculatrice		
TABLEUR	Utilisation d'un tableur		
GÉOMÉTRIE	Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique		
FORMEL	Utilisation d'un logiciel de calcul formel		
MATHS & PHYSIQUE	Exercices transdisciplinaires		

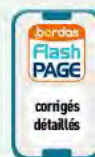
LES COMPÉTENCES

Les compétences du programme sont indiquées dans certains exercices et les travaux pratiques.

RAISONNER	CHERCHER	MODÉLISER
CALCULER	REPRÉSENTER	COMMUNIQUER

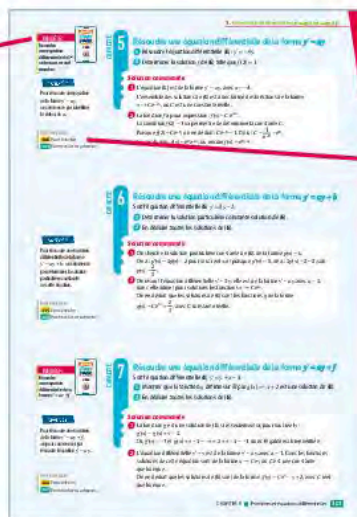
LES CORRIGÉS DÉTAILLÉS

18 Les solutions succinctes des exercices avec une puce verte sont situées en fin de manuel. Pour les exercices Pour travailler en autonomie et certains sujets de Bac, des corrigés rédigés et détaillés sont disponibles. Vous pouvez accéder à ces ressources en flashant la page (voir rabat F) ou via lycee.editions-bordas.fr



LES RESSOURCES NUMÉRIQUES

vidéos	animations	fichier GeoGebra/Cabri
fichier Python	fichier Tableur	fichier Formel



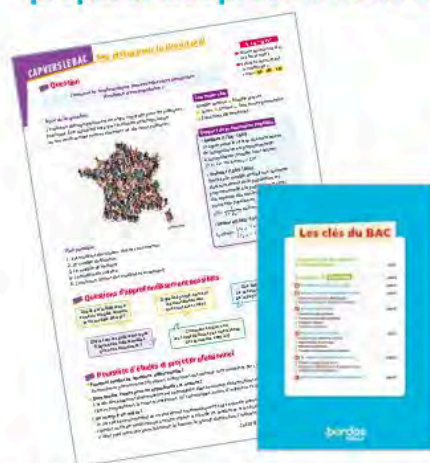
141 Pour travailler en autonomie

▲ Des **vidéos** sont disponibles pour revoir à votre rythme ce qui est appris en classe. Elles sont accessibles en **flashant la page** avec votre smartphone (voir rabat F) ou en allant sur **lycee.editions-bordas.fr**.

Exercice 1. L'équation différentielle $x'' + 3y' + 0 = 0$ s'écrit aussi $y'' = 3y$.
On est en fait dans le cas $\alpha = 0$ et $\beta = 3$.
On sait que les fonctions solutions de cette équation (E) sont de la forme $x = Ce^{at}$ avec a constante réelle. On a donc à la fois la forme $x = Ce^{at}$ et $x = Ce^{3t^2/2}$.
a. La fonction $x \mapsto -2e^{3t}$ est bien solution de (E), car elle est de la forme $x = Ce^{at}$ avec $a = 3$.
b. La fonction $x \mapsto 2e^{3t}$ n'est bien solution de (E), car elle est de la forme $x = Ce^{at}$ avec $a = 3$.
c. Puisque $2e^{3t} = 2e^{3t^2/2}$, la fonction $f : x \mapsto 2e^{3t^2/2}$ est de la forme $x = Ce^{3t^2/2}$ avec $C = 2$. Elle est donc solution de l'équation (E).
On calcule $f(1)$: $f(1) = 2e^{3/2}$.
d. La fonction x est bien la solution f de (E) telle que $f(1) = 2$.
e. La fonction $y \mapsto 2e^{3t}$ est bien solution de (E), car elle est de la forme $x = Ce^{at}$.
On calcule la dérivée $d_t / (3e^{3t}) = 3e^{3t} = 3e^{3t^2/2}$, car la dérivée de a^t est $a^t \ln a$, $f'(0) = 0 = 1$. Puisque $f'(0)$ est différent de 3, cette fonction n'est pas la solution que $y'(0) = 3$.
En conclusion, les réponses a, b et c sont exactes, la réponse d est fautive.

 **15 min** Un temps indicatif est donné pour vous apprendre à gérer votre temps.

Les pages *Cap vers le Bac* permettent de se préparer à l'épreuve écrite et au Grand oral.



▲ **Des pistes pour le Grand oral** pour trouver des idées de sujet et un livret **Les clés du Bac** pour se préparer au Grand oral.



▲ Un **Sujet commenté** pour comprendre les méthodes et apprendre à bien rédiger. Les capacités à maîtriser sont indiquées.



▲ Des sujets de bac pour s'entraîner avec pour certains des **corrigés rédigés et détaillés**. Là aussi, pour chaque sujet, les **capacités à maîtriser** sont indiquées.

Algèbre et géométrie

Combinatoire et dénombrement

Contenus

- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k -uplets (ou k -listes) d'un ensemble à n éléments.
- Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n -uplets de $\{0, 1\}$, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.
- Nombre des k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$. Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments ; parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.
- Pour $0 \leq k \leq n$, formules :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Explication pour $k = 0, 1, 2$. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

Capacités attendues

- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

Démonstrations

- Démonstration par dénombrement de la relation :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

- Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace

Contenus

- Vecteurs de l'espace. Translations.
- Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
- Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
- Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
- Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
- Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.

Capacités attendues

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

Orthogonalité et distances dans l'espace

Contenus

- Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinearité, symétrie.
- Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.
- Base orthonormée, repère orthonormé.
- Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points.
- Développement de $\|u + v\|^2$, formules de polarisation.
- Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.

- Vecteur normal à un plan. Étant donné un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$.
- Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.

Capacités attendues

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
- Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
- Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

Démonstration

- Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M .

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Contenus

- Représentation paramétrique d'une droite.
- Équation cartésienne d'un plan.

Capacités attendues

- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.
- Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.

Démonstration

- Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A .

Analyse

Suites

Contenus

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (q_n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Capacités attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonnement par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q_n) , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

Limites des fonctions

Les opérations sur les limites sont admises.

Contenus

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.
- Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de Première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.
- Limites et comparaison.
- Opérations sur les limites.

Capacités attendues

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

Démonstration

- Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et $\exp$ en $+\infty$.

Compléments sur la dérivation

Contenus

- Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
- Dérivée seconde d'une fonction.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f' , la positivité de f'' .
- Point d'inflexion.

Capacités attendues

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f , de f' ou de f'' .
- Lire sur une représentation graphique de f , de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

Démonstration

- Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Continuité des fonctions d'une variable réelle

Contenus

- Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
- Image d'une suite convergente par une fonction continue.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

Capacités attendues

- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
- Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Fonction logarithme

Contenus

- Fonction logarithme népérien, notée $\ln$, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- Propriétés algébriques du logarithme.
- Fonction dérivée du logarithme, variations.
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

Capacités attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Démonstrations

- Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
- Limite en 0 de $x \mapsto x \ln(x)$.

Fonctions sinus et cosinus *

Contenus

- Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

Capacités attendues

- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

Primitives, équations différentielles

Contenus

- Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.

Capacités attendues

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Démonstrations

- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

Calcul intégral *

Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$ comme aire sous la courbe représentative de f . Notation $\int_a^b f(x) dx$.
- Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a, b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a, b]$ par $F_a(x) \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .
- Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f . Notation $[F(x)]_a^b$.
- Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Définition par les primitives de $\int_a^b f(x) dx$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b .
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- Intégration par parties.

Capacités attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.

- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstrations

- Pour une fonction positive croissante f sur $[a, b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f . Pour toute primitive F de f , relation $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Intégration par parties.

Probabilités

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Contenus

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i . Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Loi binomiale $B(n, p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

Capacités attendues

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X , calculer numériquement une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(k \leq X \leq k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α , ou supérieure à $1 - \alpha$.

Démonstration

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.

Sommes de variables aléatoires

Contenus

- Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$.
- Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X , Y et relation d'additivité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Relation $V(aX) = a^2 V(X)$.
- Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
- Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = S_n / n$.

Capacités attendues

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.

Démonstration

- Espérance et variance de la loi binomiale.

Concentration, loi des grands nombres *

Contenus

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V , et quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(x)}{\delta^2}$.
- Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V , alors pour tout $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$.
- Loi des grands nombres.

Capacités attendues

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.

Algorithmique et programmation

En algorithmique et programmation, le programme reprend les programmes de Seconde et de Première sans introduire de notion nouvelle, afin de consolider le travail des classes précédentes. Les algorithmes peuvent être écrits en langage naturel ou utiliser le langage Python. On utilise le symbole « $\leftarrow$ » pour désigner l'affectation dans un algorithme écrit en langage naturel. L'accent est mis sur la programmation modulaire qui permet de découper une tâche complexe en tâches plus simples. L'algorithmique trouve naturellement sa place dans toutes les parties du programme et aide à la compréhension et à la construction des notions mathématiques.

Notion de liste

La génération des listes en compréhension et en extension est mise en lien avec la notion d'ensemble. Les conditions apparaissant dans les listes définies en compréhension permettent de travailler la logique. Afin d'éviter des confusions, on se limite aux listes sans présenter d'autres types de collections.

Capacités attendues

- Générer une liste (en extension, par ajouts successifs ou en compréhension).
- Manipuler des éléments d'une liste (ajouter, supprimer...) et leurs indices.
- Parcourir une liste.
- Itérer sur les éléments d'une liste.

Vocabulaire ensembliste et logique

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils connaissent également la notion de couple, de triplet et plus généralement de n -uplet et celle de produit cartésien. Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E , on utilise la notation des probabilités $\bar{A}$, ou la notation $E \setminus A$. La notion de fonction, que les élèves manipulent depuis le cycle 4, est mise en évidence dans les diverses parties du programme : fonctions d'une variable réelle, suites, variables aléatoires, exemples en géométrie. La notion de bijection est rencontrée naturellement en analyse, en géométrie (notamment bijection entre le plan et $\mathbb{R}^2$, l'espace et $\mathbb{R}^3$), en dénombrement. La composition de deux fonctions est utilisée principalement dans le cadre des fonctions d'une variable réelle. Le symbole de somme Σ peut être introduit et utilisé pour écrire certaines expressions de façon concise, mais la manipulation de ce symbole pour démontrer des égalités n'est pas un objectif du programme.

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples, pouvant contenir un ou deux quantificateurs ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fautive ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication, ou sa contraposée ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) ;
- raisonner par disjonctions des cas, par l'absurde, par contraposée ;
- raisonner par équivalence, utiliser une propriété caractéristique ;
- distinguer condition nécessaire et condition suffisante ;
- démontrer une propriété par récurrence.

Calculer avec des suites

1 VRAI/FAUX

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Le terme u_1 est égal à -2 .
- Le terme u_0 vérifie l'égalité suivante : $u_0 = 2 \times 3^0 + 1$.

2 Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout entier naturel non nul n par :

$$v_{n+1} = 2v_n + 2.$$

On considère la proposition P : « pour tout entier naturel non nul n , $v_n = 5n - 2$ ». Expliquer pourquoi cette proposition est fausse.

Utiliser le produit cartésien de deux ensembles

3 Soit les ensembles $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$.

- Donner l'ensemble $E \times F$.
- Combien d'éléments composent cet ensemble $E \times F$?

4 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit A un ensemble. Alors A^2 est égal à :

- a. $\{x^2 / x \in A\}$ b. $\{(x, x) / x \in A\}$ c. $\{(x, y) / x \in A, y \in A\}$ d. $A \times A$

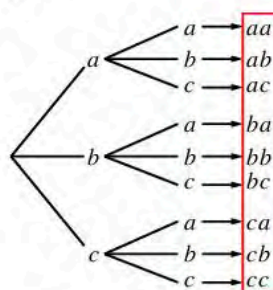
Utiliser des arbres et des tableaux pour dénombrer

5 Dans une population de 500 personnes, on recense leur groupe sanguin (A, B, AB et O) et leur sexe. Les résultats sont partiellement donnés dans le tableau ci-contre.

Sexe \ Groupe sanguin	Groupe sanguin				Total
	A	B	AB	O	
Femmes		20	8	89	
Hommes	94			134	310
Total		85			

- Combien y a-t-il de femmes du groupe AB ?
- Interpréter le nombre 85, puis recopier et compléter ce tableau.

6 Dans un jeu vidéo, le joueur doit entrer dans une salle verrouillée par un code composé de deux lettres. Chacune de ces lettres peut être soit « a », soit « b », soit « c ». L'arbre ci-contre permet d'avoir toutes les possibilités.



- Déterminer le nombre de codes différents.
- Déterminer le nombre de codes avec une unique voyelle.
- Combien de codes ne contiennent pas la lettre « b » ?

7 Amina, Émilie, Fatou et Katia s'affrontent lors d'une épreuve de pâtisserie d'une célèbre émission de télévision. Seules les deux premières gagnent une récompense, en fonction de leur classement.

À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples de gagnantes possibles.

TOIRE ET DÉNOMBREMENT

CHAPITRE

1



La grille d'un jeu de loterie est composée de 50 numéros (de 1 à 50) et de 12 étoiles, numérotées de 1 à 12. Un joueur doit cocher 5 numéros et 2 étoiles. Il y a 139 838 156 grilles différentes, si bien qu'une personne qui joue une grille a une probabilité d'environ 7×10^{-9} de gagner le gros lot, c'est-à-dire de trouver les cinq bons numéros et les deux bonnes étoiles. Le dénombrement intervient dans de nombreux domaines comme ici la théorie des jeux, mais également en informatique ou en génétique.

LES NOTIONS DU CHAPITRE

- Raisonnement par récurrence
- Principes additif et multiplicatif
- Dénombrement des k -uplets
- Dénombrement des k -uplets d'éléments distincts
- Combinaisons
- Triangle de Pascal

Voir exercice 75 p 31



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 13, 21
Animation	p. 20
Corrigés détaillés	pp. 34, 35, 44

Activité 1

Objectif

Découvrir le raisonnement par récurrence.

Cours 1

Raisonnement par récurrence

Point Histoire



Henri Poincaré
(1854-1912)

est un mathématicien et physicien français qui enseignait l'analyse, la physique, les probabilités et l'astronomie. Il est l'un des plus grands génies des mathématiques.

Henri Poincaré et la récurrence

Voici un extrait de *La science et l'hypothèse* d'Henri Poincaré qu'il a écrit en 1902.

Le théorème est vrai du nombre 1. Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2. Donc il est vrai de 2. Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3. Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite. On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant...

Si, au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade... il nous en faudrait davantage encore pour un nombre plus grand ; mais quelque grand que soit ce nombre, nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible...

L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

Pour comprendre le raisonnement de Poincaré, on considère la suite (u_n) définie par $u_1 = a$, avec $a \geq 0$ et, pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

Le « théorème » qu'on souhaite montrer est : « $u_n \geq 0$. »

- 1 Que signifie ici : « le théorème est vrai du nombre 1 » ? Est-ce vrai ?
- 2 a. Vérifier que $u_2 = 2a + 5$. Que signifie la deuxième phrase de Poincaré ? Est-ce vrai ?
b. Expliquer alors, à la manière de Poincaré, que le « théorème » est vrai pour 5.
- 3 En quoi l'étape de la ligne 1 est fondamentale ? Donner une valeur de u_1 qui rend ce « théorème » faux.
- 4 a. Poincaré donne un nom à « l'induction mathématique ». Quel est ce nom ?
b. Rechercher ce qu'est un syllogisme.

Activité 2

Objectif

Dénombrer des k -uplets.

Cours 2

Principes additif et multiplicatif – Dénombrement des k -uplets

Gare au tricheur !

1 Gwladys et Thibault jouent une partie d'un jeu composé de deux manches. Dans chacune d'elles, soit Gwladys gagne (G), soit elle perd (P), soit il y a match nul (N). On note alors E l'ensemble des possibilités pour Gwladys à la fin de chaque manche : $E = \{G, P, N\}$.

On liste dans l'ordre les résultats des deux manches pour Gwladys. Par exemple, la liste (G, P) signifie que Gwladys a gagné la première manche et a perdu la deuxième. On appelle cela un 2-uplet, ou couple, de E .

À l'aide éventuellement d'un arbre de choix, lister tous les couples de E , c'est-à-dire toutes les listes de résultats possibles pour Gwladys. Combien y en a-t-il ?



2 Gwladys et Thibault décident de jouer trois parties. Le gagnant d'une partie est celui qui a remporté le plus de manches. En cas d'égalité à la fin d'une partie, on tire au sort pour désigner le gagnant. À la fin d'une partie, soit Gwladys la remporte (R), soit elle est vaincue (V). Soit alors $F = \{R, V\}$ l'ensemble des résultats de Gwladys pour une partie. La liste (R, R, V) signifie par exemple que Gwladys a remporté les deux premières parties et a perdu la dernière.

a. Sans détailler toutes les listes possibles, expliquer pourquoi il y a 8 résultats différents possibles pour Gwladys à la fin des trois parties.

b. Vérifier ce dénombrement en listant tous les résultats possibles.

On pourra s'aider si besoin d'un tableau ou d'un arbre de choix.

Activité 3

Objectif

Dénombrer des k -uplets d'éléments distincts.

Cours 3

Dénombrement des k -uplets d'éléments distincts.

Dénombrer des classements

Le premier tour de la Coupe du Monde féminine est organisé en six groupes de quatre équipes. Chaque équipe affronte les trois autres une seule fois. À la fin de tous les matches, les deux premières équipes de chaque groupe sont qualifiées pour le deuxième tour.

Le classement est important, car la 1^{re} équipe d'un groupe affronte la 2^e équipe d'un autre groupe.

La France (F) est dans le même groupe que le Nigéria (Ni), la Norvège (No) et la Corée du Sud (C).

Soit $E = \{F, Ni, No, C\}$ l'ensemble de ces quatre équipes.



1 On décide que le couple (F, C) signifie que la France finit première du groupe et que la Corée du Sud termine deuxième du groupe.

a. À l'aide d'un tableau à double entrée ou d'un arbre de choix, lister les couples possibles d'équipes qualifiées pour le deuxième tour. Combien y en a-t-il ?

b. Expliquer par quel calcul on peut retrouver ce résultat.

2 Un classement des quatre équipes est une permutation de E , c'est-à-dire une liste composée de tous les éléments de E , sans répétition possible. Par exemple, la liste (F, No, Ni, C) signifie que la France finit 1^{re}, la Norvège 2^e, le Nigéria 3^e et la Corée du Sud 4^e.

a. En s'inspirant de la question précédente, déterminer le nombre de classements possibles du groupe contenant ces quatre équipes, sans les lister.

On note ce nombre $4!$, qui se lit « factorielle 4 ».

b. Sur le même principe, donner la valeur de $5!$ et $6!$.

Activité 4

Objectif

Découvrir des combinaisons.

Cours 4

Combinaisons

Équipe de choc

Dans les films de la série des Avengers, l'équipe de super héros est composée de six personnes : Captain America (C), Hulk (H), Iron Man (I), Œil-de-Faucon (O), Thor (T) et la Veuve Noire (V). On note $A = \{C, H, I, O, T, V\}$ l'ensemble des Avengers.

Un nouveau film sur les Avengers est en discussion. Dans ce dernier scénario, les super héros doivent se scinder en deux équipes : quatre doivent combattre le méchant de l'histoire tandis que les deux autres doivent sauver des citoyens. Dans une équipe, qu'on appelle aussi combinaison, l'ordre des éléments n'importe pas. Par exemple, le 4-uplet (C, H, I, O) donne la même équipe que le 4-uplet (H, O, C, I). Cette combinaison se note par exemple $\{C, H, I, O\}$.



1 a. Combien de 4-uplets d'éléments distincts de l'ensemble A peut-on réaliser ?

b. En utilisant les permutations, déterminer le nombre de 4-uplets qui donnent la même équipe que le 4-uplet (C, H, I, O).

c. En déduire alors le nombre de combinaisons différentes, composées de 4 membres, qu'on peut réaliser. On note ce nombre $\binom{6}{4}$ et se lit « 4 parmi 6 ».

2 Sans calcul, justifier que $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$.

3 En adoptant la même démarche qu'à la question 1., montrer qu'il y a 20 combinaisons possibles de 3 Avengers.

1. Raisonnement par récurrence

Point Histoire



C'est à Giuseppe Peano (1858-1932) et à



Henri Poincaré (1854-1912) que l'on doit le principe de récurrence.

Vocabulaire

Une propriété est dite **héréditaire** si, lorsqu'elle est vraie pour un entier p , elle est alors vraie pour l'entier $p + 1$.

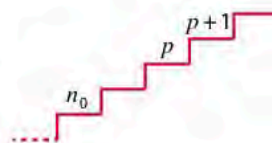
Principe de récurrence

En mathématiques, certaines propriétés dépendent d'un entier naturel n .

Soit par exemple un réel a strictement positif. Alors l'inégalité de Bernoulli affirme que pour tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$. On pourrait vérifier l'exactitude de cette propriété pour $n = 0$: $(1 + a)^0 = 1$, donc $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$; pour $n = 1$: $(1 + a)^1 = 1 + a$, donc $(1 + a)^1 \geq 1 + 1 \times a$; pour $n = 2$: $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$, donc $(1 + a)^2 \geq 1 + 2a$; etc.

Même si on la vérifie pour tous les entiers n entre 0 et 100, cela ne démontre pas qu'elle est vraie pour tout entier naturel n .

Pour démontrer cette propriété, on utilise le principe de récurrence, qu'on peut illustrer à l'aide d'un escalier. Si on peut accéder à une marche n_0 de l'escalier (initialisation) et si l'on sait passer d'une marche à la suivante (hérédité) ; alors on peut accéder à toute marche au-dessus de la marche n_0 .



PROPRIÉTÉ Principe de récurrence

Si une propriété est vraie pour un entier naturel n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier naturel p supérieur ou égal à n_0 , elle est vraie aussi pour l'entier naturel $p + 1$, alors elle est vraie pour tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 .

Une démonstration utilisant ce principe comporte donc **deux étapes**.

On note $P(n)$, une propriété qui dépend de l'entier naturel n et n_0 un entier naturel. Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , on procède comme ci-dessous.

- **Première étape : l'initialisation de la récurrence.** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie, c'est-à-dire que la propriété est vraie pour le premier entier (en général $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).
- **Deuxième étape : l'hérédité.** On considère un entier naturel p tel que $P(p)$ est vraie. C'est l'*hypothèse de récurrence*. On démontre alors que $P(p + 1)$ est vraie.

Exemple de démonstration par récurrence

Soit a un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

- **Initialisation** : On montre que $P(0)$ est vraie.

On doit donc montrer que $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$. Or, $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0a = 1$.

Ainsi, $(1 + a)^0 = 1 + 0a$, donc $(1 + a)^0 \geq 1 + 0a$.

Donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Hypothèse de récurrence : soit un entier naturel p tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $(1 + a)^p \geq 1 + pa$.

On va montrer que $P(p + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1 + a)^{p+1} \geq 1 + (p + 1)a$.

On a : $(1 + a)^{p+1} = (1 + a)^p(1 + a)$. Or, par hypothèse de récurrence, $(1 + a)^p \geq 1 + pa$, donc en multipliant chaque membre de cette inégalité par $1 + a$ qui est positif, on obtient :

$$(1 + a)^p(1 + a) \geq (1 + pa)(1 + a), \text{ soit } (1 + a)^{p+1} \geq (1 + pa)(1 + a).$$

$$\text{Or, } (1 + pa)(1 + a) = 1 + a + pa + pa^2 = 1 + (p + 1)a + pa^2.$$

$$\text{Puisque } pa^2 \geq 0, \text{ on a } (1 + pa)(1 + a) \geq 1 + (p + 1)a, \text{ soit } (1 + a)^{p+1} \geq 1 + (p + 1)a.$$

Donc $P(p + 1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . Ainsi, pour tout réel a strictement positif et pour tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Mener un raisonnement par récurrence

- 1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 3^n + 1$.
- 2 Démontrer par récurrence que la somme des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, soit
 $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution commentée

- 1 Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$: « $u_n = 2 \times 3^n + 1$ ».

Initialisation

$u_0 = 3$ et $2 \times 3^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$. Donc $u_0 = 2 \times 3^0 + 1$.

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : soit un entier naturel p tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_p = 2 \times 3^p + 1$.

On montre que $P(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{p+1} = 2 \times 3^{p+1} + 1$.

$u_{p+1} = 3u_p - 2$ et $u_p = 2 \times 3^p + 1$, donc $u_{p+1} = 3 \times (2 \times 3^p + 1) - 2$, soit

$u_{p+1} = 3 \times 2 \times 3^p + 3 - 2$.

Puisque $3 \times 3^p = 3^{p+1}$, on en déduit : $u_{p+1} = 2 \times 3^{p+1} + 1$.

Donc $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , c'est-à-dire que $u_n = 2 \times 3^n + 1$ pour tout entier naturel n .

- 2 Pour tout entier naturel non nul n , on note $P(n)$ la propriété : « $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation

Montrons que la propriété $P(1)$ est vraie. On remplace n par 1 :

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \text{ et } \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

Hérédité

Hypothèse de récurrence : soit un entier naturel non nul p tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $\sum_{k=1}^p k = \frac{p(p+1)}{2}$.

On montre que $P(p+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

On a $\sum_{k=1}^{p+1} k = 1 + 2 + \dots + p + (p+1) = \sum_{k=1}^p k + (p+1)$.

Par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^p k = \frac{p(p+1)}{2}$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{2(p+1)}{2} = \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2}$.

En factorisant au numérateur par $(p+1)$, on obtient alors $\sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Ainsi, $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion

La propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n , c'est-à-dire

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier naturel non nul n .

Vidéo 09:26

Démonstration
par récurrence :
l'inégalité de
Bernoulli



Vidéo 05:42

Démontrer
par récurrence
l'expression
générale d'une
suite



Méthode

Pour démarrer un raisonnement par récurrence, on commence par énoncer la propriété à démontrer.

Voir exercices

39 Pour s'entraîner

100 Pour travailler en autonomie

2. Principes additif et multiplicatif – Dénombrement des k -uplets

Soit n et m deux entiers naturels. Les ensembles E et F ont respectivement n et m éléments. Soit k un entier naturel.

Point Histoire

L'adjectif « cartésien » provient de René Descartes, mathématicien français du $xvii^e$ siècle.



Principes additif et multiplicatif

PROPRIÉTÉ Principe additif

Si E et F sont disjoints, alors le nombre d'éléments de la réunion $E \cup F$ est $n + m$.

EXEMPLE : Soit $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. Alors E et F sont disjoints, $n = 2$, $m = 3$. Donc $E \cup F$ est composé de $2 + 3 = 5$ éléments. On vérifie : $E \cup F = \{a, b, 1, 2, 3\}$.

DÉFINITIONS (1) Un **couple** de deux éléments a et b de E est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier. On le note (a, b) .

(2) Un **triplet** de trois éléments a , b et c de E est la donnée de ces trois éléments dans un ordre particulier. On le note (a, b, c) .

(3) Le **produit cartésien** de E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (e, f) , où e appartient à E et f appartient à F .

PROPRIÉTÉ Principe multiplicatif : $E \times F$ est composé de $n \times m$ éléments.

Dénombrement des k -uplets

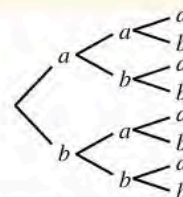
DÉFINITION Un k -uplet de E est une liste ordonnée $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ de k éléments de E . On note E^k l'ensemble des k -uplets de E .

EXEMPLES : • Un code de carte bancaire est un 4-uplet de $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
• Un « mot » de 5 lettres comme « mddrc » est un 5-uplet de l'alphabet.

PROPRIÉTÉ Le nombre de k -uplets de E est n^k .

EXEMPLE : Soit $E = \{a, b\}$. Puisque le nombre d'éléments de E est $n = 2$, le nombre de 3-uplets de E est $n^k = 2^3 = 8$.

On peut le vérifier à l'aide d'un arbre comme celui-ci-contre, en écrivant l'ensemble des 3-uplets de E :



$$E^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$$

Nombre de parties d'un ensemble

DÉFINITION Une **partie** de E est un ensemble d'éléments de E .

EXEMPLE : Soit $E = \{a, b, c\}$. Les parties de E sont $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$. E comporte donc 8 parties.

PROPRIÉTÉ Le nombre de parties de E est 2^n .

DÉMONSTRATION

Soit $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. On associe à chaque partie P de E un unique n -uplet de l'ensemble $\{0; 1\}$ de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n , on note 1 si e_i est dans P et 0 sinon, et réciproquement (code binaire). Par exemple, on associe à $\{e_1, e_3\}$ le n -uplet $\{1, 0, 1, 0, \dots, 0\} : \{e_1, e_3\} \mapsto \{1, 0, 1, 0, \dots, 0\}$. Ainsi, le nombre de parties de E est égal au nombre de n -uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$, c'est-à-dire 2^n .

À noter

Dans un k -uplet, il peut y avoir une répétition d'un ou plusieurs éléments de E .

À noter

L'ensemble des parties de E , noté $P(E)$, contient toujours $\emptyset$ et E .

Vocabulaire

On dit qu'il y a une **bijection** entre l'ensemble des parties de E et l'ensemble des n -uplets de $\{0; 1\}$.

Utiliser les principes additifs et multiplicatifs

- 1 Soit deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$.
Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ puis de $E \times F$.
- 2 Un restaurant propose un menu « Plat + Dessert ».
Un client qui décide de prendre ce menu doit choisir un plat parmi les trois viandes et les deux poissons proposés, puis un dessert parmi les quatre desserts proposés.
Déterminer le nombre de choix différents permettant de construire son menu.

Méthode

Pour dénombrer un ensemble, on commence par déterminer si l'ensemble considéré est une réunion d'ensembles disjoints ou un produit cartésien.

Voir exercices

- 51 Pour s'entraîner
104 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- 1 L'ensemble E est composé de 2 éléments, et l'ensemble F de 4 éléments. De plus, ces deux ensembles sont disjoints.
Donc par le principe additif, le nombre d'éléments de $E \cup F$ est $2 + 4$, soit 6.
Par le principe multiplicatif, le nombre d'éléments du produit cartésien $E \times F$ est 2×4 , c'est-à-dire 8.
- 2 L'ensemble des viandes et celui des poissons étant disjoints, le nombre de plats différents est $3 + 2$, soit 5 (d'après le principe additif).
Le choix d'un menu est un couple du produit cartésien $P \times D$, où P est l'ensemble des plats et D l'ensemble des desserts (un client choisit un plat et un dessert).
Il y a 5 plats et 4 desserts.
Ainsi, d'après le principe multiplicatif, il y a 5×4 , soit 20 manières différentes de composer son menu.

Utiliser les k -uplets pour dénombrer

- 1 Les numéros de téléphone commençant par 06 sont constitués du couple $(0, 6)$ que l'on complète par un 8-uplet de l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
a. Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06.
b. Combien de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 sont possibles ?
- 2 Pour sécuriser son compte sur un site internet, Emma doit créer un mot de passe composé de 7 lettres, uniquement avec les 26 de l'alphabet (pas de caractère spécial, pas de chiffre). Sa copine Fanny lui demande : « Combien de mots de passe différents peux-tu créer ? »
Quelle sera la réponse d'Emma ?

Méthode

Pour dénombrer l'ensemble des k -uplets d'un ensemble E , on identifie E , son nombre d'éléments n et la valeur de k .

Solution commentée

- 1 a. Le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06 est donc égal au nombre de 8-uplets de $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
Cet ensemble E est composé de 10 éléments, donc le nombre de 8-uplets de E est égal à 10^8 .
Donc il y a 10^8 numéros de téléphone commençant par 06.
b. Il y a autant de numéros de téléphone possibles commençant par 07 que de numéros possibles commençant par 06, soit 10^8 . Par le principe additif, il y a donc $10^8 + 10^8$, soit 2×10^8 numéros de téléphone commençant par 06 ou 07.
- 2 Un mot de passe de ce site internet peut être considéré comme un 7-uplet de l'ensemble F composé des lettres de l'alphabet. Un mot de passe n'ayant pas nécessairement de sens, il y a donc 26^7 mots de passe différents.
Ainsi, Emma peut répondre à Fanny qu'il y a 8 031 810 176 mots de passe différents.

Voir exercices

- 55 Pour s'entraîner
105 Pour travailler en autonomie

3. Dénombrements des k -uplets d'éléments distincts

n et k sont des entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$. E est un ensemble à n éléments.

Nombre de k -uplets d'éléments distincts

Vocabulaire

Un k -uplet d'éléments distincts de E est également appelé k -arrangement de E .

À noter

Il n'y a pas de répétition d'un élément de E .

DÉFINITION On appelle k -uplet d'éléments distincts de E un k -uplet de E pour lequel tous les éléments sont différents.

EXEMPLE : Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Alors (a, b, d) et (c, d, b) sont des 3-uplets d'éléments distincts de E . En revanche, (a, c, c) n'en est pas un car l'élément c est répété.

PROPRIÉTÉ Le nombre de k -uplets d'éléments distincts de E est égal à $n(n-1) \times \dots \times (n-k+1)$, soit $n(n-1) \times \dots \times (n-(k-1))$.

EXEMPLE : Lors d'une course du 100 mètres disputée par 9 athlètes, il y a $9 \times 8 \times 7$, soit 504 podiums possibles différents (9 possibilités pour le vainqueur, puis 8 possibilités pour le 2^e et enfin 7 possibilités pour le 3^e). Ce nombre est bien égal à : $9 \times (9-1) \times (9-2)$, soit $9 \times (9-1) \times (9-(3-1))$.

Factorielle d'un entier naturel

À noter

Par convention, $0! = 1$.

DÉFINITION Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factorielle** n , notée $n!$, le produit de tous les entiers compris entre 1 et n . Ainsi, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

EXEMPLE : $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

PROPRIÉTÉ Le nombre de k -uplets d'éléments distincts de E est égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$.

DEMONSTRATION

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-k) \times (n-k+1) \times \dots \times n}{1 \times 2 \times \dots \times (n-k)} = (n-k+1) \times \dots \times (n-1) \times n.$$

On retrouve le nombre de k -uplets d'éléments distincts de E calculé plus haut.

Nombre de permutations

À noter

Une permutation de E contient tous les éléments de E une seule fois.

DÉFINITION Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un n -uplet d'éléments distincts de E .

PROPRIÉTÉ Le nombre de permutations de E est $n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, soit $n!$.

EXEMPLE : Le classement des 8 équipes d'un championnat de football amateur est une permutation de l'ensemble des 8 équipes. Il y a 8! classements possibles, soit 40 320 classements. Pour calculer 8! à la calculatrice :

CASIO	NUMWORKS	TEXAS TI-83
8 OPTN F6 F3 F1	8 alpha	8 math choisir le mode PROB puis choisir le mode 4:!

Utiliser des k -uplets d'éléments distincts pour dénombrer

- 1 Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$.
Combien y a-t-il de 3-uplets d'éléments distincts de E ?
- 2 Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé TOP 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matches aller-retour (phase régulière) passent à la deuxième phase du championnat.
- a. Combien de classements composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?
- b. Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière.
Combien de classements composés des six premières équipes de cette phase régulière étaient alors possibles avec le Stade Toulousain en tête ?

Conseil

Quand l'ordre des résultats intervient, on peut s'aider d'un arbre partiel.

Solution commentée

- 1 L'ensemble E est composé de 5 éléments ($n = 5$).
Le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E est donc égal à $5 \times 4 \times 3$, soit 60.
- 2 a. Pour déterminer le nombre de classements des 6 premières équipes possibles, il suffit de déterminer le nombre de 6-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 14 éléments. Puisque $14 - (6 - 1) = 9$, il y en a $14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$, soit 2 162 160.
- b. Le premier du classement est fixé : le Stade Toulousain.
On complète alors le classement des 6 premières équipes avec 5 équipes parmi les 13 restantes.
Puisque $13 - (5 - 1) = 9$, il y a alors $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$, soit 154 440 classements possibles avec le Stade Toulousain premier.

Voir exercices

59 Pour s'entraîner

107 Pour travailler en autonomie

Utiliser des permutations pour dénombrer

- 1 Soit $E = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$.
Combien de permutations de E peut-on réaliser ?
- 2 On reprend l'énoncé de la question 2. de la **capacité 4**.
- a. Combien de classements des 14 équipes de la première phase du TOP 14 sont possibles ?
- b. Lors de la saison 2018-2019, le Stade Toulousain a fini premier de la phase régulière, suivi de Clermont-Ferrand.
Combien de classements de ce championnat sont alors possibles avec ces deux équipes positionnées respectivement première et deuxième ?

Solution commentée

- 1 L'ensemble E est composé de 10 éléments.
Donc le nombre de permutations de E est $10!$, soit 3 628 800.
- 2 a. Un classement de la première phase du TOP 14 est une permutation de l'ensemble des 14 équipes qui composent ce championnat. Or, il y a $14!$ permutations possibles. Il y a donc $14!$, soit 87 178 291 200, classements différents pour la phase régulière du TOP 14.
- b. Les deux premières places sont fixées.
Ainsi, pour construire un classement, il reste à classer les 12 équipes restantes, de la 3^e à la 14^e place. Ainsi, cela revient à réaliser une permutation d'un ensemble à 12 éléments.
Or, il y a $12!$ permutations possibles, donc il y a 479 001 600 classements différents de la phase régulière du TOP 14 avec le Stade Toulousain premier et Clermont-Ferrand deuxième.

Méthode

Dénombrer des classements revient à dénombrer les permutations d'un ensemble bien choisi.

Voir exercices

61 Pour s'entraîner

108 Pour travailler en autonomie

4. Combinaisons

n est un entier naturel non nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
L'ensemble E comporte n éléments.

Nombre de combinaisons

À noter

Dans une combinaison, il n'y a pas de répétition possible d'un élément de E .
Pour une combinaison de k éléments, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments, alors que, pour un k -uplet, on en tient compte.

À noter

Le nombre $\binom{n}{k}$ est appelé **coefficient binomial**.
On le note parfois également C_n^k .

À noter

Par convention, $\binom{0}{0} = 1$.

À noter

La symétrie est due au fait que toute partie A de k éléments de E est associée à une unique partie B de $n - k$ éléments de E , et réciproquement.

DÉFINITION Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments de E .

EXEMPLES : Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Ainsi, $n = 4$.

• Les combinaisons formées d'un élément de E sont : $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ et $\{d\}$. Il y en a 4. Ainsi, $\binom{4}{1} = 4$.

• Les combinaisons de 2 éléments de E sont : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ et $\{c, d\}$.

Il y en a 6, donc $\binom{4}{2} = 6$.

• L'ensemble E est la seule combinaison de 4 éléments de E . Ainsi, $\binom{4}{4} = 1$.

• L'ensemble vide $\emptyset$ est la seule combinaison de 0 élément de E . Ainsi, $\binom{4}{0} = 1$.

PROPRIÉTÉ Soit $0 \leq k \leq n$. Alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

En particulier : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$; $\binom{n}{n} = 1$.

EXEMPLE : $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$.

Propriétés des combinaisons

PROPRIÉTÉ **Symétrie :** Soit $0 \leq k \leq n$. Alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

EXEMPLE : D'après l'exemple précédent, on a $\binom{5}{3} = 10$. De plus, $\binom{5}{2} = \binom{5}{5-3}$.

Or, par symétrie $\binom{5}{5-3} = \binom{5}{3}$, donc $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$. Avec une calculatrice :

CASIO	NUMWORKS	TEXAS TI-83
5 OPTN F6 F3 F3 3	choisir Denombrement puis choisir binomial(n,k) EXE et on saisit les deux nombres 5 et 3.	5 math choisir le mode PROB puis choisir le mode 3: Combinaison 3.

PROPRIÉTÉ Soit n un entier naturel. Alors $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Par définition, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments de E . Autrement dit, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E composées de k

éléments. Ainsi, d'après le principe additif, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ est égal au nombre total de parties de E (les parties de 0 à n éléments).

Or, il y a 2^n parties de E (voir **Cours 2**, p. 14). Par conséquent, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Calculer des combinaisons CALC

- 1 Calculer $\binom{7}{3}$ puis $\binom{7}{4}$. 2 Calculer $\binom{5}{k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 5$.
 3 Calculer $\binom{20}{12}$ avec une calculatrice.

Méthode

Pour calculer une combinaison $\binom{n}{k}$, on peut utiliser une formule, ou la propriété de symétrie, ou la calculatrice.

Voir exercices

69 Pour s'entraîner

109 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

1 $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$.

De plus, $\binom{7}{4} = \binom{7}{7-4} = \binom{7}{3}$ par la propriété de symétrie. Donc $\binom{7}{4} = 35$.

2 $\binom{5}{0} = 1$ et $\binom{5}{1} = 5$. De plus, $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$. Par la propriété de symétrie, on obtient $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{5} = \binom{5}{0} = 1$.

3 Avec une calculatrice, on obtient $\binom{20}{12} = 125\,970$.

Utiliser des combinaisons pour dénombrer

- 1 On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différentes. Une « main » de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.
 a. Combien de « mains » de 4 cartes peut-on alors former ?
 b. On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?
 2 Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de jorki (ou football à 5).
 a. Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former ?
 b. Si les équipes sont composées au hasard, quelle est la probabilité qu'Hugo et Kylian soient ensemble ? En donner l'arrondi à 0,01.

Solution commentée

1 a. Une « main » de 4 cartes est une combinaison de 4 éléments de l'ensemble E composé des 32 cartes du paquet. Or, le nombre de combinaisons de 4 cartes de E est $\binom{32}{4}$, soit : $\frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2} = 35\,960$.

Il y a donc 35 960 mains de 4 cartes.

b. On tire 4 cartes au hasard, donc les mains sont équiprobables.

Parmi les 35 960 mains de 4 cartes, une seule est composée des 4 as.

Ainsi, la probabilité d'avoir les 4 as est $\frac{1}{35\,960}$, soit environ 0,000 03.

2 a. Dénombrer les équipes de 5 joueurs qui contiennent Hugo et Kylian revient à dénombrer les équipes de 3 joueurs qu'on peut former à partir d'un ensemble à 8 joueurs (les 10 joueurs auxquels on enlève Hugo et Kylian). Or, les équipes de 3 joueurs choisis parmi 8 sont au nombre de $\binom{8}{3}$, soit : $\frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 8 \times 7 = 56$.

Il y a donc 56 équipes différentes de 5 joueurs contenant Hugo et Kylian.

b. Le nombre d'équipes différentes de 5 joueurs qu'on peut former à partir des 10 amis est $\binom{10}{5}$, c'est-à-dire $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$, soit 252. Les équipes étant réalisées au hasard, leurs différences sont équiprobables. D'après la question précédente, 56 équipes peuvent contenir Hugo et Kylian. Donc la probabilité qu'une équipe contienne ces deux joueurs est $\frac{56}{252}$, soit $\frac{2}{9}$, soit environ 0,22.

Conseil

Utiliser des combinaisons pour dénombrer quand les éléments sont choisis sans ordre et sans répétition.

Voir exercices

71 Pour s'entraîner

111 Pour travailler en autonomie

5. Triangle de Pascal

Relation de Pascal

Point Histoire



La formule fait référence au mathématicien et philosophe français **Blaise Pascal** (1623-1662).

PROPRIÉTÉ Relation (ou formule) de Pascal

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Soit n un entier naturel non nul et k un entier entre 0 et $n-1$.

• **Première démonstration par un calcul.** On a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}.$$

Or, $(k+1)! = 1 \times 2 \times \dots \times k \times (k+1) = k! \times (k+1)$ et $(n-k)! = (n-k-1)! \times (n-k)$.

En réduisant au même dénominateur, on a :

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n! \times (k+1)}{(n-k)!k! \times (k+1)} + \frac{n! \times (n-k)}{(n-k-1)! \times (n-k) \times (k+1)!},$$

$$\text{soit } \frac{n! \times (k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(n-k)!(k+1)!}.$$

En regroupant en une fraction puis en factorisant par $n!$ au numérateur, on obtient :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n! \times (k+1) + n! \times (n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!}.$$

Or, $n!(n+1) = (n+1)!$ et $(n-k) = (n+1 - (k+1))$.

$$\text{Ainsi, } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1 - (k+1))!(k+1)!}, \text{ soit } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

• **Seconde démonstration par une méthode combinatoire**

Voir **Étudier une démonstration**, p. 24.

Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de calculer de manière

algorithmique les coefficients $\binom{n}{k}$.

Pour cela, on peut s'aider d'un tableau : n varie en ligne à partir de 0 et k varie en colonne à partir de 0.

On sait que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, donc la première colonne et

la diagonale (de en haut à gauche à en bas à droite) ne contiennent que des 1.

De plus, si $k > n$, alors $\binom{n}{k}$ n'est pas défini. En effet, on ne peut pas former des combinaisons

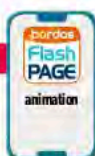
avec plus d'éléments que l'ensemble de départ. Donc il n'y a pas de nombre dans la partie « au-dessus » de la diagonale composée de « 1 ».

D'après ce qui précède, la deuxième ligne est complète (uniquement des 1).

Puis, avec la relation de Pascal, on peut remplir les autres lignes : chaque élément du tableau est la somme de deux éléments situés sur la ligne précédente, l'un dans la même colonne, l'autre dans la colonne précédente.

$k \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

Animation
Triangle de Pascal



Vidéo 06:18

Calculer un
coefficient
binominal :
triangle de Pascal

Méthode

Pour déterminer $\binom{n}{k}$, on s'arrête à la ligne $n+1$ du triangle de Pascal.

Voir exercices

79 Pour s'entraîner

109 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

8

Utiliser le triangle de Pascal

Calculer, à l'aide du triangle de Pascal, les combinaisons suivantes : $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$.

Solution commentée

On construit le triangle de Pascal jusqu'à sa septième ligne, sur laquelle se trouvent les coefficients de la forme $\binom{6}{k}$, où k est un entier entre 0 et 6.

On en déduit : $\binom{6}{2} = 15$; $\binom{6}{3} = 20$ et $\binom{6}{4} = 15$.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

CAPACITÉ

9

Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques

- Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments de l'ensemble $E = \{A, B, O\}$ (ces éléments sont appelés *allèles*).
 - Combien de couples d'allèles sont possibles ?
 - On appelle *hétérozygote* un gène qui est représenté par deux allèles différents. L'ordre ne compte pas (par exemple, le couple d'allèles (A, B) donne le même code que le couple d'allèles (B, A)). Déterminer le nombre d'hétérozygotes pour le groupe sanguin.
 - On appelle *homozygote* un gène qui contient les mêmes allèles. On appelle *génotype* l'ensemble des compositions alléliques d'un individu. Déterminer alors le nombre de génotypes sanguins.
- Pour accéder à un compte sur un site internet, un utilisateur doit saisir un mot de passe contenant deux lettres et trois chiffres. Dans chacun des cas, déterminer le nombre de mots de passe :
 - lorsque le mot de passe commence par les deux lettres ;
 - lorsque le mot de passe commence par les deux lettres et que les caractères sont tous différents.

Solution commentée

- Il y a 3 allèles différents, donc le nombre de couples d'allèles est 3^2 , soit 9.
 - Un hétérozygote est une combinaison de 2 éléments de E . Ainsi, le nombre d'hétérozygotes est $\binom{3}{2}$, soit $\frac{3 \times 2}{2}$ donc 3. Il y a donc 3 hétérozygotes différents. Ce sont $\{A, B\}$, $\{A, O\}$ et $\{B, O\}$.
 - Les génotypes sont constitués des homozygotes et des hétérozygotes. Il y a 3 homozygotes ($\{A, A\}$, $\{B, B\}$ et $\{O, O\}$) et 3 hétérozygotes. Par le principe additif, il y a donc 6 génotypes différents.
- Le mot de passe commence par deux lettres. D'après la formule des 2-uplets, il y a alors 26^2 possibilités pour les deux premiers caractères. D'après la formule des 3-uplets, il y a 10^3 possibilités pour le choix des trois chiffres. Par le principe multiplicatif, il y a $26^2 \times 10^3$, soit 676 000 mots de passe différents commençant par deux lettres.
 - Aucun caractère ne se répète. Ainsi, pour le choix des deux lettres qui débute le mot de passe, d'après la formule des 2-uplets d'éléments distincts, on a 26×25 possibilités. Pour le choix du triplet d'éléments distincts de l'ensemble des chiffres, on a $10 \times 9 \times 8$ possibilités. Donc par le principe multiplicatif, on a $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8$ soit 468 000 mots de passe différents sans répétition d'un caractère.

Méthode

Avant de dénombrer, déterminer si on a affaire à des k -uplets ou à des k -combinaisons.

Voir exercice

85 Pour s'entraîner

Utiliser une représentation adaptée dans le cadre d'un dénombrement dans divers domaines scientifiques

Énoncé 1

Dans un *escape game* (jeu en immersion dans lequel les participants résolvent des énigmes pour sortir d'une pièce), il faut trouver un code à 4 chiffres contenant une fois le nombre 3, deux fois le nombre 5 et une fois le nombre 6. Déterminer le nombre de codes différents possibles, puis la probabilité de trouver le bon code dès le premier essai. Arrondir à 0,01.

Énoncé 2

- 1 Dans un lycée de 500 élèves, 300 d'entre eux ont un compte Snapchat et 380 ont un compte Facebook. Il y a 50 élèves qui n'ont de compte dans aucun des deux réseaux sociaux.

Combien d'élèves ont un compte sur les deux réseaux sociaux ? Combien ont seulement un compte sur Snapchat ?

- 2 Dans un autre lycée de 495 élèves, 395 élèves ont un compte Snapchat, 163 ont un compte Instagram et 19 élèves ont un compte Facebook. Parmi tous ces élèves, 5 ont seulement un compte Facebook, 8 ont un compte sur Facebook et Snapchat mais pas sur Instagram, 82 ont seulement un compte Instagram et 2 ont un compte sur les trois réseaux sociaux.

- a. Déterminer le nombre d'élèves qui n'ont de compte que sur Snapchat.
b. Déterminer le nombre d'élèves qui n'ont aucun compte social.

Conseil

Dans le cas d'un dénombrement où l'ordre intervient, un arbre de choix permet de déterminer toutes les possibilités.

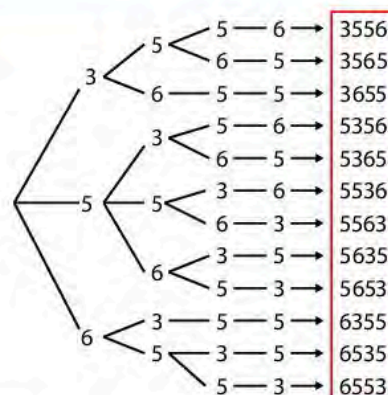
Conseil

Quand le dénombrement porte sur deux caractères, un tableau à double entrée peut être utile. Lorsqu'il y a plus de deux caractères, un diagramme est plus judicieux.

Solution commentée

Énoncé 1

Pour déterminer le nombre de codes différents, on peut utiliser un arbre de choix comme ci-contre. On dénombre alors 12 codes différents. La probabilité de trouver le bon code dès le premier essai est donc $\frac{1}{12}$, soit environ 0,08.



Énoncé 2

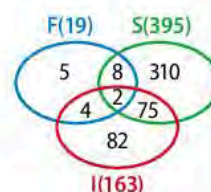
- 1 On peut utiliser un tableau à double entrée comme ci-dessous. Les nombres donnés dans l'énoncé sont en noir. Les nombres que l'on peut déduire à l'aide de calculs sont en vert.

	Snapchat	Pas Snapchat	Total
Facebook	300 - 70 = 230	200 - 50 = 150	380
Pas Facebook	120 - 50 = 70	50	500 - 380 = 120
Total	300	500 - 300 = 200	500

Ainsi, il y a 230 élèves qui ont un compte sur les deux réseaux sociaux et 70 qui ont seulement un compte sur Snapchat.

- 2 a. b. Ici on étudie trois réseaux sociaux, donc un diagramme sera plus facile à utiliser (voir ci-contre).

On note F l'ensemble des élèves qui ont un compte Facebook ; S l'ensemble de ceux qui ont un compte Snapchat et I l'ensemble de ceux qui ont un compte Instagram. $19 - (5 + 8 + 2) = 4$, donc 4 élèves ont Facebook et Instagram mais pas Snapchat. On en déduit que 75 élèves ont Instagram et Snapchat mais pas Facebook ($163 - (82 + 2 + 4) = 75$). Puis 310 n'ont que Snapchat ($395 - (75 + 2 + 8) = 310$). Enfin, 9 élèves n'ont de compte dans aucun de ces réseaux sociaux ($495 - (5 + 8 + 2 + 4 + 82 + 75 + 310) = 9$).



Voir exercices

89 Pour s'entraîner

113 Pour travailler en autonomie

Générer la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aidede la relation de Pascal pour un entier n donné **ALGO** **PYTHON**

1 En utilisant le triangle de Pascal, déterminer la liste des coefficients $\binom{5}{k}$, où k parcourt les entiers entre 0 et 5.

2 On considère le programme Python ci-contre. On veut vérifier pour quelques valeurs de n que cette fonction retourne la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ pour un entier n fixé.

a. Faire tourner ce programme pour $i = 1$ et $i = 2$.

b. On suppose qu'après la boucle **for** décrite pour $i = 3$, la variable L contient la liste $[1, 3, 3, 1]$. Détailler le fonctionnement du programme pour donner le contenu de la variable L après la boucle d'indice $i = 4$.

c. À l'aide de ce programme, déterminer la valeur de $\binom{10}{4}$.

```
1 def Pascal(n):
2     L=[1]
3     for i in range(1,n+1):
4         L.append(1)
5         a=L[0]
6         b=L[1]
7         for k in range(1,i):
8             L[k]=a+b
9             a=b
10            b=L[k+1]
11     return(L)
```

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

Conseil

Pour comprendre un algorithme avec deux boucles imbriquées, il faut le dérouler pas à pas pour les premières valeurs des indices.

Solution commentée

1 On construit le triangle de Pascal ci-contre.

Ainsi, $\binom{5}{0} = 1, \binom{5}{1} = 5, \binom{5}{2} = 10, \binom{5}{3} = 10, \binom{5}{4} = 5$ et $\binom{5}{5} = 1$.

2 a. On suppose $i = 1$. Après la ligne 4, la variable L contient $[1, 1]$, puis a contient 1 et b contient 1. La seconde boucle n'est pas décrite. Ainsi, L contient $\left[\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right]$ en fin de boucle.

On suppose $i = 2$. Après la ligne 4, la variable L contient $[1, 1, 1]$, puis a contient 1 et b contient 1. La variable k de la seconde boucle ne prend que la valeur 1. Après la ligne 8, $L[1]$ contient $1 + 1 = 2$, ce qui traduit la formule de Pascal $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$.

Puis avec les lignes 9 et 10, a contient 1 et b contient $L[2]$, c'est-à-dire 1. Ainsi, à la fin de cette boucle, L contient $[1, 2, 1]$, soit $\left[\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}\right]$.

b. Soit $i = 4$. On suppose que L contient $[1, 3, 3, 1]$, soit $\left[\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}\right]$.

À la ligne 6, L contient $[1, 3, 3, 1]$, a contient 1 et b contient 3, puis on entre dans la seconde boucle.

k	$L[k]$	Formule correspondante	a	b
1	$1 + 3 = 4$	$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} = \binom{4}{1}$	3	$L[2]$, soit 3
2	$3 + 3 = 6$	$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$	3	$L[3]$, soit 1
3	$3 + 1 = 4$	$\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$	1	$L[4]$, soit 1

La liste L contient donc en fin de boucle $[1, 4, 6, 4, 1]$, c'est-à-dire les coefficients binomiaux de la forme $\binom{4}{k}$.

c. On saisit `Pascal(10)`. On obtient la liste suivante.

```
>>> Pascal(10)
[1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]
```

Le nombre $\binom{10}{4}$ est le cinquième nombre de cette liste. Ainsi $\binom{10}{4} = 210$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Étudier une démonstration

On souhaite démontrer la relation de Pascal par une méthode combinatoire.

PROPRIÉTÉ DU COURS 3 PAGE 20 Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Bon à savoir !

Faire des schémas peut aider à expliquer certaines étapes d'une démonstration.

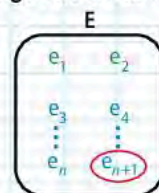
RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

Soit n un entier naturel non nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$.

Soit $E = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ un ensemble à $n+1$ éléments. Le nombre $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de parties de $(k+1)$ éléments de E .

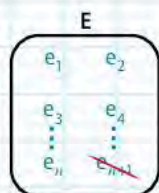
Pour construire une partie A de E formée de $(k+1)$ éléments, on distingue deux cas :

- 5 • **Premier cas** : on prend l'élément e_{n+1} dans A (voir schéma ci-contre) et on doit compléter la combinaison avec k éléments pris dans l'ensemble $\{e_1, \dots, e_n\}$. On a alors $\binom{n}{k}$ possibilités.



Cas N°1

- 10 • **Second cas** : on ne prend pas l'élément e_{n+1} dans A (voir schéma ci-contre) et on doit alors fabriquer la combinaison avec $(k+1)$ éléments pris dans l'ensemble $\{e_1, \dots, e_n\}$.



Cas N°2

On a alors $\binom{n}{k+1}$ possibilités.

Par le principe additif, on a donc $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Voir les pages *Vocabulaire ensembliste et Logique* en fin de manuel (page 448).

QUESTIONS

1. Pourquoi démarre-t-on la démonstration avec un ensemble E formé de $n+1$ éléments ?
2. Pourquoi prend-t-on les éléments dans $\{e_1, \dots, e_n\}$ aux lignes 7 et 10 ?
3. Expliquer pourquoi on peut utiliser le principe additif à la ligne 12.

Faire une démonstration

Bon à savoir !

On peut commencer par démontrer l'égalité pour les premières valeurs de n .

D1 Nombre de diagonales dans un polygone

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$. Dans un polygone, on appelle *diagonale* toute droite joignant deux sommets non consécutifs.

Démontrer que le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$.

Piste : Pour un point choisi, dénombrer les diagonales qui passent par ce point.

D2 Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux réels. Démontrer de manière combinatoire que, pour tout entier naturel n ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Piste : On dénombre les mots composés de n lettres, avec la lettre « a » et/ou « b », qui contiennent k fois la lettre « a ».

Calcul mental

1 Calculer et simplifier :

$$1. \frac{(3^2)^4 \times 5^7}{5^5 \times 3^7} \quad 2. \frac{2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^5}{2 \times 10^3} \quad 3. \frac{5}{\frac{10}{6}}$$

2 Calculer l'image de 2 par chacune des fonctions dont on donne l'expression.

$$1. f(x) = 2x^2 + 3x - 4 \quad 2. g(t) = \frac{3t - 5}{2t}$$

3 Calculer la dérivée de chacune des fonctions f , g et h définies de la façon suivante.

$$1. f(x) = -\frac{2}{x} + 5x^3, \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$2. g(s) = \frac{4s^2 - 5s + 1}{3}, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$3. h(r) = 4e^r + r - 3, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

4 Calculer l'aire en m^2 d'une pièce rectangulaire de 17 mètres de long et de 11 mètres de large.

Automatismes

Évolutions et pourcentages

5 Pendant les soldes, un jean de prix initial 40 € est soldé à -30 %.

Quel est le prix soldé de ce jean ?

6 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Entre novembre et décembre, le prix d'un jeu vidéo est passé de 50 € à 56 €.

Le prix a augmenté de :

- a. 10,7 % environ b. 12 % c. 6 % d. 1,12 %

7 Question de méthodes

Lors de la première semaine des soldes, un magasin propose 50 % de réduction sur tous les articles.

Au cours de la deuxième démarque, ce magasin accorde 20 % de remise supplémentaire.

Expliquer comment on peut calculer le taux de réduction du prix d'un article suite à ces deux baisses consécutives.

8 Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 3.Calculer v_{31} .9 Calculer $1 + 5 + 25 + \dots + 5^{11}$.

Calculs numériques et algébriques

10 Soit x un réel.

Développer et réduire les expressions suivantes.

$$a. A = -2(3x - 4) - (7x + 2)(x + 1)$$

$$b. B = (3x - 2)^2(x + 4)$$

$$c. C = 3(-2x + 1)(x^2 - 5x)$$

11 Soit x un réel. Factoriser les expressions suivantes.

$$a. A = x^2 - 3x - 4$$

$$b. B = 9x^2 - 25$$

12 Résoudre les équations suivantes.

$$1. -x^2 + 5x = (3x - 4)(x + 1)$$

$$2. 2x^3 + 3x^2 - 4x = -x^3 + 2x^2 - 2x$$

13 Dresser le tableau de signes des expressions suivantes.

$$1. x^2 + 4x + 3$$

$$2. x^3(e^{-2x} + 1)$$

14 Résoudre les systèmes suivants.

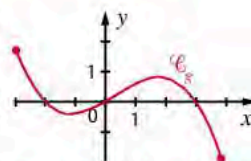
$$1. \begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x + y = -11 \end{cases}$$

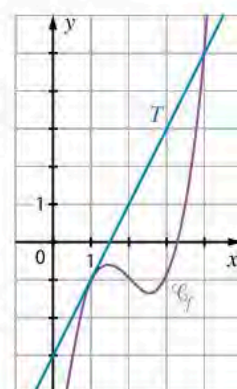
Lectures graphiques

15 VRAI/FAUX

Soit g une fonction définie sur $[-3; 4]$ et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est tracée ci-contre. Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont $-2; 0; 3$.b. L'inéquation $g(x) < 2$ n'a pas de solution.c. L'équation $g(x) = 0,5$ admet deux solutions.

16 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et la tangente T au point d'abscisse 1 sont tracées ci-contre. Par lecture graphique, déterminer :

a. l'image de 1 par f ;b. le nombre dérivé de f en 1;c. une équation de la droite T ;d. le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sur l'intervalle $[1; 3]$.

Raisonnement par récurrence

Questions flash

17 ORAL Pour chacune des propriétés $P(n)$ ci-dessous, dire si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies. Justifier.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : \ll -3n + 5 \geq 0 \gg$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : \ll 3^n \leq 2 \gg$.

18 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

Pour tout entier naturel n , on pose $P(n) : \ll u_n = 1 + 2^n \gg$.

Vérifier que $P(0)$ est vraie.

19 Soit (u_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Pour tout entier naturel n , on appelle $P(n)$ la propriété « $u_n = 4$ ». L'objectif de l'exercice est de montrer que $P(n)$ est héréditaire.

1. Soit p un entier naturel tel que $P(p)$ est vraie.

Écrire l'égalité qu'on obtient.

2. Justifier qu'on doit alors montrer que $u_{p+1} = 4$.

Le faire, puis conclure.

20 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.

Pour tout entier naturel n , on note $P(n) : \ll u_n \geq n \gg$.

1. Montrer que $P(0)$ est vraie.

2. a. Soit p un entier naturel tel que $P(p)$ est vraie.

Écrire l'inégalité qu'on obtient.

b. Écrire la propriété $P(p+1)$.

c. Montrer qu'on peut en déduire que $P(p+1)$ est vraie.

3. Que peut-on en conclure ?

Principes additif et multiplicatif

Question flash

21 ORAL Soit E et F deux ensembles disjoints, composés respectivement de 4 et 5 éléments.

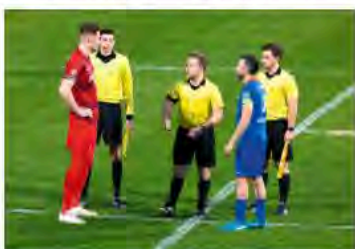
Calculer le nombre d'éléments de $E \cup F$, $E \times F$, E^2 et F^3 .

22 ORAL VRAI/FAUX

Au cours d'un match de football opposant deux équipes de 11 joueurs, chaque équipe élit un capitaine. Un binôme de capitaines est formé de deux capitaines, chacun issu d'une équipe différente.

Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, puis justifier.

« Il y a 22 binômes de capitaines possibles. »

Dénombrement de k -uplets

Questions flash

23 ORAL VRAI/FAUX

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. (a, c) est un 2-uplet de E .
2. (b, c, a) est un 3-uplet de E .
3. (c, b, c, a) est un 4-uplet d'éléments distincts de E .
4. (a, c, d) est un 3-uplet de E .

24 Soit $E = \{0, 1\}$.

1. La liste ordonnée $(0, 0, 1)$ est un k -uplet de E . Que vaut k ?

2. Donner tous les 3-uplets (ou triplets) de E .

Combien y en a-t-il ?

3. Vérifier la cohérence du résultat précédent avec la formule du cours permettant de dénombrer les k -uplets d'un ensemble à n éléments.

25 Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Lister tous les 2-uplets (ou couples) de E . Combien y en a-t-il ?

2. Quelle formule du cours permet de retrouver ce résultat sans lister tous les couples de E ?

3. a. Lister tous les couples d'éléments distincts de E .

Combien y en a-t-il ?

b. Quelle formule du cours permet de retrouver ce résultat ?

26 Soit $E = \{p, i, 3, 1, 4\}$.

Déterminer le nombre de 4-uplets de E .

27 ALGO Comprendre un programme

On considère le programme ci-dessous, écrit en langage Python, où n et k sont des entiers naturels non nuls.

```
1 def uplet(n, k):
2     return(n**k)
```

1. Quel nombre est retourné après l'appel `uplet(3,2)` ?

2. Quel est le rôle de ce programme pour un ensemble à n éléments ?

28 Soit $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ un ensemble à 6 éléments.

1. Expliquer pourquoi le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E est égal à $6 \times 5 \times 4$.

2. Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments distincts de E ?

29 ALGO Comprendre un algorithme

On considère l'algorithme ci-contre, où n est un entier naturel non nul.

1. Déterminer ce que contient la variable f en fin d'algorithme pour $n = 4$.

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

```
f ← 1
Pour i allant de 1 à n
    f ← f * i
Fin Pour
```


30 Soit $E = \{0, 1, 2\}$.

1. Quelle valeur doit-on donner à k pour qu'une permutation de E soit un k -uplet d'éléments distincts de E ?
2. Lister toutes les permutations de E .
Combien il y en a-t-il ?
3. Quelle formule du cours permet d'obtenir le résultat précédent ?

31 **ORAL** Soit $E = \{e, f, g, h\}$.

- a. Expliquer pourquoi (e, g, f, e) n'est pas une permutation de E .
- b. Expliquer pourquoi (e, g, f) n'est pas une permutation de E .
2. a. Expliquer pourquoi le nombre de permutations de E est $4 \times 3 \times 2 \times 1$.
- b. Comment note-t-on ce nombre ?

Combinaisons

Questions flash

32 **QCM** Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit E un ensemble à 5 éléments.

1. Le nombre de parties de E à un élément est égal à :

a. 1 b. $\binom{5}{1}$ c. 5 d. 4

2. Le nombre de 5-combinaisons de E est égal à :

a. 1 b. $\binom{5}{0}$ c. 5 d. $\binom{5}{5}$

3. Le nombre $\binom{5}{2}$ est égal à :

a. $\frac{5!}{2!}$ b. $\frac{5!}{3! \times 2!}$ c. $\frac{5 \times 4}{2}$
d. au nombre de couples de E .

33 **LOGIQUE** Soit $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ un ensemble à 3 éléments.

Soit F une partie de E . On considère la proposition :

« Si $F = \{e_1, e_2\}$, alors F est une combinaison de deux éléments de E . »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. a. Énoncer la proposition réciproque.
- b. Cette proposition réciproque est-elle vraie ? Justifier.

34 Soit $E = \{p, q, r, s\}$.

- a. Lister les combinaisons de 3 éléments de E .
- b. Combien y en a-t-il ?
- c. Le nombre de combinaisons de 3 éléments de E est égal à $\binom{4}{3}$. Rappeler une formule permettant de calculer ce coefficient et vérifier le résultat obtenu à la question précédente.
2. a. Sans les lister, déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments de E .
- b. Vérifier le résultat précédent en listant toutes les combinaisons de 2 éléments de E .

35 **ORAL** Dans chacun des cas suivants, dire si A est une combinaison de l'ensemble des élèves d'une classe ou non, en justifiant.

1. A est l'ensemble composé des deux délégués.
2. A est le classement des élèves lors d'un devoir, de la meilleure note à la moins bonne.
3. A est l'ensemble des élèves qui ont une note au-dessus de la moyenne de classe à un devoir.

36 **ORAL** On note A l'ensemble des athlètes féminines disputant la finale du 100 m natation aux Jeux Olympiques. Dans cet ensemble, il y a trois françaises. Dans chacun des cas suivants, dire si ce qui est considéré est un k -uplet d'éléments distincts de A , une permutation de A ou une combinaison de A , en justifiant.



- a. Le classement de la finale (de la première à la dernière place).
- b. Le podium (médaille d'or, d'argent, de bronze).
- c. L'ensemble des trois françaises.

Triangle de Pascal

Questions flash

37 **ORAL** **VRAI/FAUX**

On considère le triangle de Pascal ci-contre.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	

1. La ligne 6 de ce tableau (la dernière) est la ligne des coefficients de la forme $\binom{6}{k}$, où k est un entier variant de 0 à 6.
2. $\binom{4}{3} = 6$.
3. La première colonne est composée uniquement de « 1 » car pour tout entier naturel n , $\binom{n}{0} = 1$.
4. La ligne suivante de ce triangle est

1	6	15	20	15	6	1
---	---	----	----	----	---	---

.

38 1. a. Écrire les 8 premières lignes du triangle de Pascal.

b. En déduire la valeur de $\binom{7}{4}$.

2. On rappelle que $\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!4!}$.

- a. Calculer $7!$, $(7-4)!$ et $4!$.
- b. Retrouver alors les résultats de la question 1.b.

Raisonnement par récurrence

39 Capacité 1, p. 13

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 2^n + 5$.

40 Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = -1$ et pour tout entier naturel non nul n : $v_{n+1} = -3v_n + 8$.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $v_n = (-3)^n + 2$.

41 Soit (t_n) la suite définie par $t_1 = 11$ et pour tout entier naturel non nul n : $t_{n+1} = 4t_n + 3$.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $t_n = 3 \times 4^n - 1$.

42 Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n + 2$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, $v_n \leq 5$.

43 Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$.
Démontrer que pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$.

44 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
 $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. Calculer u_1 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

3. En déduire le sens de variation de (u_n) .

45 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
 $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 4$.

1. Calculer v_1 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} \geq v_n.$$

3. En déduire le sens de variation de (v_n) .

46 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1. Déterminer $f'(x)$ puis étudier les variations de f .
2. a. Justifier que $u_1 = -1$.
b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

- c. Conclure quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

47 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,7$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.
a. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
b. En déduire que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

48 Capacité 1, p. 13

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

49 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non

$$\text{nul } n, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

50 LOGIQUE Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 12$. Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété suivante : « $u_n = 6$ ».

1. Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont fausses.
2. Montrer que $P(n)$ est héréditaire.
3. Justifier la nécessité de l'étape d'initialisation dans un raisonnement par récurrence.

Principes additif et multiplicatif

51 Capacité 2, p. 15

1. Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ deux ensembles. Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ puis de $E \times F$.

2. Pour aller de Paris à Marseille, Paul souhaite passer par Lyon. Entre Paris et Lyon, il a le choix entre deux parcours qui utilisent l'autoroute et trois parcours qui n'utilisent pas l'autoroute. Entre Lyon et Marseille, il a deux parcours possibles (uniquement avec des portions d'autoroute).

Combien de parcours différents allant de Paris à Marseille Paul peut-il alors emprunter ?

52 Pour fêter leur anniversaire de mariage, Philippe organise une soirée pour sa femme Constance. Il lui propose une première activité qu'elle doit choisir entre une partie de bowling et une sortie au spa. Puis Philippe emmènera Constance au restaurant. Il lui propose quatre choix. Enfin, après le restaurant, le couple ira au cinéma voir un film. Le cinéma en diffuse six. Combien de possibilités ont Philippe et Constance pour organiser leur soirée ?



53 QCM Choisir la bonne réponse.

1. Au cours d'une soirée entre célibataires, il y a 6 femmes et 5 hommes. On choisit une femme et un homme au hasard. Le nombre de couples qu'on peut former est :

- a. 11 b. 30 c. 7 776 d. 15 625

2. Éric va dans un refuge de la SPA et décide d'adopter un furet, et en plus, un chien ou un chat. La SPA possède 4 chiens, 5 chats et 3 furets. Le nombre de choix possibles de ces deux animaux pour Éric est :

- a. 12 b. 23 c. 27 d. 32 e. 60

Dénombrement de k -uplets

54 Soit $E = \{a, b, 1, 2\}$.

- Combien y a-t-il de 5-uplets de E ?
- Combien y a-t-il de 5-uplets de E commençant par b ?

55 Capacité 3, p. 15

Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres.

- Combien y a-t-il de codes PIN différents ?
- Combien y a-t-il de codes PIN commençant par le chiffre 3 ?



56 Lors d'une partie d'un jeu de société, le personnage sur le plateau doit procéder à sept déplacements successifs. Chaque déplacement correspond à une direction (gauche, droite, haut, bas). Combien de chemins différents le personnage peut-il alors emprunter, sachant que les retours en arrière sont possibles ?

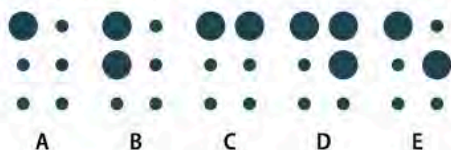
57 On s'intéresse aux familles composées de 6 enfants.



On note, dans l'ordre des naissances, le sexe des enfants, avec le codage : F pour une fille et G pour un garçon. Par exemple, on note (F, F, F, G, G, F) quand les trois premiers enfants sont des filles, les deux suivants sont des garçons et le dernier enfant est une fille. On appelle cela une « fratrie ». Déterminer :

- le nombre total de fratries ;
- le nombre de fratries dont l'aîné est un garçon ;
- le nombre de fratries dont le 2^e, le 4^e et le 5^e enfant sont des filles.

58 L'écriture braille, destinée aux personnes mal ou non voyantes, est constituée de symboles composés d'un assemblage de six points.



On a deux possibilités pour chaque point : un petit point ou un gros point, tous les deux en relief, comme le montre l'image ci-dessus.

- Combien de symboles différents y a-t-il dans cette écriture ?
- Si une personne mal voyante arrive à distinguer les 3 points de la première colonne mais pas les 3 autres, combien de possibilités lui reste-t-il pour déchiffrer le symbole ?

Dénombrement de k -uplets d'éléments distincts, permutations

59 Capacité 4, p. 17

1. Soit E un ensemble à 9 éléments.

Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments distincts de E ?

2. Sven doit créer un code de sécurité composé de 6 chiffres sur son smartphone. Il décide de ne jamais utiliser deux fois le même chiffre et de ne jamais utiliser le chiffre 0.

- Combien de codes peut-il alors créer ?
- Jérémy a vu son ami taper 5 comme dernier chiffre. Combien de codes différents sont alors possibles s'il veut utiliser son code ?

60 Lors d'un tournoi de danse opposant 10 couples, les 5 premiers couples remportent un prix différent selon le rang.



- Déterminer le nombre de façons d'attribuer les 5 prix différents.
- Fauve et son partenaire Maxime ont terminé 1^{er} de ce classement.
 - En déduire le nombre de façons d'attribuer les prix.
 - On sait de plus que Denitsa et son partenaire Christophe ont fini 4^e. Dénombrer alors les distributions de prix possibles.

61 Capacité 5, p. 17

1. Soit E un ensemble à 9 éléments.

Combien y a-t-il de permutations de E ?

2. La première phase de la coupe du monde de handball féminin est organisée en poules de 6 équipes.

- Combien y a-t-il de classements possibles dans le groupe de la France ?
- Combien y a-t-il de classements possibles dans ce groupe si la France termine première et l'Australie dernière ?

62 Le mot « TAHMS » est un anagramme du mot « MATHS », car les deux mots sont composés des mêmes lettres. Combien d'anagrammes peut-on créer avec le mot « MATHS » ?

63 VRAI/FAUX

Au cours d'une partie d'un jeu vidéo, 12 joueurs font une course de karting.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Il y a 12¹² classements différents.
- Maria termine première. Il y a alors 11! classements différents possibles.
- Luigo, Bouseure et Tob finissent respectivement 3^e, 7^e et 9^e. Il y a alors 362 880 classements différents possibles.

64 LOGIQUE Soit n un entier naturel, tel que $n \geq 2$. Soit E un ensemble à n éléments. Soit la proposition :

« si p est une permutation de E , alors p est un n -uplet ».

1. Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.
2. Énoncer sa réciproque, puis dire si celle-ci est vraie ou fausse, en justifiant.

65 ALGO PYTHON Compléter un algorithme

Soit E un ensemble à 8 éléments.

1. a. Calculer le nombre de 4-uplets d'éléments distincts de E .
- b. Combien y a-t-il de 10-uplets d'éléments distincts de E ? Justifier.

2. Soit k un entier naturel non nul. On considère l'algorithme incomplet ci-contre.

a. Recopier et compléter cet algorithme afin que la variable N contienne en fin d'algorithme le nombre de k -uplets d'éléments distincts de E .

b. Programmer cet algorithme en langage Python, en créant une fonction de paramètre k , et vérifier les résultats obtenus aux questions 1.a. et 1.b.

c. Modifier votre programme afin d'obtenir le nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments, où n est un entier naturel non nul.

```

Si .....
    alors  $N \leftarrow 0$ 
Sinon
     $N \leftarrow 1$ 
    Pour  $i$  allant de ... à ...
         $N \leftarrow \dots$ 
    Fin Pour
Fin Si
  
```

66 1. Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété : « $2^n \leq n!$ ».

a. La propriété $P(n)$ est-elle vraie pour $n = 0$? $n = 1$? $n = 2$? $n = 3$? $n = 4$? $n = 5$?

b. Conjecturer la valeur de l'entier n_0 à partir duquel $P(n)$ est vraie.

2. a. Soit p un entier naturel. Justifier que $(p+1)! = (p+1)p!$.

b. Démontrer alors que $P(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$, où n_0 est l'entier conjecturé à la question 1.b.

Combinaisons

67 1. Calculer $\frac{5!}{3! \times 2!}$.

2. Donner un coefficient binomial qui est égal à ce nombre.

68 1. À l'aide d'une formule du cours, vérifier que $\binom{7}{4} = 35$.

2. À l'aide de la même formule, calculer $\binom{7}{5}$.

69 **CALC** *Capacité 6, p. 19*

1. Calculer $\binom{9}{3}$. 2. Calculer $\binom{9}{4}$ puis $\binom{9}{5}$.

3. Calculer $\binom{6}{k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 6$.

4. Avec la calculatrice, calculer $\binom{15}{9}$.

70 **CALC** 1. Calculer $\binom{10}{3}$ puis $\binom{10}{7}$.

2. Vérifier les deux résultats précédents avec la calculatrice.

71 *Capacité 7, p. 19*

1. On dispose d'un jeu de 52 cartes, toutes différentes. Une « main » de 8 cartes est un ensemble de 8 cartes dont l'ordre n'importe pas.

Combien de « mains » de 8 cartes peut-on alors former ?

2. Pour l'anniversaire de Zoé, une plateforme de streaming lui offre 4 albums à choisir parmi une sélection qui en contient 9.

a. Combien de choix Zoé peut-elle réaliser ?

b. L'album qu'elle voulait est proposé dans les 9. Combien de choix comportant cet album peut-elle alors réaliser ?

72 1. En Première générale, un élève doit choisir trois spécialités parmi les douze proposées.

Combien de triplètes possibles y a-t-il ?

2. En Terminale, les élèves doivent garder deux des trois spécialités choisies en Première.

Combien de possibilités s'offrent alors à Corentin qui arrive en Terminale pour choisir ses spécialités ?

3. a. Un parcours est constitué d'une triplète de spécialités choisies en première et d'une doublette de ces spécialités conservées en terminale.

Justifier qu'il y a alors 660 parcours différents.

b. Coline a choisi les maths en Première et Terminale.

Combien de parcours correspondent à ce choix ?

73 1. Marylène possède 5 jeans et 7 T-shirts.

Elle part en vacances et décide d'emporter 2 jeans et 3 T-shirts.



a. Justifier que le nombre de possibilités qu'elle a pour choisir ses jeans et T-shirts est $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3}$.

b. Calculer ce nombre.

2. Son mari Dominique possède quant à lui 10 jeans, 13 T-shirts et 7 paires de chaussures. Il décide de partir avec 8 jeans, 10 T-shirts et 4 paires de chaussures.

Combien de manières a-t-il pour remplir sa valise ?

74 VRAI/FAUX

Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules au hasard. On considère les événements A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » et B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.
2. La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

75 Pour participer à un tirage de loto, Johan doit cocher 5 numéros parmi les 50 proposés puis 2 étoiles parmi 12.

1. a. Combien de possibilités a Johan pour cocher les 5 numéros ?
b. Combien de possibilités a-t-il pour choisir les 2 étoiles ?
c. En déduire le nombre de grilles différentes possibles.
2. Si Johan ne joue qu'une grille, vérifier que la probabilité de cocher les bons numéros et les bonnes étoiles est environ égale à 7×10^{-9} .



76 PYTHON Compléter et comprendre un programme

Tous les programmes ci-dessous sont écrits dans le langage Python.

1. On donne le programme incomplet ci-dessous. Le recopier et le compléter afin que la fonction factorielle retourne le nombre $n!$

```
1 def factorielle(n):
2     P=1
3     for i in range(...):
4         P=...
5     return(...)
```

2. Recopier et compléter le programme de la fonction facto_partielle ci-dessous qui permet de retourner le nombre $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$.

```
1 def facto_partielle(n,k):
2     P=1
3     for i in range(...):
4         P=i*P
5     return(...)
```

3. On considère le programme ci-dessous, qui fait appel aux fonctions factorielle et facto_partielle définies dans les programmes précédents.

```
13 def coefficient(n):
14     L=[]
15     for k in range(n+1):
16         c=facto_partielle(n,k)//factorielle(k)
17         L.append(c)
18     return(L)
```

- a. Programmer ces trois fonctions, puis tester la fonction coefficient sur plusieurs valeurs de n .
- b. Que retourne ce troisième programme ?

77 Une question ouverte

Lors d'une partie de Poker, les participants jouent avec un jeu de 52 cartes. Ces cartes sont réparties en quatre « couleurs » (pique, trèfle, carreau et cœur).

Pour chaque couleur, il y a 13 cartes de valeurs différentes (dix cartes sont numérotées de 1 à 10, un Valet, une Dame et un Roi). Un joueur tire simultanément 5 cartes.

Quelle est la probabilité d'avoir un full, c'est-à-dire d'avoir trois cartes de même valeur et deux cartes d'une autre valeur ? Arrondir le résultat à 10^{-4} .

Piste → Voir p. 466

Combinaisons et triangle de Pascal

- 78 1. À l'aide du triangle de Pascal, calculer les combinaisons suivantes : $\binom{8}{4}$ et $\binom{8}{5}$.

2. Quel coefficient du triangle peut-on alors calculer à l'aide de la relation de Pascal et en utilisant les deux coefficients de la question 1. ? Effectuer ce calcul.

79 Capacité 8, p. 21

- Calculer, à l'aide du triangle de Pascal, les combinaisons suivantes : $\binom{7}{3}$, $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{5}$.

80 CALC 1. À l'aide du triangle de Pascal, calculer $\binom{8}{6}$.

2. Vérifier le résultat en utilisant une formule du cours puis à l'aide de la calculatrice.

- 81 Lors d'un incendie, Christophe, chef des pompiers, doit créer une équipe de 4, 5 ou 6 soldats du feu pour entrer dans le bâtiment en flammes. Il dispose pour cela de 8 personnes.



1. Déterminer les coefficients $\binom{8}{4}$, $\binom{8}{5}$ et $\binom{8}{6}$. On pourra utiliser le triangle de Pascal.
2. En déduire le nombre d'équipes différentes que Christophe peut créer.

82 LOGIQUE ORAL Soit la proposition P :

« Si un coefficient du triangle de Pascal est le premier d'une ligne, alors ce coefficient est 1. »

1. Cette proposition P est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
2. Énoncer la réciproque de P est dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

- 83 1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 7 (c'est-à-dire jusqu'à $n = 6$).

2. Pour chaque ligne, additionner les nombres qui la composent. Que remarquez-vous concernant les résultats successifs ?
3. Quelle propriété du cours est alors illustrée ?

84 Voici l'égalité du binôme de Newton :

« Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel a et b ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. »$$

1. a. Déterminer tous les coefficients de la forme $\binom{8}{k}$, où k parcourt les entiers entre 0 et 8.

b. Soit x un réel. En déduire la forme développée de $(x+1)^8$.

2. Déterminer la forme développée de $(x+2)^5$.

LE SAVIEZ-VOUS

Ce résultat est démontré, page 24.

Dénombrements

85 Capacité 9, p. 21

On considère un gène qui contient deux allèles, éventuellement identiques.

Il y a au total 6 allèles différents, notés $A_1, A_2, \dots, A_6$.

- Combien de couples d'allèles sont possibles ?
- Déterminer le nombre de gènes qui contiennent les deux mêmes allèles.
- Déterminer le nombre de gènes qui contiennent des allèles différents, peu importe l'ordre de ces allèles.

LE SAVIEZ-VOUS

On dénombre environ 20 000 gènes chez l'homme qui codent une protéine.

MATHS & SVT

86 Des anneaux de couleurs différentes sont présentes sur les résistances. L'enchaînement des anneaux permet de déterminer la valeur en ohms de la résistance ainsi que la tolérance. Les deux premiers anneaux peuvent chacun être représentés par 10 couleurs différentes, le troisième par 9 couleurs différentes et le dernier par 4.

Combien de résistances différentes à 4 anneaux y a-t-il ?

MATHS & PHYSIQUE



MATHS & PROGRAMMATION

87 Le bit (ou élément binaire) est une unité qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

Un octet est un ensemble de 8 bits ordonnés. Autrement dit, un octet est un 8-uplet de l'ensemble $\{0;1\}$.

- Combien d'octets différents y a-t-il ?
- Combien d'octets commencent par 1 et finissent par 0 ?
- Combien d'octets contiennent exactement trois 1 ?
- Combien d'octets contiennent plus de 1 que de 0 ?

LE SAVIEZ-VOUS

Le mot « bit » est la contraction des deux mots anglais binary (binaire) et digit (chiffre). Il y a également un jeu de mots avec « bit » qui signifie « petit morceau ».

MÉTHODE À L'ORAL

88 Une urne est composée de 10 boules, numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher.

Pour chaque question, expliquer et justifier la méthode de dénombrement utilisée, puis le faire.

- On tire 5 boules avec remise et on note à chaque tirage le numéro obtenu. Combien de tirages différents y a-t-il ?
- On tire 5 boules sans remise et on note à chaque tirage le numéro obtenu. Combien de tirages différents y a-t-il ?
- On tire 5 boules simultanément. Combien de tirages différents y a-t-il ?

89 Capacité 10, p. 22

Une commune d'Espagne s'appelle ANANA. À l'aide d'un arbre, vérifier qu'il y a 10 anagrammes du mot ANANA. Autrement dit, vérifier qu'on peut former 10 mots avec les 5 lettres du mot ANANA.

90 Capacité 10, p. 22

Une ville comporte 2 000 adolescents âgés de 13 à 20 ans. 300 d'entre eux ont déjà assisté à un concert et à un match de football. Au total, 500 ont déjà assisté à un match de football et 450 ont déjà assisté à un concert.

- a. Combien d'adolescents de la commune ont assisté à un match de football mais pas à un concert ?
b. Combien n'ont assisté à aucune de ces activités ?
- De plus, 805 personnes de plus de 30 ans sont déjà allées au théâtre, 1 990 ont déjà assisté à un match de football et 1 440 sont déjà allées à un concert. On annonce aussi que 160 personnes ont déjà assisté aux trois activités, 235 sont allées au théâtre et à un match de football mais pas à un concert et 195 sont allées à un match et à un concert mais pas au théâtre. Enfin, 140 personnes ne sont allées qu'au théâtre et la commune compte 5 030 adultes de plus de 30 ans.
a. Déterminer le nombre d'adultes de plus de 30 ans qui n'ont assisté qu'à un concert.
b. Combien d'adultes de plus de 30 ans n'ont assisté à aucune de ces activités culturelles ?

91 Un sondage est fait auprès de 813 adolescents. L'objectif est de connaître leur artiste préférée entre Sia, Ariana Grande et Lady Gaga.

Parmi les 320 garçons, 140 préfèrent Lady Gaga et 62 préfèrent Sia. On dénombre 210 adolescents qui préfèrent Lady Gaga. Enfin, 175 adolescents qui préfèrent Sia sont des filles.

- Combien d'adolescents préfèrent Sia ?
- Combien de filles de cette étude préfèrent Ariana Grande ?
- Pour les questions suivantes, on donnera les valeurs exactes puis on donnera les résultats en pourcentage, arrondis à 0,01 %.
a. Quelle est la proportion de garçons préférant Ariana Grande ?
b. Parmi les adolescents préférant Lady Gaga, quelle est la proportion de filles ?

92 Dans une école d'ingénieur, les étudiants suivent les cours d'au moins une langue parmi l'anglais, l'espagnol et l'allemand.



Dans la promotion 2021, parmi les 110 étudiants qui ont choisi l'anglais, 53 n'ont pas pris d'autre langue, 29 ont choisi également l'allemand mais pas l'espagnol. 24 ont choisi l'anglais et l'espagnol (mais pas l'allemand). 47 étudiants n'ont choisi que l'espagnol. Ils sont 98 au total à avoir choisi l'espagnol et 76 à avoir choisi l'allemand.

1. Combien d'étudiants suivent les cours d'espagnol et d'allemand mais pas d'anglais ?
2. Combien d'étudiants composent la promotion ?

93 Lors d'une partie d'un jeu, les joueurs disposent de deux dés à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Pendant son tour, un joueur lance les deux dés et doit faire la somme des numéros qui sont sur les faces du dessus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 5 comme résultat ?
2. Si un joueur obtient le résultat qui a la plus grande probabilité d'être réalisé, alors ce joueur déplace un pion censé gêner les autres joueurs. Déterminer alors le résultat que doit obtenir un joueur pour gêner les autres.

94 On lance deux dés : un à 6 faces (numérotées de 1 à 6), et un dé à 4 faces (numérotées de 1 à 4). Après avoir lancé les deux dés, on réalise la différence du plus grand nombre obtenu par le plus petit. Par exemple, si on obtient « 2 » avec le dé à 6 faces et « 4 » avec le dé à 4 faces, alors le résultat obtenu est 4-2, soit 2.

Déterminer la probabilité de chaque issue de cette expérience aléatoire.

95 Pour rentrer dans un immeuble, il faut composer un code de 4 caractères. Sur le clavier, il y a 3 lettres (A, B, C) et les 10 chiffres.

1. Combien de codes différents y a-t-il ?
2. Les 4 caractères du code sont différents. Combien de codes sont alors possibles ?
3. Pour composer le code, on a seulement besoin des touches « A », « C » et « 5 ». Combien de codes sont alors possibles ?

96 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Au cours d'une réunion d'entreprise à laquelle participent 20 personnes, tout le monde serre la main aux autres personnes. Il y a alors 380 poignées de main.
2. Lors d'un match de football, les 22 joueurs titulaires serrent la main des joueurs de l'équipe adverse et celle des 3 arbitres. Mais les joueurs d'une même équipe ne se serrent pas la main. Il en est de même pour les arbitres entre eux. Il y a alors 187 poignées de main.

97 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Le nombre de parties composées de 4 éléments issus d'un ensemble qui en comporte 7 est égale à :
a. 105 b. $\frac{7!}{4!3!}$ c. $\binom{6}{4} + \binom{6}{5}$ d. $\binom{7}{3}$
2. Le nombre de numéros de téléphone portable à 10 chiffres commençant par 06 99 est égal à :
a. 60 b. 60 466 176 c. 10^6 d. $\binom{10}{6}$
3. Lors d'une course opposant 7 coureurs, le nombre de podiums différents est :
a. 7^3 b. $7 \times 6 \times 5$ c. $\binom{7}{3}$ d. $7!$
4. Un code de carte bleue est composé de 4 chiffres ordonnés. Florence ne se souvient plus exactement de son code. Elle sait qu'il y a un 5, un 3 et deux 1 qui ne sont pas consécutifs. Si elle tape au hasard son code, la probabilité qu'elle trouve le bon est :
a. $\frac{1}{4!}$ b. $\frac{1}{3^4}$ c. $\frac{1}{6}$ d. $\frac{1}{\binom{4}{3}}$

98 Une question ouverte

Jean-François dispose d'une pièce de 10 cts, de trois pièces de 5 cts, de huit pièces de 2 cts et de quinze pièces de 1 ct. Il veut s'acheter un pain au chocolat (ou chocolatine) à 15 cts. On ne distingue pas les pièces de même valeur. Ainsi, Jean-François n'a qu'une possibilité de payer avec une pièce de 10 cts et une pièce de 5 cts. De combien de manières différentes Jean-François peut-il alors payer son pain au chocolat (chocolatine) ?



Piste → Voir p. 466

Problème de synthèse

99 Chercher = Calculer

Une urne contient huit boules : cinq noires, numérotées de 1 à 5, et trois rouges, numérotées 6, 7 et 8. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait cinq boules successivement, avec remise. Déterminer :
a. le nombre total de tirages ;
b. le nombre de tirages tels que la première boule tirée est noire et la deuxième est rouge ;
c. le nombre de tirages tels que la première boule rouge tirée est en troisième position.
2. Reprendre la question 1. dans le cas où on extrait les sept boules de l'urne successivement et sans remise.
3. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « les deux boules tirées sont rouges » ;

B : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

Raisonnement par récurrence

Montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

(1) **Initialisation** : montrer que $P(n_0)$ est vraie.

(2) **Hérédité** : Soit p un entier tel que $p \geq n_0$ et $P(p)$ est vraie. Montrer que $P(p+1)$ est vraie.

(3) **Conclure** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

k -uplets de E

- Listes ordonnées de k éléments de E
- répétitions possibles
- n^k

k -uplets d'éléments distincts de E

- Listes ordonnées, sans répétition, de k éléments de E
- $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$

Dénombrement

E : ensemble à n éléments

F : ensemble à m éléments

$n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*$

Principe additif

Si E et F sont disjoints
alors $E \cup F$ a $n+m$
éléments.

Principe multiplicatif

$E \times F$ a $n \times m$ éléments.

Combinaisons de k éléments de E

- Parties de k éléments de E
- Sans ordre, sans répétition
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$
- $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Relation de Pascal

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & + & 1 & \\ & 1 & & 2 & + & 1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \end{array}$$

Permutations de E

- n uplets d'éléments distincts de E
- $n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

Faire le point avec des exercices corrigés

Démontrer par récurrence

* 100  20 min **Capacité 1, p. 13**

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 6$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 4u_n - 18$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 6$.

* 101  20 min **Capacité 1, p. 13**

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -5$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 3v_n + 8$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n \leq -4$.

* 102  20 min **Capacité 1, p. 13**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = 3u_n + 10n - 5$.
Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n - 5n$.

* 103  20 min **Capacité 1, p. 13**

Démontrer que pour tout entier naturel n , $4^n \geq 1 + 3n$.

Utiliser les principes additifs et multiplicatifs

* 104  10 min **Capacité 2, p. 15**

VRAI/FAUX

Dans une bibliothèque, il y a 5 livres de Victor Hugo, 7 livres de Honoré de Balzac et 6 livres d'Émile Zola.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Pauline choisit un livre. Elle a 35 possibilités pour choisir un livre de Hugo ou un livre de Balzac.

2. Pauline choisit un livre de Hugo, puis de Balzac, puis de Zola. Elle a 210 choix possibles.

Dénombrer les k -uplets et les combinaisons

* 105  10 min Capacité 3, p. 15

Pour consulter son compte en banque sur internet, Amine doit créer un code de 6 chiffres.

- Combien de possibilités a-t-il ?
- Après une mise à jour, la banque en ligne lui demande de changer de code : celui-ci ne peut pas contenir deux fois le même chiffre.

Combien de possibilités a alors Amine pour créer son nouveau code ?

* 106  15 min Capacités 3 et 5, pp. 15-17

La plaque d'immatriculation d'un véhicule est composée de deux lettres, suivies de trois chiffres (sauf 000), puis de deux lettres.

On exclut les lettres I, O, U car trop ressemblantes avec respectivement 1, 0 et V. On exclut également la série de lettres WW et SS à gauche, et la série SS à droite.

- Déterminer le nombre de plaques d'immatriculation différentes.
- Combien de plaques différentes y a-t-il lorsque les 4 lettres sont différentes et lorsque les 3 chiffres le sont également ?

* 107  5 min Capacité 4, p. 17

Après les prolongations d'un match de football, chaque équipe désigne 5 tireurs de pénaltys parmi les 11 joueurs. Sachant qu'il y a un ordre de passage, combien de choix différents a une équipe pour désigner ses 5 tireurs ordonnés ?

* 108  15 min Capacité 5, p. 17

- Avec toutes les lettres du mot BOITE :
 - combien de mots différents peut-on former ?
 - combien de mots terminant par E peut-on former ?
- Reprendre les deux questions précédentes si on forme des mots de trois lettres.

* 109  15 min Capacités 6, 7 et 8, p.p. 19-21

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

- Soit E un ensemble de 8 éléments. Alors le nombre de parties de E composées de 2 éléments est égal à :

- a. 2 b. $\binom{8}{2}$ c. $\binom{8}{6}$ d. 28

- Dix équipes de basketball participent à un tournoi. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Le nombre de matches à organiser est :

- a. 10 b. 10×9 c. $\binom{10}{2}$ d. 45

- Voici la sixième ligne du triangle de Pascal.

1	5	10	10	5	1
---	---	----	----	---	---

Sur la ligne suivante, le nombre situé dans la 4^e case en partant de la gauche est égal à :

- a. $\binom{6}{4}$ b. $\binom{7}{3}$ c. $\binom{6}{3}$ d. 20

* 110  5 min Capacité 7, p. 19

VRAI/FAUX

Un enseignant doit choisir 5 élèves de sa classe qui en contient 32 pour installer la salle de classe en îlots au début du cours prochain.

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Le nombre de possibilités qu'il a pour choisir les élèves est égale à $32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28$.

* 111  15 min Capacité 7, p. 19

Au « Swiss Loto », un joueur doit choisir 6 numéros parmi les 42 numéros de la première grille, puis un des 6 numéros « chance » qui composent la deuxième grille.

- Combien de grilles différentes peut-on remplir ?
- Combien de grilles contiennent exactement trois numéros gagnants mais pas le bon numéro « chance » ?
- Calculer la probabilité qu'une personne qui remplit six grilles trouve parmi elles la grille gagnante. Donner la valeur exacte, puis le résultat en écriture scientifique, avec un chiffre après la virgule.

* 112  20 min Capacité 7, p. 19

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 « couleurs » différentes (trèfle, pique, cœur et carreau).

Pour chaque couleur, il y a 8 « valeurs » différentes (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As).

On tire 6 cartes simultanément.

- Combien y a-t-il de tirages différents ?
- Combien de tirages différents contiennent les 4 As ?
- On exprimera les probabilités en pourcentage, arrondies à 0,01%.
 - Déterminer la probabilité d'avoir les 4 As lors d'un tirage.
 - Déterminer la probabilité d'avoir 2 cartes pique et 4 cartes cœur.
 - Déterminer la probabilité de n'avoir aucune carte cœur et aucune carte Valet.

Utiliser une représentation adaptée

* 113  10 min Capacité 10, p. 22

Pour entrer dans un immeuble, on doit composer un code à 5 chiffres. Dans ce code, il y a deux chiffres 1, deux chiffres 3 et un chiffre 7.

- Combien de codes différents peut-on créer ?
- Combien de codes commencent par 1 et terminent par 3 ?

* 114  15 min Capacité 10, p. 22

Dans une classe de première de 35 élèves, 22 élèves ont choisi les Mathématiques comme spécialité.

Parmi eux, 8 ont également choisi SVT et Physique-Chimie (PC), 6 ont choisi PC mais pas SVT et 5 n'ont choisi aucune de ces deux spécialités. 2 élèves ont choisi SVT et PC mais pas Mathématiques. Au total, 17 ont choisi SVT et 19 ont choisi PC. Combien d'élèves de la classe n'ont choisi aucune de ces trois spécialités ?

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Mener un raisonnement par récurrence

■ **Un exemple :** Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 7$ et par la relation $u_{n+1} = 2u_n - 4$ pour tout entier naturel n . Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Comment commencer ?	Je dois identifier la propriété $P(n)$ à démontrer. ► Préciser la propriété à démontrer pour tout entier naturel n .
Comment justifier que la propriété est initialisée ?	On identifie le rang à partir duquel la propriété est établie et il faut montrer que la propriété est vraie pour ce premier rang. ► Calculer $3 \times 2^0 + 4$ et comparer avec la valeur de u_0 donnée.
Que dois-je faire pour montrer que la propriété est héréditaire ?	Il faut montrer que lorsque la propriété $P(p)$ est vraie pour un entier p quelconque, alors elle est vraie pour l'entier $p + 1$. ► Écrire l'hypothèse de récurrence et justifier que la propriété $P(p + 1)$ à montrer s'écrit : $u_{p+1} = 3 \times 2^{p+1} + 4$.
Comment terminer ?	Il faut exploiter l'hypothèse de récurrence. ► Exprimer u_{p+1} en fonction de u_p et utiliser la propriété explicitée dans l'hypothèse de récurrence. Finir les calculs et conclure.

115 Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$. Démontrer que $u_n = 2 \times 5^n + 1$ pour tout entier naturel n .

116 Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel non nul n , par $v_1 = 4$ et $v_{n+1} = 3v_n - 2n + 1$. Démontrer que $v_n = 3^n + n$ pour tout entier naturel non nul n .

PARCOURS 2 Effectuer des dénombrements simples

■ **Un exemple :** Au cours d'une partie d'un jeu de société de « *deckbuilding* », un joueur tire trois cartes dans un paquet composé de 28 cartes, toutes différentes. On appelle « main » de 3 cartes un ensemble de 3 cartes issues de ce jeu. Combien de « mains » différentes de 3 cartes peut-on avoir avec ce jeu ?

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on ?	Je dois déterminer le nombre d'ensembles de 3 cartes prises dans un ensemble E . ► Identifier l'ensemble E dans lequel on choisit ces cartes.
Comment continuer ?	Je détermine la nature de ce qu'il me faut dénombrer : des k -uplets, des k -uplets d'éléments distincts ou des combinaisons de k éléments ? ► L'ordre des cartes a-t-il de l'importance ? Une « main » peut-elle contenir deux fois la même carte ? Justifier que l'on doit utiliser des combinaisons.
Comment poursuivre ?	Je dois utiliser une formule du cours qui permet de dénombrer les parties de trois éléments de l'ensemble E , composé de 28 éléments. ► Écrire la formule du cours adéquate.
Comment terminer ?	J'applique la formule avec $n = 28$ et $k = 3$ et je calcule. ► Effectuer ce calcul, puis conclure.

117 La chaîne de télévision qui diffuse un match de football pose une question aux téléspectateurs. On tire au sort deux gagnants parmi les 5 000 participants qui ont donné la bonne réponse. Combien de binômes gagnants peut-on réaliser ?

118 Une urne est composée de 6 boules bleues numérotées de 1 à 6, 4 boules blanches numérotées de 7 à 10 et 1 boule rouge numérotée 11. On tire simultanément 4 boules de l'urne. Combien de tirages de 4 boules bleues peut-on réaliser ?

PARCOURS 3 Dénombrer à l'aide de combinaisons avec répétition

119 Chercher en autonomie

Soit E un ensemble à n éléments. Soit k un entier naturel.

On appelle **combinaison de k éléments de E avec répétition** un ensemble composé de k éléments de E qui peuvent se répéter.

On note Γ_n^k le nombre de combinaisons de k éléments de E .

Partie A : un exemple avec $n = 4$

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble de 4 éléments.

1. Lister les combinaisons de 2 éléments de E avec répétitions et vérifier que $\Gamma_4^2 = 10$.

2. Vérifier que $\Gamma_4^3 = 20$.

3. On souhaite montrer que pour tout entier naturel k , $\Gamma_4^k = \binom{3+k}{k}$.
Vérifier que cette formule est valable pour $k = 2$ et $k = 3$.

4. **Démonstration** : soit k un entier naturel.

On écrit les combinaisons de k éléments de E avec répétitions dans l'ordre alphabétique.

Par exemple, la combinaison $\{b, b, a, d, a\}$ est écrite $\{a, a, b, b, d\}$.

Pour chaque combinaison, on remplace une lettre par un point et on sépare les lettres différentes par une barre verticale. Si une lettre n'apparaît pas dans la combinaison, on n'écrit pas de point donc il y a deux barres consécutives. Par exemple, la combinaison $\{a, a, b, b, d\}$ est codée par « $\cdot \cdot | \cdot | \cdot$ ».

On admet que chaque combinaison avec répétition est codée de manière unique.

a. Donner le code associé à la combinaison avec répétitions $\{a, c, b, c, d, a, d, b\}$.

b. Quelle combinaison avec répétitions est codée par « $\cdot \cdot | \cdot | \cdot$ » ?

c. Lorsqu'on code une combinaison de k éléments, il y a donc k points et 3 barres verticales.

d. En considérant un ensemble bien choisi, justifier alors que $\Gamma_4^k = \binom{3+k}{3}$.

Partie B : cas général

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k , $\Gamma_n^k = \binom{n-1+k}{k}$.

Piste : S'inspirer du raisonnement fait à la question A.4.

Applications

120 Un domino est une pièce de jeu rectangulaire dont la face supérieure est séparée en deux parties de même taille. Chacune est composée soit d'un espace blanc, soit d'un ensemble de points (entre 1 et 6 points, comme pour un dé à 6 faces classique).

Justifier que l'on peut alors créer 28 dominos différents.



121 Un triomino est une pièce de jeu triangulaire sur laquelle on écrit un chiffre entre 0 et 5 dans chaque coin. Un triomino est donc composé de trois chiffres. On peut écrire plusieurs fois le même chiffre. Combien de triominos différents peut-on alors créer ?

122 On dispose d'un dé à 6 faces. Sur chaque face, on écrit un chiffre entre 0 et 9. On peut écrire le même chiffre sur plusieurs faces différentes. Deux dés sont dits différents si les deux ensembles des chiffres qui les composent (en comptant les répétitions) sont différents.

Combien de dés différents peut-on alors créer ?

123 Divisibilité

On rappelle que si m et n sont des entiers naturels, alors m divise n si, et seulement si, il existe un entier naturel k tel que $n = km$. Démontrer que pour tout entier naturel n :

1. 6 divise $7^n - 1$;
2. 9 divise $4^n + 15n - 1$.

124 Suite de Fibonacci et récurrence double

On considère la suite de Fibonacci (u_n) définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$:

$$\ll u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \gg.$$

Le but est de démontrer cette propriété.

1. Montrer que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
2. Expliquer pourquoi une récurrence classique ne suffit pas pour montrer le résultat.
3. On pose désormais, pour tout entier naturel n , $P(n)$:

$$\ll u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \gg.$$

Montrer que cette propriété est héréditaire et conclure sur la formule de la suite (u_n) .

125 Relation entre coefficients binomiaux

Soit p, q et n des entiers naturels tels que $q \leq p \leq n$.

Démontrer que $\binom{n}{p} = \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} \times \binom{n-q}{p-j}$.

Piste : Introduire un ensemble E à n éléments et un ensemble F composé de q éléments de E .

126 RAISONNER = CALCULER

Identité de Vandermonde

Soit n et m deux entiers naturels non nuls.

Soit E un ensemble à n éléments et soit F un ensemble à m éléments, tels que E et F sont disjoints.

Démontrer que pour tout entier r tel que $0 \leq r \leq n+m$,

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}.$$

127 Parties spécifiques d'un ensemble

Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble à n éléments. Soit p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$ et soit A une partie de E à p éléments.

Quel est le nombre de parties de E qui contiennent exactement un et un seul élément de A ?

Piste : Noter F la partie de E composé des éléments qui ne sont pas dans A . Utiliser le principe multiplicatif.

128 CHERCHER RAISONNER

Codes colorés

Au cours d'une partie de Mastermind, un joueur doit créer un code de 5 pions de couleurs, dont l'ordre est important. Ce code est secret et doit être trouvé par un deuxième joueur.

Pour cela, ce dernier propose un code. Le premier joueur donne alors le nombre de pions bien placés (sans dire lesquels) et le nombre de pions qui sont mal placés mais pour lesquels la couleur est présente dans le code.

Par exemple, si le code est bleu-bleu-rouge-rouge-rouge, et que le deuxième joueur propose bleu-rouge-vert-vert-rouge, alors le premier joueur informera que deux pions sont bien placés (le bleu et le dernier rouge) et qu'un est mal placé (le rouge en position 2).

Au cours d'une partie, Carine doit deviner le code de Camille. Elle propose bleu-bleu-vert-vert-rouge. Camille lui annonce qu'il y a bien deux pions bleus, deux verts et un rouge, mais aucun n'est bien placé.

Déterminer le nombre de codes que Camille a pu choisir.



129 Pandémie

Au cours d'une partie du jeu *Pandémie*, 4 joueurs collaborent pour sauver l'humanité de 4 maladies. Les joueurs doivent choisir 4 personnages parmi les 7 proposés pour former une équipe.

1. a. Combien de possibilités ont les joueurs pour former cette équipe ?

b. L'équipe alors formée, chaque joueur doit choisir un personnage de cette équipe.

Combien de possibilités ont les joueurs pour se répartir ces personnages ?

2. Après avoir attribué un personnage à chaque joueur, on doit tirer 9 cartes villes. Le jeu en contient 48 (une par ville). On appelle « Zone contaminée » un ensemble composé des 9 villes tirées.

a. Combien de « Zones contaminées » différentes y a-t-il ?

b. En réalité, les 3 premières cartes tirées subissent un niveau de contamination de niveau 3 ; les 3 suivantes de niveau 2 et les 3 dernières de niveau 1.

En distinguant les villes contaminées de niveaux différents, combien de « Zones contaminées » différentes y a-t-il ?

3. Pendant son tour, un joueur doit réaliser 4 actions ordonnées. Les actions possibles sont numérotées de 1 à 3. Entre deux actions 3, il faut au minimum une action 2. Par exemple, la liste (3,1,2,3) correspond à un enchaînement d'actions possible, mais pas la liste (2,3,1,3) ni la liste (1,3,3,2).

a. Dans cette question uniquement, on suppose que le joueur commence son tour par l'action 1.

Combien d'enchaînements d'actions sont alors possibles ?

b. Déterminer le nombre de possibilités qu'a le joueur pour composer son tour de jeu.

130 Tirages dans deux urnes

Une urne A contient 6 boules bleues et 3 boules rouges. Une urne B contient 4 boules bleues et 4 boules rouges. Les boules

sont indiscernables au toucher. Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire deux boules simultanément dans chacune des deux urnes. Calculer la probabilité de tirer :

a. 4 boules rouges ; b. 2 boules rouges et 2 boules bleues.

2. On tire cette fois 2 boules de l'urne A successivement et sans remise, puis 2 boules de l'urne B successivement et sans remise. Vérifier que la probabilité de tirer 4 boules rouges est égale à la réponse donnée à la question 1.a.

131 ALGO PYTHON Paradoxe des anniversaires

On considère qu'il y a 365 jours dans une année.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes dans un groupe de 23 personnes qui aient la même date d'anniversaire. On arrondira le résultat à 0,01.

2. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit p_k la probabilité que, dans un groupe composé de k personnes, au moins 2 personnes aient la même date d'anniversaire.

Justifier que $p_k = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (366 - k)}{365^k}$.

3. Recopier et compléter la fonction pk dont on donne le script ci-contre en Python afin qu'il retourne la probabilité p_k pour une valeur de k donnée.

```
1 def pk(k):
2     N=1
3     for i in range(...):
4         N=...
5     return(1-N/365**k)
```

4. On donne ci-contre le script de la fonction anniversaire, qui fait appel à la fonction pk .

```
7 def anniversaire(p):
8     k=2
9     while pk(k)<p:
10         k=k+1
11     return(k)
```

a. Que retourne l'appel anniversaire(0.005) ?

b. Quel est le rôle de cette fonction ?

c. Programmer ces deux fonctions. Interpréter le résultat retourné par l'appel anniversaire(0.9).

LE SAVIEZ-VOUS

Dans le groupe des 23 joueurs de l'Équipe de France de football à l'Euro 2016, Dimitri Payet et N'Golo Kanté avaient la même date d'anniversaire.

132 RAISONNER CALCULER

Le bal masqué

Soit n un entier naturel non nul. Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble à n éléments. On appelle élément invariant d'une

permutation un élément de E qui ne change pas de place dans l'ordre d'écriture. Par exemple, si $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, alors la permutation (e_2, e_1, e_3) laisse l'élément e_3 invariant.

Ainsi, on appelle **dérangement** de E toute permutation de E qui ne laisse aucun élément invariant. Par exemple, (e_2, e_3, e_1) est un dérangement de $\{e_1, e_2, e_3\}$.

On note D_n le nombre de dérangements de E , avec la convention $D_0 = 1$.

1. Justifier que $D_1 = 0$.

2. Pour $n = 2$, lister les dérangements de E . En déduire D_2 .

3. a. Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$. Justifier qu'il y a $\binom{n}{k} D_{n-k}$ permutations laissant k éléments invariants.

b. En déduire la formule : $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k}$.

4. Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. On sépare les hommes et les femmes. On change leur tenue et on les masque, si bien qu'ils sont indiscernables. Chaque femme choisit alors aléatoirement un homme pour danser. Si elle choisit l'homme avec lequel elle est venue au bal, on parle de couple légitime.

On donnera les valeurs exactes des probabilités et une valeur approchée à 0,01.

Quelle est la probabilité qu'aucun couple ne soit légitime ? Et qu'un seul couple légitime se forme ? Et que plus de la moitié des couples soient illégitimes ?

Piste 3. b. : Écrire l'ensemble des permutations de E comme réunion disjointe d'ensembles composés de dérangements.

TRAVAIL EN GROUPE

133 La méthode des grilles tournantes est une méthode de cryptographie, rendue populaire par le colonel Fleissner.

1. Faire un exposé sur les grilles de Fleissner, en donnant un exemple de grille et un message codé par cette grille.

2. En expliquant la démarche, dénombrer les grilles de Fleissner départagées en 36 petits carrés, dont 9 sont découpés.

Prise d'initiatives

134 En 2019, la France compte 67 millions d'habitants. 94 % des personnes ont un téléphone portable. On rappelle qu'il y a 4 groupes sanguins. Guillaume affirme qu'au moins 5 Français ont le même groupe sanguin, la même date d'anniversaire et le même code PIN (numéro de sécurité de 4 chiffres). A-t-il raison ? Justifier.

135 Dans une classe de 34 élèves, 22 pratiquent un sport, 14 font du théâtre et 18 font de la musique. Aucun élève ne fait ces trois activités et 7 élèves ne font aucune de ces activités. Combien d'élèves font du sport et de la musique ?

136 Florent joue au Poker. Il reçoit une main de 5 cartes issues d'un jeu de 52 cartes. Il y a 4 couleurs (trèfle, carreau, pique, cœur) et pour chacune, il y a 13 valeurs différentes (de 1 à 10, puis Valet, Dame, Roi). Exprimer les probabilités demandées en pourcentage arrondie à 0,1 %.

1. Quelle est la probabilité que Florent ait une double paire (2 cartes de même valeur, 2 cartes d'une autre même valeur et une cinquième carte de valeur différentes des autres) ?

2. Quelle est la probabilité que Florent ait un brelan (trois cartes de même valeur, puis deux cartes de valeurs différentes entre elles et différentes des trois autres cartes) ?

TP1 Tirage aléatoire d'une permutation



Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

A Exemple

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

- Combien y a-t-il de permutations de E ? Les lister.
- On considère le programme ci-contre.
 - Exécuter ce programme deux fois et vérifier qu'il retourne à chaque fois une permutation listée à la question 1.
 - Expliquer le rôle des instructions des lignes 7, 8 et 9.
 - Si on supprime la ligne 9, que retourne de manière générale ce programme ?

```

1 from random import randint
2 def gen_perm():
3     E=[1,2,3]
4     P=[]
5     for i in range(3):
6         r=len(E)
7         j=randint(0,r-1)
8         P.append(E[j])
9         E.pop(j)
10    return(P)

```

B Cas général

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \{1, 2, \dots, n\}$.On souhaite modifier la fonction `gen_perm` en lui donnant un paramètre n afin qu'elle retourne une permutation aléatoire de E .

- Quelles instructions peut-on alors écrire pour remplacer les lignes 3 et 5 du programme de la partie A ? Effectuer ces modifications et tester la fonction obtenue avec différentes valeurs de n .
- Modifier cette fonction pour qu'elle retourne un k -uplet d'éléments distincts de E , k étant un paramètre de cette nouvelle fonction.
- Modifier la dernière fonction obtenue afin qu'elle retourne un k -uplet de E .

TP2 Génération des parties de 2 et 3 éléments d'un ensemble



Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.frSoit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Déterminer le nombre de parties composées de 2 éléments de E .
 - Lister les parties de 2 éléments de E , en écrivant les éléments de chaque partie dans l'ordre croissant.
- On considère la fonction ci-contre.
 - Expliquer le rôle de la fonction `gen_parties`.
 - Exécuter ce programme avec $n = 4$ et vérifier que le nombre de listes affichées est égal au nombre donné à la question 1.a.
- Modifier la fonction `gen_parties` afin qu'elle génère toutes les parties de 3 éléments de E .
 - Exécuter ce nouveau programme avec $n = 4$, puis $n = 5$.

```

1 def gen_parties(n):
2     L=[]
3     for i in range(1,n):
4         for j in range(i+1,n+1):
5             L.append([i,j])
6     return(L)

```

TP3 Génération du triangle de Pascal



On souhaite obtenir le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 13.

- Remplir la première ligne du triangle de Pascal en saisissant 1 dans la cellule A1 puis 0 dans la plage de cellules B1:M1.
 - Étendre la valeur saisie en A1 sur la plage de cellules A2:A13.

	A	B	C
1	1	0	0
2	1		
3	1		

- Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B2 pour obtenir, par recopie vers la droite, la deuxième ligne du triangle de Pascal ? Obtenir ainsi la plage de cellules B2:M2.
 - Sélectionner la plage de cellules B2:M2 et recopier vers le bas afin d'obtenir le triangle de Pascal voulu.
- Dans cette question, on cherche à améliorer le tableau en vidant les cellules qui contiennent un 0.

- Rendre la plage de cellules B1:M13 vide.

On cherche une formule à saisir dans la cellule B2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite et le bas, le triangle de Pascal sans 0.

- On distingue trois cas pour remplir une cellule :

- La cellule C2 doit être vide. Les cellules C1 et B1 le sont-elles ?
- La cellule B2 doit contenir un 1. Que contiennent les cellules B1 et A1 ?
- Le contenu de la cellule B3 est obtenu comme somme des contenus des cellules A2 et B2. Ces cellules doivent-elles être vides ?

- Dans la cellule B2, saisir alors la formule suivante : `=SI(ET(A1="";B1=""),";",SI(B1="";1;A1+B1))`.

Obtenir alors, par recopie vers la droite et le bas, le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 13.

Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 88, 133

Question

Comment les mathématiques permettent-elles de modéliser les jeux de hasard ?

Enjeu de la question

Les mathématiques permettent de dénombrer les résultats d'un jeu de hasard afin d'en obtenir les probabilités. On peut ainsi élaborer des stratégies afin d'optimiser les gains.



Plan possible

1. Le loto
2. La roulette
3. Le tiercé et le quinté +
4. Conclusion : comparaison de ces jeux

Les mots-clés

Dénombrement • Expérience aléatoire • Probabilités

Support de présentation possible

- **Grille de loto** : on choisit 5 numéros parmi 49 numéros possibles de 1 à 49 et un numéro « chance » parmi 10 numéros, de 1 à 10.
- **Roulette** : 37 cases, numérotées de 1 à 36 et une case vide (ou marquée 0). On peut choisir un ou plusieurs numéros ou des combinaisons de ceux-ci : pair, impair, passe, manque...
- **Tiercé** : choix de 3 chevaux par leurs numéros. On peut gagner si on trouve les 3 premiers chevaux dans l'ordre, ou bien dans le désordre.
- **Taux de redistribution aux joueurs** : moyenne exprimée en pourcentage du reversement des organisateurs aux joueurs.
- **Nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments** : $n(n-1) \dots (n-k+1)$.
- **Combinaisons de k éléments pris parmi n éléments** :
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots \times 2 \times 1}.$$

Questions d'approfondissement possibles

Quelle est la probabilité pour un parieur jouant au hasard de gagner le quinté + dans l'ordre s'il y a 25 chevaux au départ ?

Démontrer la formule donnant le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments.

Quels sont les jeux ayant les meilleurs taux de restitution ?

Présenter, en le justifiant, le triangle de Pascal.

Poursuite d'études et projet professionnel

• Pourquoi étudier le dénombrement ?

Ce domaine des mathématiques permet de modéliser certains phénomènes aléatoires. Il est utilisé dans la théorie des jeux, dans l'étude des risques...

• Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'analyse combinatoire est étudiée dans les classes préparatoires et à l'Université.

• Un exemple de métier ?

L'**actuaire** gère les risques dans divers domaines, comme celui des assurances. Il (elle) réalise des études économiques, financières et statistiques, établit des modèles probabilistes, dans le but de mettre au point ou de modifier des contrats d'assurance. Il (elle) travaille sur des processus qui permettent de modéliser des systèmes dont le comportement n'est que partiellement prévisible.

Cette page fait le point sur les capacités relatives à l'algorithmique et à la programmation, liées à ce chapitre, qui peuvent être posées au Bac.

UN EXEMPLE

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments.

k est un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.

On considère les programmes ci-contre, écrits en langage Python.

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

```

1 def nb_kuplets(n,k):
2     return(...)
3
4 def fac(n):
5     P=1
6     for i in range(1,n+1):
7         P=i*P
8     return(P)
9
10 def nb_kued(n,k):
11     P=1
12     for i in range(n-k+1,n+1):
13         P=i*P
14     return(P)
15
16 def nb_comb(n,k):
17     return(nb_kued(n,k)/fac(k))

```

LES QUESTIONS QUI PEUVENT ÊTRE POSÉES LE JOUR DU BAC

RÉPONSES

Compléter un programme

1. Compléter la ligne 2 du programme afin que la fonction `nb_kuplets` retourne le nombre de k -uplets de E .

1. Le nombre de k -uplets de E , constitué de n éléments, est n^k . Ainsi, à la ligne 2, il faut saisir `return(n**k)`.

Exécuter un programme

2. a. Quel résultat est retourné après l'appel `fac(4)` ?
b. Quel résultat est retourné après l'appel `nb_kued(6,4)` ?
c. L'appel `nb_comb(6,4)` retourne 15. Expliquer pourquoi.

2. a. Si on saisit `fac(4)`, alors i est un entier qui varie de 1 à 4. On peut obtenir les valeurs successives de la variable P à l'aide du tableau ci-dessous.

i		1	2	3	4
P	1	$1 \times 1 = 1$	$2 \times 1 = 2$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 6 = 24$

Donc l'appel `fac(4)` retourne 24.

b. Si on saisit `nb_kued(6,4)`, alors $n - k + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$. Donc i est un entier qui varie de 3 à 6. D'après le tableau ci-dessous, l'appel `nb_kued(6,4)` retourne 36.

i		3	4	5	6
P	1	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 12 = 60$	$6 \times 60 = 360$

c. Si on saisit `nb_comb(6,4)`, alors la fonction retourne `nb_kued(6,4)/fac(4)` soit $\frac{360}{24}$ d'après la question précédente, soit 15.

Comprendre un programme

3. a. Quel est le rôle de la fonction `fac` ?
b. Que représente l'entier retourné par la fonction `nb_kued` ?
c. Que représente l'entier retourné par la fonction `nb_comb` ?

3. a. La fonction `fac` retourne le produit $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. Donc il permet d'obtenir le nombre « factorielle n ».

b. La fonction `nb_kued` retourne le produit $(n - k + 1) \times (n - k + 2) \times \dots \times n$. Or, ce nombre correspond au nombre de k -uplets d'éléments distincts de E . Donc la fonction `nb_kued` retourne le nombre de k -uplets d'éléments distincts de E .

c. La fonction `nb_comb` retourne l'entier $\frac{(n - k + 1) \times (n - k + 2) \times \dots \times n}{k!}$.

Or, ce nombre correspond au nombre de combinaisons de k éléments de E . Donc la fonction `nb_comb` retourne le nombre de combinaisons de k éléments de E .

Modifier un programme

4. Modifier la fonction `nb_comb` en une fonction `somme` qui retourne la somme des coefficients de la forme $\binom{n}{i}$, où i parcourt les entiers de 0 à n .

4. Soit i un entier entre 0 et n . Le nombre $\binom{n}{i}$ est égal à : $\frac{(n - i + 1) \times (n - i + 2) \times \dots \times n}{i!}$. Ce nombre peut être obtenu avec `nb_kued(n,i)/fac(i)`. Il faut alors faire la somme de ces nombres pour i allant de 0 à n .

```

16 def somme(n):
17     S=0
18     for i in range(n+1):
19         S=S+nb_kued(n,i)/fac(i)
20     return(S)

```


PYTHON

ÉNONCÉ

RAISONNER

CALCULER

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

THÈMES

- Permutations et combinaisons
- Probabilités
- Programmation

Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6.

1. On tire successivement six boules de l'urne, sans remise.

a. Combien y a-t-il de tirages au total ?

b. Combien y a-t-il de tirages tels que la troisième boule tirée porte le numéro 2 ?

2. Une boîte comporte six compartiments, numérotés de 1 à 6. On place les six boules, au hasard, une par compartiment. On dit qu'une boule est dans son compartiment si elle est placée dans celui qui porte le même numéro qu'elle. Quelle est alors la probabilité pour que quatre boules exactement soient chacune dans son compartiment ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

3. Soit k un entier naturel non nul. On effectue k tirages successifs d'une boule avec remise. Les tirages sont supposés équiprobables.

a. Déterminer la probabilité p_k de tirer au moins une fois la boule qui porte le numéro 6.

b. Recopier et compléter le programme ci-contre écrit en langage Python afin qu'il retourne le premier entier k tel que $p_k > 0,9$.

```
1 def nombre_tirages():
2     k=1
3     p=1-(5/6)**k
4     while ...:
5         k=...
6         p=...
7     return(...)
```

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ
ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. a. Les boules sont tirées successivement, donc il y a un ordre. On ne remet pas les boules tirées, donc il n'y a pas de répétition.

b. On n'a pas de choix pour la troisième boule tirée.

Capacité 5, p. 17

2. Commencer par dénombrer les manières de placer les six boules : il n'y a pas de répétition mais on peut ordonner. Ensuite, dénombrer les manières de placer quatre boules dans leurs compartiments ne nécessite pas d'ordre et on ne peut pas choisir plusieurs fois la même boule : on dénombre alors des combinaisons.

Capacité 7, p. 19

3. a. Déterminer d'abord la probabilité de l'événement contraire.

Capacité 3, p. 15

b. Le programme doit calculer p_k avec k un entier qui augmente de 1 en 1 tant que le résultat est inférieur ou égal à 0,9. Il doit retourner l'entier k lorsque la probabilité p_k est supérieure à 0,9.

SOLUTION COMMENTÉE

1. a. On tire les six boules, sans remise. On doit dénombrer les permutations d'un ensemble à 6 éléments : il y en a 6!.

Donc il y a ici 720 tirages différents.

b. La troisième boule tirée est celle portant le numéro 2. Donc pour la première boule tirée, il reste 5 possibilités, puis 4 pour la deuxième, etc. Le nombre de tirages tels que la troisième boule tirée porte le numéro 2 est égal au nombre de tirages de cinq boules, soit 5!. Il y a donc 120 tirages tels que la troisième boule tirée porte le numéro 2.

2. On place chaque boule dans un compartiment différent. Donc il y a 6!, soit 720, manières de ranger les boules dans les compartiments. Ensuite, dénombrer les manières de placer quatre boules dans son compartiment revient à dénombrer les manières de choisir 4 boules, de les placer dans leurs compartiments, puis de placer les deux autres boules dans le compartiment n'ayant pas le même numéro. Il y a ainsi

$\binom{6}{4}$ manières de placer quatre boules dans leur compartiment. Pour les deux boules

restantes, on n'a pas le choix : il faut les placer chacune dans le compartiment de

l'autre. Or $\binom{6}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2} = 15$. Donc la probabilité de placer

exactement 4 boules dans leurs compartiments est $\frac{15}{720}$, soit $\frac{1}{48}$.

3. a. Dénombrer les tirages différents revient à dénombrer les k -uplets d'un ensemble à 6 éléments : il y a donc 6^k tirages différents. De plus, il y a 5^k possibilités pour ne pas tirer la boule numérotée 6. Donc la probabilité de ne pas tirer la boule qui porte le numéro 6 lors des k tirages est $\frac{5^k}{6^k}$, soit $\left(\frac{5}{6}\right)^k$. Ainsi, $p_k = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$.

b. La première probabilité calculée est p_1 . Tant que p_k est inférieure ou égale à 0,9, le programme doit calculer p_{k+1} . Ainsi, on affecte la valeur $k+1$ à k et on demande au programme de calculer le terme suivant de la suite (p_n) . Dès que le programme sort de la boucle, c'est-à-dire dès que $p_k > 0,9$, la fonction retourne l'entier k .

```
1 def nombre_tirages():
2     k=1
3     p=1-(5/6)**k
4     while p<=0.9:
5         k=k+1
6         p=1-(5/6)**k
7     return(k)
```


Sujet A ⌚ 60 min ⚙️ RASONNER = CALCULER

THÈME • Raisonement par récurrence

CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE

Questions 1. et 3. b. ► Capacité 1 p. 13

Soit a un nombre réel fixé non nul.Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1).$$

1. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $u_n \leq 0$.

2. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :

$$g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1).$$

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante d'après la question précédente, on peut affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n \geq g(a).$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

Sujet B ⌚ 40 min

⚙️ RASONNER = CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL

THÈMES • Dénombrement de k -uplets

• Dénombrement de combinaisons

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacité 7 p. 19

Question 2. ► Capacité 8 p. 21

Question 3. ► Capacité 3 p. 15

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

1. On tire simultanément 3 jetons de ce sac.

Combien de tirages différents y a-t-il :

a. au total ?

b. avec 3 jetons blancs ?

c. avec exactement 2 jetons blancs ?

d. avec uniquement des numéros impairs ?

2. Asma sait qu'il y a 35 manières de choisir simultanément 4 jetons blancs et 21 manières de choisir simultanément 5 jetons blancs.

Elle en déduit que si elle avait 8 jetons blancs, elle aurait

35 + 21, soit 56 manières différentes d'en choisir 5 simultanément. A-t-elle raison ? Justifier.

3. Reprendre la question 1. dans le cas où on tire les 3 jetons successivement et avec remise.

4. Pascal tire un jeton du sac : c'est le jeton noir numéroté 2. Il ne le remet pas et doit tirer à nouveau deux jetons successivement et sans remise.

Combien de tirages possibles y a-t-il ?

Sujet C ⌚ 50 min

PYTHON

REPRÉSENTER

RAISONNER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Raisonement par récurrence

• Dénombrement de k -uplets et de permutations

• Algorithmique et programmation

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacité 3 p. 15

Question 2. ► Capacité 5 p. 17

Question 4. ► Capacité 1 p. 13

Soit n un entier naturel non nul.

On dispose de n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n . On les place au hasard dans un casier contenant n emplacements.

Chaque emplacement peut contenir 0 à n boules.

1. Déterminer le nombre de rangements possibles de ces n boules.

2. On note P_n la probabilité que chaque case contienne une seule boule.

a. Justifier que $P_1 = 1$ et que $P_2 = 0,5$.

b. Justifier que $P_n = \frac{n!}{n^n}$.

c. Si on a 5 boules et 5 cases, quelle est la probabilité que chacune des cases ne contienne qu'une seule boule ? Arrondir au centième.

3. On considère le programme ci-dessous écrit en Python.

```
1 def fac(n):
2     f=1
3     for i in range(1,n+1):
4         f=f*i
5     return(f)
```

a. Quel résultat obtient on avec l'appel `fac(5)` ?

b. Expliquer le rôle de la fonction `fac`.

c. Écrire le programme en langage Python d'une fonction `probabilite`, de paramètre n , qui retourne la valeur de P_n . On pourra utiliser la fonction `fac`.

4. On admet que pour tout entier naturel non nul n ,
 $P_{n+1} \leq \frac{P_n}{2}$. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Sujet D 30 min REPRÉSENTER CALCULER

THÈMES • Dénombrement de k -uplets
• Probabilités

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacités 3 et 10 pp. 15-22
Question 2. ► Capacités 2 et 3 p. 15

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C). Une seule d'entre elles est exacte. Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot de cinq lettres. Par exemple, le mot « BBAAC » signifie que le candidat a répondu B aux deux premières questions, A à la troisième et à la quatrième et C à la cinquième.

1. a. Combien y a-t-il de mots-réponses possibles ?
b. Combien y a-t-il de mots-réponses qui contiennent deux « B », deux « A » et un « C » ? On pourra s'aider d'un arbre.
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
Calculer la probabilité des événements suivants :
• E : « le candidat n'a aucune bonne réponse » ;
• F : « le candidat a exactement une bonne réponse ».

Sujet E 40 min CHERCHER CALCULER

THÈME • Dénombrement de permutations et de combinaisons

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Partie A. et B. ► Capacités 2 et 7 pp. 15-19
Partie C. ► Capacité 5 p. 17

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Partie A : Un sac contient 4 jetons jaunes, numérotés de 1 à 4, 2 jetons rouges numérotés 1 et 2 et 3 jetons bleus numérotés de 1 à 3. L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 jetons du sac.

1. Le nombre de possibilités de tirer 3 jetons de la même couleur est : a. 2 b. 3 c. 5 d. 30
2. Le nombre de possibilités de tirer 3 jetons de couleurs différentes est :

a. $\frac{4!}{2! \times 3!}$ b. $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ c. 9 d. 24

Partie B : On dispose d'un jeu de 32 cartes, composé entre autres de 8 cartes « pique » et de 4 as, dont l'as de pique.

1. On tire au hasard deux cartes successivement et sans remise. Le nombre de tirages différents est :
a. 63 b. 496 c. 992 d. 1 024
2. On tire au hasard et simultanément deux cartes de ce jeu. Le nombre de tirages sans « as » ni « pique » est :
a. 190 b. 210 c. 420 d. 441

Partie C : On considère tous les entiers naturels de 5 chiffres que l'on peut écrire au moyen de 5 jetons numérotés de 1 à 5. Le nombre de nombres qu'on peut former est :

a. 5! b. 5^5 c. $\binom{5}{5}$ d. 120

Sujet F 30 min REPRÉSENTER RAISONNER

THÈMES • Dénombrement de k -uplets
• Dénombrement avec représentation

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacités 3 et 4 pp. 15-17
Question 2. ► Capacité 10 p. 22

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. On considère un cadenas dont le code d'ouverture est composé de 5 chiffres.
Affirmation 1 : il y a 50 codes différents.
Affirmation 2 : 30 240 codes ont leurs chiffres différents.
Affirmation 3 : il y a 3 360 codes dont les chiffres sont tous différents et avec un 3 en deuxième position.
2. 30 personnes mangent dans un restaurant : 26 ont pris un plat, 14 une entrée et 20 un dessert. 6 ont pris « Entrée-Plat-Dessert », 4 ont pris « Entrée-Plat » et 3 ont seulement pris une entrée. Aucune personne n'a pris qu'un dessert.
Affirmation 4 : 3 personnes n'ont pris qu'un plat.

Sujet G 30 min CHERCHER REPRÉSENTER

THÈMES • Dénombrement de permutations et de combinaisons
• Dénombrement avec représentation

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacité 10 p. 22
Question 2. et 4. ► Capacité 7 p. 19
Question 3. et 4. ► Capacité 5 p. 15
Question 5. ► Capacité 8 p. 19

Le Tournoi des 6 Nations est un tournoi de rugby. Chaque équipe affronte les cinq autres une seule fois.

1. Lors d'un match, le stade contenait 80 000 spectateurs, dont 52 000 Français. Il y avait 11 180 Anglaises et 38 700 hommes français.
Combien d'hommes étaient présents au stade ?

2. Combien de matchs sont disputés lors de ce tournoi ?
3. a. Combien y a-t-il de classements différents ?
b. Combien y a-t-il de classements différents avec la France à la 4^e place, sachant qu'il n'y a pas d'ex-aequo ?
4. On demande au sélectionneur de l'équipe de France d'assister à une réunion avec les arbitres et cinq de ses joueurs. Il décide d'amener 5 joueurs parmi les 15 qui ont débuté le dernier match.

- a. Combien de groupes de 5 joueurs peut alors composer le sélectionneur ?
- b. Il décide d'amener le capitaine de l'équipe.
Combien de groupes de 5 joueurs peut-il alors composer ?
5. On a représenté ci-dessous la 15^e ligne du triangle de Pascal issue d'une feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
15	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	

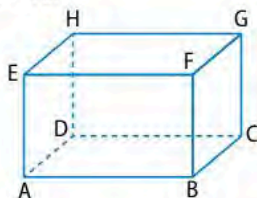
- a. On saisit 1 dans la cellule A16. Quelle formule, destinée à être recopiée vers la droite, peut-on saisir dans la cellule B16 afin d'obtenir la plage de cellules B16:P16 ?
- b. Quelle cellule donne le résultat de la question 4.a ?

► Calculer et utiliser un solide de l'espace

- 1** a. Calculer le volume d'un cube dont l'arête mesure 4 cm.
b. Calculer le volume d'une pyramide de base 8 cm^2 et de hauteur 6 cm.

2 ABCDEFGH est un pavé droit tel que $AB = 21$, $AD = 12$ et $AE = 12$.

1. a. Déterminer le volume de ce pavé.
b. Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? Calculer son aire.
2. Calculer l'aire totale des faces de ce pavé droit.
3. Calculer la longueur exacte de la diagonale [FH].
En déduire la longueur FD.

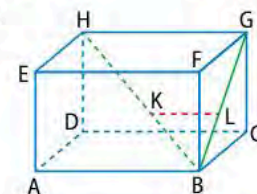


3 ABCDEFGH est un pavé droit tel que $AB = 8$, $AD = 4$ et $AE = 3$.

- a. K est le point de [BH] tel que $BK = 0,4 \times BH$ et L est le point de [BG] tel que $BL = 2$.

Montrer que les droites (KL) et (HG) sont parallèles.

- b. Déterminer alors la longueur du segment [KL].

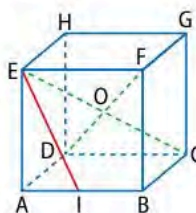


4 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

ABCDEFGH est un cube de centre O et I est le milieu de [AB].

- a. Le point D appartient à la droite (EI).
b. Le point O appartient à la droite (DF).
c. Le point O appartient à la droite (BH).



► Utiliser les vecteurs du plan

5 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Soit trois points A, B et C tels que $\vec{AC} = 2\vec{AB}$. Alors :

- a. A, B et C sont alignés b. C est le milieu de [AB] c. $\vec{BC} = 2\vec{CA}$ d. $\vec{BC} = \vec{AB}$

2. Pour tous points D, E et F du plan, on a :

- a. $\vec{DE} + \vec{DF} = \vec{EF}$ b. $\vec{EF} + \vec{FD} = \vec{ED}$ c. $\vec{DE} - \vec{FE} = \vec{DF}$ d. $\vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FD} = \vec{0}$

6 Soit A, B, C et D quatre points. Démontrer que $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BD}$.

7 Tracer le triangle ABC tel que $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ et $AC = 8 \text{ cm}$.

a. Construire les points L et K tels que $\vec{AL} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ et $\vec{AK} = \frac{4}{3}\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AC}$.

b. Montrer que $\vec{KL} = -\frac{5}{6}\vec{BC}$. Que peut-on en déduire ?

8 Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base des vecteurs du plan, $\vec{u}(2; 3)$ et $\vec{v}(-2; 7)$ deux vecteurs.

- a. Déterminer les coordonnées du vecteur $2\vec{u}$.
b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = -2\vec{u} + 5\vec{v}$.

9 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan. On considère les points $A(3; 2)$, $B(1; 5)$ et $C(7; -4)$.

- a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
b. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

CHAPITRE

2



Les architectes s'inspirent régulièrement de figures géométriques pour élaborer des bâtiments remarquables. La célèbre arche de la Défense (Hauts-de-Seine) a été conçue par l'architecte Johan Otto von Spreckelsen. Cette arche est un cube évidé en son centre et la structure ressemble à la projection, dans un espace à trois dimensions, d'un hypercube à quatre dimensions. Chacune des arêtes de cette arche est parallèle à au moins un plan contenant une des faces de l'arche.

LES NOTIONS DU CHAPITRE

Voir Activité 3 page 49

- Vecteurs de l'espace
- Droites et plans de l'espace
- Positions relatives de droites et plans
- Bases et repères de l'espace
- Représentation paramétrique d'une droite de l'espace



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 53, 55, 59, 60
Animation	p. 54
Corrigés détaillés	pp. 72, 73, 82, 83

Activité 1

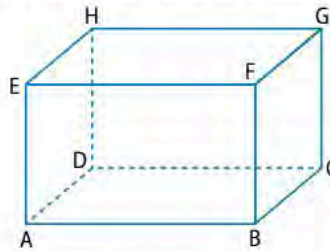
Objectif

Étendre à l'espace les propriétés des vecteurs du plan.

⇒ Cours 1
Vecteurs de l'espace

Alignement de trois points dans l'espace

1 Reproduire le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous.



- 2 a. Nommer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ dont les extrémités sont des sommets de ce parallélépipède rectangle.
b. Nommer tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$ dont les extrémités sont des sommets de ce parallélépipède rectangle.
- 3 Recopier puis compléter les égalités suivantes à l'aide d'un des sommets du parallélépipède.
a. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{A...}$ b. $\overrightarrow{D...} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ c. $\overrightarrow{H...} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD}$ d. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{FD} = 2\overrightarrow{B...}$
- 4 a. Placer le point R défini par l'égalité $\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GB}$.
b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BR}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GE}$.
- 5 a. Placer le point S tel que $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$.
b. Justifier que $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AC}$.
- 6 Conjecturer, puis justifier les positions des points R, B et S.

Activité 2

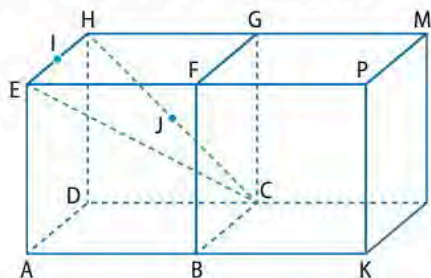
Objectif

Introduire la notion de vecteurs coplanaires.

⇒ Cours 2
Droites et plans de l'espace

Coplanarité de trois vecteurs

On considère les cubes ABCDEFGH et BKLCPMG.
Dans le cube ABCDEFGH, on désigne par I le milieu de [EH] et par J le centre du carré CDHG.



- 1 Déterminer un représentant du vecteur $\overrightarrow{AD}$ dont les extrémités sont dans le plan (BCH).
- 2 Déterminer un représentant du vecteur $\overrightarrow{KF}$ dont les extrémités sont dans le plan (BCH).
- 3 Justifier que les points I et J appartiennent au plan (BCH).

Il existe un plan contenant un représentant de chacun des trois vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{KF}$ et $\overrightarrow{IJ}$: on dit que ces vecteurs sont coplanaires.

- 4 a. Déterminer un représentant du vecteur $\overrightarrow{EI}$ dont les extrémités sont dans le plan (ADG).
b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{JD}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

Activité 3

Objectif

Étudier des droites et des plans parallèles dans l'espace.

Cours 3

Positions relatives de droites et de plans de l'espace

Fichier GeoGebra/ Cabri

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr



L'arche de la Défense

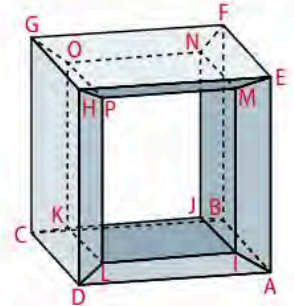
Cette arche est construite dans le cube ABCDEFGH.

IJKLMNOP est un pavé droit et les autres faces de ce solide sont des trapèzes isocèles.

On admettra les égalités vectorielles suivantes :

$$\vec{IJ} = \frac{2}{3}\vec{AB}, \vec{IM} = \frac{4}{5}\vec{AE}, \vec{IL} = \frac{2}{3}\vec{AD}$$

$$\text{et } \vec{AI} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{10}\vec{AE} + \frac{1}{6}\vec{AD}.$$



1 a. Exprimer le vecteur $\vec{JK}$ en fonction de $\vec{BC}$.

b. Que peut-on en déduire pour les droites (JK) et (BC) ?

2 Justifier que les plans (BCGF) et (IJKL) ne sont pas parallèles.

3 En observant la figure réalisée à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la position relative des plans (ABJI) et (OPHG).

4 a. On donne $\vec{OG} = \frac{1}{4}\vec{IJ} + \frac{1}{8}\vec{IM} + \frac{1}{4}\vec{IL}$.

Montrer que $\vec{OG} = \vec{AI}$.

b. Prouver alors que les plans (ABJI) et (OPHG) sont parallèles.

Activité 4

Objectif

Découvrir la notion de représentation paramétrique d'une droite.

Cours 5

Représentation paramétrique d'une droite

Livrer un refuge

Le temps est exprimé en minutes.

Pour livrer un refuge particulièrement difficile d'accès, le gardien utilise un câble rectiligne qui permet aux livreurs de faire franchir le ravin aux fournitures et éviter ainsi un très long détour.

À 9 heures du matin, que l'on considère comme l'instant $t = 0$, le livreur arrive au pied du câble de coordonnées (3 000 ; -1 800 ; 2 700) dans un repère local. On note A ce point.

Les coordonnées sont en mètres et la dernière coordonnée représente l'altitude. Le refuge, quant à lui, se situe à une altitude de 2 850 mètres.

Le livreur fixe le conteneur de fournitures au câble et active le mécanisme. La vitesse du conteneur est constante durant le trajet et le vecteur vitesse $\vec{v}$ associé à son déplacement a pour coordonnées (-33 ; -24 ; 6), chaque coordonnée étant exprimée en mètres par minute ($\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$). À l'instant t , la position M du conteneur est donc donnée par l'égalité vectorielle : $\vec{AM} = t \vec{v}$.



1 Soit $(x(t) ; y(t) ; z(t))$ les coordonnées de la position du conteneur à l'instant t .

En utilisant les coordonnées de $\vec{v}$, calculer $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en fonction de t .

2 À quelle altitude se trouve le conteneur au bout de 12 minutes ?

3 À quelle heure seront livrées les fournitures au refuge si aucun incident ne se produit ?

4 Quelles sont les coordonnées complètes du refuge ?

5 À 11 heures, le gardien accroche un conteneur de poubelles à redescendre dans la vallée.

La position du conteneur est donnée à chaque instant t' par le système
$$\begin{cases} x(t') = 27,5t' + 2\,175 \\ y(t') = 20t' - 2\,400 \\ z(t') = -5t' + 2\,850 \end{cases}$$

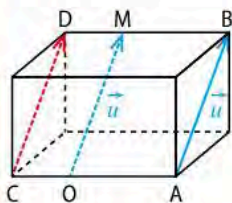
a. Pourquoi l'instant $t' = 0$ correspond-il à l'instant de départ du conteneur de poubelles ?

b. Combien de temps faut-il pour que le conteneur de poubelles soit réceptionné par le livreur ?

1. Vecteurs de l'espace

À noter

Si A et B sont confondus, alors $\vec{AB}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.



La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

DÉFINITION Les points A et B étant distincts, le vecteur $\vec{AB}$ est caractérisé par sa **direction**, celle de la droite (AB), par son **sens**, de A vers B, et par sa **norme**, notée $\|\vec{AB}\|$, qui est la longueur AB.

PROPRIÉTÉS A, B, C et D sont quatre points de l'espace.

- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, ABCD est un parallélogramme.
- D est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{AB}$ si et seulement si $\vec{CD} = \vec{AB}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point O, il existe un unique point M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

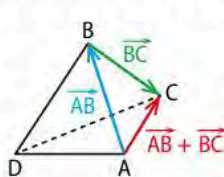
Somme de deux vecteurs

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ qui peut s'obtenir par :

- la relation de

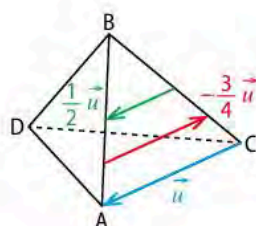
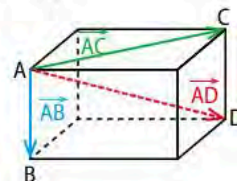
Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



- la règle du parallélogramme :

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.



Produit d'un vecteur par un réel et colinéarité

Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est tel que :

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction ;
- si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens, sinon, ils sont de sens contraire ;
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

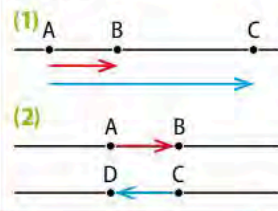
DÉFINITION Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si, et seulement si, ils ont même direction. Autrement dit, les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

PROPRIÉTÉS A, B, C et D sont quatre points distincts de l'espace.

- (1) Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- (2) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

À noter

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.



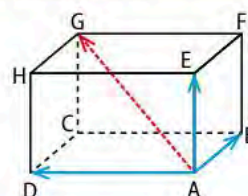
Combinaisons linéaires de vecteurs

DÉFINITION On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

On dit que le vecteur $\vec{u}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si, et seulement si, $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$, où a et b sont des réels.

REMARQUE : Cette définition se généralise pour une combinaison linéaire de 4, 5, 6... vecteurs.

EXEMPLE : ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Une écriture du vecteur $\vec{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, et $\vec{AE}$ est $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$.



DÉFINITION Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **linéairement indépendants** s'il n'est pas possible d'exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres.

PROPRIÉTÉ Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants si, et seulement si, l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

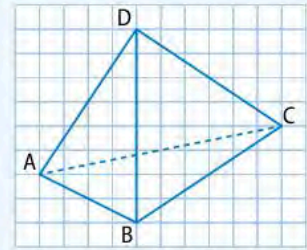
Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

ABCD est un tétraèdre représenté en perspective sur un papier quadrillé.

- 1 Reproduire ce tétraèdre sur une feuille.
- 2 Placer les points R et S définis par :

a. $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$

b. $\overrightarrow{AS} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$



Conseil

Pour représenter une combinaison linéaire de vecteurs, il faut faire en sorte que le point extrémité (à placer) ne soit présent que « dans » un seul vecteur.

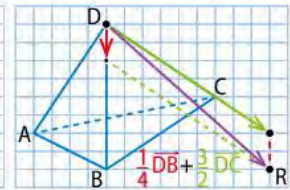
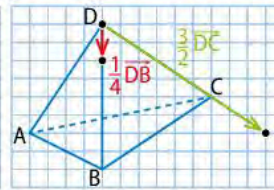
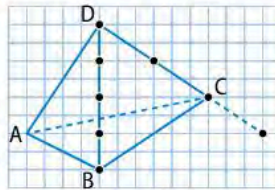
Solution commentée

- 1 On souhaite placer le point R tel que $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$:

• On partage [DB] en 4 et [DC] en 2.

• On représente les vecteurs $\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.

• On place R à l'aide d'une somme de vecteurs.

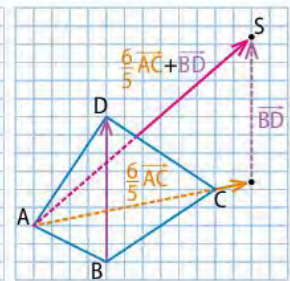
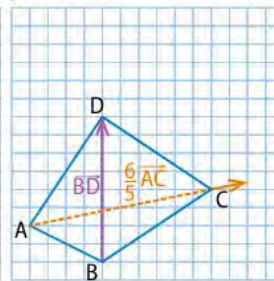
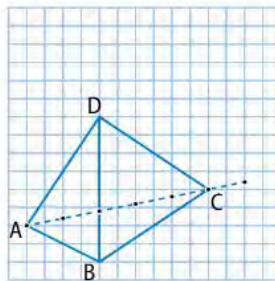


- 2 On souhaite placer le point S tel que $\overrightarrow{AS} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$:

• On partage le segment [AC] en 5.

• On représente les vecteurs $\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

• On place S à l'aide d'une somme de vecteurs.



Voir exercices

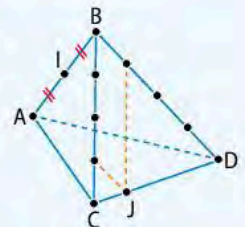
43 Pour s'entraîner

129 Pour travailler en autonomie

Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs

ABCD est un tétraèdre. On appelle I le milieu de [AB] et J un point sur [CD].

- 1 À l'aide des graduations régulières de la figure, exprimer $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
- 2 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
- 3 En déduire une expression de $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.



Méthode

Pour simplifier une combinaison linéaire de vecteurs, il peut être utile d'introduire, grâce à la relation de Chasles, un point soigneusement choisi.

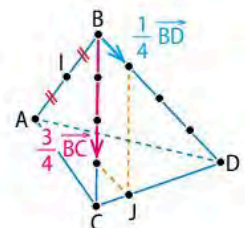
Solution commentée

- 1 À l'aide des graduations, on lit $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

- 2 I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

- 3 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

$$\text{donc } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \\ = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$



Voir exercices

47 Pour s'entraîner

130 Pour travailler en autonomie

2. Droites et plans de l'espace

Règles d'incidence

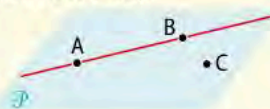
Vocabulaire

Des éléments de l'espace situés dans un même plan sont dits **coplanaires**.

À noter

- (1) Deux droites sécantes déterminent un plan.
- (2) Deux droites strictement parallèles déterminent un plan.
- (3) On représente usuellement un plan par un parallélogramme.

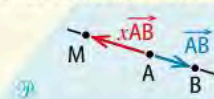
- PROPRIÉTÉS** (1) Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite.
 (2) Par trois points non alignés A, B et C, il passe un unique plan noté (ABC).
 (3) Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AB) est incluse dans ce plan $\mathcal{P}$.
 (4) Dans chaque plan de l'espace, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent.



Caractérisation vectorielle d'une droite

DÉFINITION On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur non nul dont la direction est la même que celle de d .

- PROPRIÉTÉ** Soit A et B deux points distincts de l'espace.
 La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
 Autrement dit, la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}$, où x est un réel quelconque.

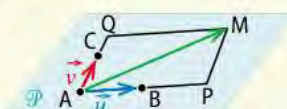
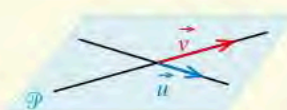


Caractérisation vectorielle d'un plan

DÉFINITION On appelle **direction** d'un plan $\mathcal{P}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts quelconques de $\mathcal{P}$.

- PROPRIÉTÉS** (1) Deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la direction d'un plan $\mathcal{P}$ **engendrent** cette direction, c'est-à-dire que tout vecteur de la direction de $\mathcal{P}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- (2) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x \vec{u} + y \vec{v}$ avec x et y réels quelconques, est un plan passant par A. Un plan est donc entièrement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.



DÉMONSTRATION DU (2)

Soit A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, pour tout point M de ABC, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x \vec{u} + y \vec{v}$.

Réciproquement, soit x et y deux réels et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = x \vec{u} + y \vec{v}$.

Le point P défini par $\overrightarrow{AP} = x \vec{u}$ appartient à la droite (AB) donc au plan (ABC) et comme $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AQ} = y \vec{v}$, M appartient à la parallèle à (AC) passant par P qui est incluse dans (ABC).

À noter

On dit que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une **base** de $\mathcal{P}$.

À noter

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$ avec x et y réels quelconques.

À noter

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration de la propriété (1)

Voir page 62

LOGIQUE L'énoncé (2) est la négation de l'énoncé (1).

Vecteurs coplanaires

DÉFINITION Des vecteurs sont dits **coplanaires** si, et seulement si, leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

- PROPRIÉTÉS** (1) Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ **sont coplanaires** si, et seulement si, il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

- (2) Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ **ne sont pas coplanaires** si, et seulement si, l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

Vidéo 15-24

Démontrer un alignement par décomposition de vecteurs dans une base



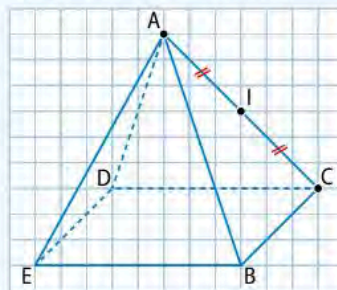
CAPACITÉ

3

Démontrer un alignement avec le calcul vectoriel

ABCDE est une pyramide de sommet A et de base le parallélogramme BCDE. On appelle I le milieu de [AC].

- 1 Reproduire la figure et placer le point G défini par $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$.
- 2 Exprimer $\vec{EG}$ en fonction des vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
- 3 Exprimer $\vec{EI}$ en fonction des vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
- 4 En déduire que les points E, I et G sont alignés.



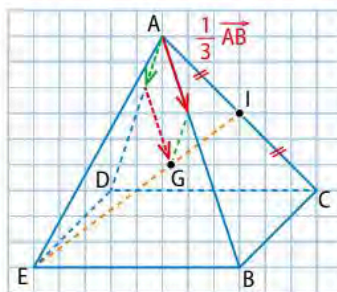
Conseil

Les définitions par égalité vectorielle permettent souvent de déduire quel point introduire pour utiliser la relation de Chasles dans un calcul vectoriel.

Solution commentée

- 1 Voir la figure.
- 2 $\vec{EG} = \vec{EA} + \vec{AG} = -\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$.
- 3 $\vec{EI} = \vec{EA} + \vec{AI} = -\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ car I est le milieu de [AC]. Or $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{ED}$ car BCDE est un parallélogramme. Enfin $\vec{ED} = \vec{EA} + \vec{AD} = -\vec{AE} + \vec{AD}$. Ainsi, $\vec{EI} = -\vec{AE} + \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AD})$ donc $\vec{EI} = -\frac{3}{2}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.

- 4 On constate que $\vec{EI} = \frac{3}{2}\vec{EG}$ donc les vecteurs $\vec{EI}$ et $\vec{EG}$ sont colinéaires. On peut en déduire que les points E, I et G sont alignés.



Voir exercices

50 Pour s'entraîner

131 Pour travailler en autonomie

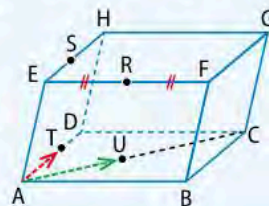
CAPACITÉ

4

Montrer que des vecteurs sont coplanaires

ABCDEFGH est un parallélépipède. R est le milieu de [EF] et S est le milieu de [EH]. Les points T et U sont définis par les égalités vectorielles $\vec{AT} = \frac{2}{3}\vec{AD}$ et $\vec{AU} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.

- 1 Exprimer les vecteurs $\vec{TU}$, $\vec{TR}$ et $\vec{TS}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.
- 2 Calculer $9\vec{TU} + 6\vec{TS}$.
- 3 En déduire que les vecteurs $\vec{TU}$, $\vec{TR}$ et $\vec{TS}$ sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points T, U, R et S ?



Méthode

Pour démontrer que trois vecteurs sont coplanaires, on peut décomposer de façon pertinente un vecteur en fonction des deux autres.

Solution commentée

- 1 $\vec{TU} = \vec{TA} + \vec{AU} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AC}$. Or $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ car ABCD est un parallélogramme. D'où $\vec{TU} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$ soit $\vec{TU} = -\frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB}$.
 $\vec{TR} = \vec{TA} + \vec{AE} + \vec{ER} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EF}$. Puisque ABFE est un parallélogramme, on a $\vec{EF} = \vec{AB}$ donc $\vec{TR} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$.
 $\vec{TS} = \vec{TA} + \vec{AE} + \vec{ES} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EH}$. Puisque ADHE est un parallélogramme, on a $\vec{EH} = \vec{AD}$ donc $\vec{TS} = -\frac{2}{3}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AD}$ soit $\vec{TS} = -\frac{1}{6}\vec{AD} + \vec{AE}$.
- 2 On a $9\vec{TU} = -3\vec{AD} + 3\vec{AB}$ et $6\vec{TS} = -\vec{AD} + 6\vec{AE}$ donc $9\vec{TU} + 6\vec{TS} = -4\vec{AD} + 3\vec{AB} + 6\vec{AE}$.
- 3 On peut remarquer que $6\vec{TR} = -4\vec{AD} + 3\vec{AB} + 6\vec{AE} = 9\vec{TU} + 6\vec{TS}$. Ainsi $6\vec{TR} - 9\vec{TU} - 6\vec{TS} = \vec{0}$. On en déduit que les vecteurs $\vec{TR}$, $\vec{TU}$ et $\vec{TS}$ sont coplanaires.
- 4 Les vecteurs $\vec{TR}$, $\vec{TU}$ et $\vec{TS}$ de même origine T sont coplanaires, donc les points R, U et S appartiennent à un même plan passant par T : ils sont coplanaires.

Voir exercices

57 Pour s'entraîner

132 Pour travailler en autonomie

3. Positions relatives de droites et de plans

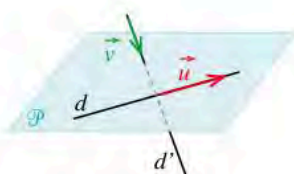
Positions relatives de deux droites

À noter

Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point commun sont soit strictement parallèles, soit non coplanaires.

Animation

Positions relatives plan/droites et plan/plan



PROPRIÉTÉS Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$. Dans l'espace, les droites d et d' peuvent être **coplanaires** ou **non coplanaires**.

(1) Si d et d' sont coplanaires, elles peuvent être :

• sécantes en un point M Dans ce cas, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.	• confondues Dans ces deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.	• strictement parallèles Dans ces deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
---	---	---

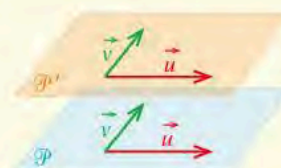
(2) Si d et d' ne sont pas coplanaires, elles n'ont pas de point commun.

PROPRIÉTÉ Par tout point de l'espace, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

Positions relatives de deux plans

DÉFINITION Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ont la même direction.

PROPRIÉTÉ Deux plans sont parallèles lorsqu'ils sont confondus ou n'ont aucun point commun. Ainsi, deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de la direction du plan $\mathcal{P}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs de la direction du plan $\mathcal{P}'$.

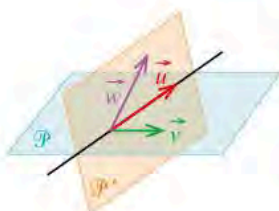


CONSEQUENCE Deux plans sont sécants si et seulement si ils ne sont pas parallèles. Dans ce cas, ils se coupent selon une droite.

PROPRIÉTÉ Par tout point de l'espace, il passe un unique plan parallèle à un plan donné.

À noter

Deux plans ne peuvent pas avoir un seul point commun.



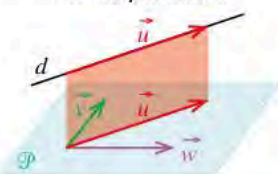
À noter

Lorsque la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ engendrent l'ensemble des vecteurs de l'espace.

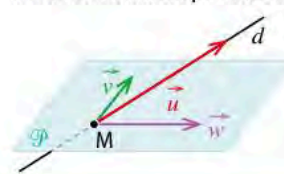
Positions relatives d'une droite et d'un plan

PROPRIÉTÉS Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{v}; \vec{w})$.

(1) La droite d est **parallèle** au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



(2) La droite d est **sécante** au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.



PROPRIÉTÉ Une droite d est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, la droite d est incluse dans $\mathcal{P}$ ou si d et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point commun.

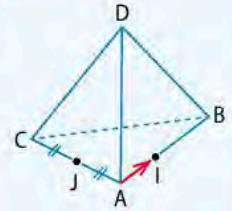
CAPACITÉ

5

Décrire la position relative de deux droites

ABCD est un tétraèdre. Le point I est défini par $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et le point J est le milieu du segment [AC].

- 1 Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes.
- 2 En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.



Méthode

Pour montrer que deux droites sont sécantes, on commence par montrer qu'elles sont coplanaires.

Solution commentée

- 1 I et J appartiennent respectivement aux droites (AB) et (AC) qui sont incluses dans le plan (ABC) donc I et J appartiennent à (ABC). On en déduit que les droites (IJ) et (BC) sont coplanaires : elles sont soit sécantes, soit parallèles.

Or $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ car J est le milieu de [AC] et $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$.

Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{IJ} = k\vec{BC} = -k\vec{AB} + k\vec{AC}$. Le couple $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base du plan (ABC).

La décomposition du vecteur $\vec{IJ}$ dans cette base est unique donc l'égalité

$$\vec{IJ} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = -k\vec{AB} + k\vec{AC} \text{ conduit à } k = \frac{1}{3} \text{ et } k = \frac{1}{2} \text{ ce qui n'est pas possible.}$$

(IJ) et (BC) ne peuvent pas être parallèles : elles sont donc sécantes.

- 2 Supposons que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.

Cela permet d'affirmer que les droites (IJ) et (AD) sont coplanaires. Or A, I et J appartiennent tous trois au plan (ABC) d'après la question 1. Cela signifie que D est un point du plan (ABC), c'est-à-dire que A, B, C et D sont coplanaires. C'est absurde car ABCD est un tétraèdre.

La supposition initiale est donc fausse : (AD) et (IJ) ne sont pas parallèles.

Voir exercices

64 Pour s'entraîner

133 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

6

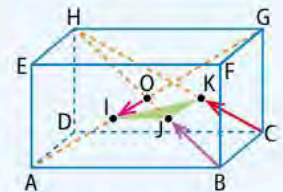
Décrire la position relative de deux plans

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de centre O.

On définit les points I, J et K par les égalités vectorielles :

$$\vec{OI} = \frac{1}{3}\vec{OA}; \vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BO} \text{ et } \vec{CK} = \frac{1}{3}\vec{CH}.$$

- 1 Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
- 2 a. Exprimer $\vec{BJ}$ en fonction de $\vec{BH}$.
b. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.



Vidéo 08.04

Démontrer que deux plans sont parallèles



Méthode

Pour montrer que deux plans sont parallèles, on peut montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre plan.

Solution commentée

- 1 On décompose le vecteur $\vec{IJ}$ à l'aide de la relation de Chasles :

$$\vec{IJ} = \vec{IO} + \vec{OB} + \vec{BJ} = -\frac{1}{3}\vec{OA} + \vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{BO} = \frac{1}{3}\vec{AO} + \frac{1}{3}\vec{OB}.$$

$$\text{On en déduit : } \vec{IJ} = \frac{1}{3}(\vec{AO} + \vec{OB}) = \frac{1}{3}\vec{AB}.$$

$\vec{IJ}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires donc les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

- 2 a. O est le centre du parallélépipède rectangle donc O est le milieu de [BH] et $\vec{BO} = \frac{1}{2}\vec{BH}$. Ainsi $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BO} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\vec{BH} = \frac{1}{3}\vec{BH}$.

b. On décompose le vecteur $\vec{JK}$ à l'aide de la relation de Chasles :

$$\vec{JK} = \vec{JB} + \vec{BC} + \vec{CK} = -\frac{1}{3}\vec{BH} + \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CH} = \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CH} + \frac{1}{3}\vec{HB}.$$

$$\text{Cela conduit à } \vec{JK} = \vec{BC} + \frac{1}{3}(\vec{CH} + \vec{HB}) = \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \frac{2}{3}\vec{BC}.$$

$\vec{IJ}$ et $\vec{JK}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) qui sont respectivement égaux à $\frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\frac{2}{3}\vec{BC}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

On en déduit que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Voir exercices

69 Pour s'entraîner

134 Pour travailler en autonomie

4. Bases et repères dans l'espace

Décomposition d'un vecteur dans une base

DÉFINITION On appelle base de l'espace tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.

PROPRIÉTÉ Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

DÉMONSTRATION

Existence

Soit O et M deux points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. On appelle $\mathcal{P}$ le plan passant par O et de base $(\vec{i}, \vec{j})$. Puisque $\vec{k}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, la droite d passant par M et de vecteur directeur $\vec{k}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point N. $\overrightarrow{ON}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}$ donc il existe un couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{ON} = x\vec{i} + y\vec{j}$. M et N sont deux points de d , donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{NM} = z\vec{k}$ et on a $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Unicité

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ alors $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$ ce qui conduit, puisque $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, à $x = x', y = y'$ et $z = z'$.

PROPRIÉTÉS Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans une base de l'espace.

(1) $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x', y = y'$ et $z = z'$.

(2) Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$.

(3) Si α est un réel, alors $\alpha\vec{u}$ a pour coordonnées $(\alpha x; \alpha y; \alpha z)$.

EXEMPLE : Soit $\vec{u}(-5; 7; 2)$ et $\vec{v}(8; 2; -6)$ deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• Le vecteur $\vec{w}$ défini par $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le triplet $(-5 + 8; 7 + 2; 2 + (-6))$ c'est-à-dire $(3; 9; -4)$. On note $\vec{w}(3; 9; -4)$.

• Le vecteur $\vec{r}$ défini par $\vec{r} = 4\vec{u}$ a pour coordonnées le triplet $(4 \times (-5); 4 \times 7; 4 \times 2)$ soit $(-20; 28; 8)$. On note : $\vec{r}(-20; 28; 8)$.

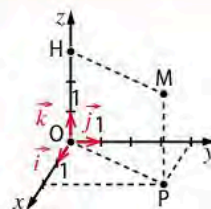
Repères de l'espace

DÉFINITIONS (1) Un repère de l'espace est un quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel O est un point appelé origine du repère, et $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

(2) Soit M un point de l'espace. Les coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont les coordonnées $(x; y; z)$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: x est l'abscisse, y l'ordonnée et z est la cote de M.

EXEMPLE : Pour placer le point M de coordonnées $(2; 4; 3)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on place le point P de coordonnées $(2; 4)$ dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, puis le point H de coordonnées $(0; 0; 3)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le point M est tel que OPMH est un parallélogramme.



PROPRIÉTÉS Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

(2) Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

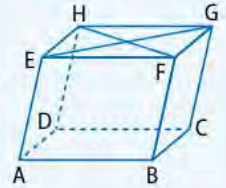
EXEMPLE : Soit $A(1; -7; 4)$ et $B(21; 11; 1)$ deux points de l'espace rapporté à un repère.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(21 - 1; 11 - (-7); 1 - 4)$ soit $(20; 18; -3)$.

Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{1+21}{2}; \frac{-7+11}{2}; \frac{4+1}{2}\right)$ soit $\left(11; 2; \frac{5}{2}\right)$.

Lire sur une figure si des vecteurs forment une base

ABCDEFGH est un parallélépipède et O est le centre du parallélogramme EFGH.



- 1 Donner deux vecteurs qui forment une base du plan (ABC).
- 2 a. Justifier que $(\vec{AC}, \vec{OH})$ est une base du plan (ABC).
b. Compléter la base $(\vec{AC}, \vec{OH})$ pour former une base de l'espace.
- 3 $(\vec{GO}, \vec{FB}, \vec{CE})$ est-elle une base de l'espace ? Justifier.

Conseil

Deux vecteurs non colinéaires forment une base d'un plan. Trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace.

Solution commentée

- 1 Les points A, B et C ne sont pas alignés donc $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de (ABC).
- 2 a. O est le centre de EFGH donc $\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{FH}$. Or ABCDEFGH est un parallélépipède donc $\vec{FH} = \vec{BD}$ et $\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{BD}$.

Dans le plan (ABC), les droites (AC) et (BD) sont sécantes donc les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ ne sont pas colinéaires, on déduit que $\vec{AC}$ et $\vec{OH}$ ne sont pas colinéaires.

Comme $\vec{BD}$ est un vecteur de la direction du plan (ABC), $\vec{OH}$ l'est aussi. $(\vec{AC}, \vec{OH})$ est donc une base de (ABC).

b. $\vec{BF}$ n'est pas un vecteur de la direction du plan (ABC) car B appartient à (ABC) mais F n'appartient pas à (ABC). On déduit que $(\vec{AC}, \vec{OH}, \vec{BF})$ est une base de l'espace.

- 3 $\vec{CE} = \vec{CG} + \vec{GE} = -\vec{FB} + 2\vec{GO}$ car BCGF est un parallélogramme et O est le milieu de [GE]. $\vec{CE}, \vec{FB}$ et $\vec{GO}$ sont coplanaires donc ils ne forment pas une base de l'espace.

Voir exercices

79 Pour s'entraîner

135 Pour travailler en autonomie

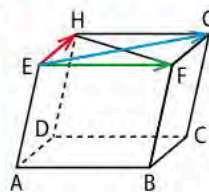
Lire la décomposition d'un vecteur dans une base

On considère le parallélépipède ABCDEFGH représenté à la **capacité 7** précédente.

- 1 Décomposer les vecteurs $\vec{EG}$ et $\vec{OH}$ dans la base $(\vec{EF}, \vec{EH})$.
- 2 Décomposer les vecteurs $\vec{BH}$ et $\vec{AO}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

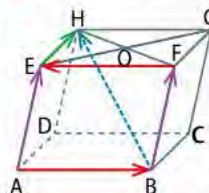
Solution commentée

- 1 • $\vec{EG} = \vec{EF} + \vec{EH}$



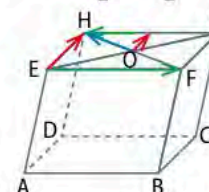
Cela traduit directement de la règle du parallélogramme.

- 2 • $\vec{BH} = -\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$



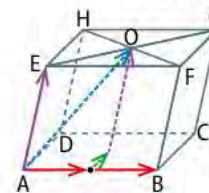
On a $\vec{BH} = \vec{BF} + \vec{FE} + \vec{EH}$ avec $\vec{BF} = \vec{AE}$, $\vec{FE} = -\vec{AB}$ et $\vec{EH} = \vec{AD}$ puisque ABCDEFGH est un parallélépipède.

$$\vec{OH} = -\frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{EH}$$



En effet, O est le milieu de [FH] donc $\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{FH} = \frac{1}{2}\vec{FE} + \frac{1}{2}\vec{EH}$.

$$\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$$



On a $\vec{AO} = \vec{AE} + \vec{EO}$ donc $\vec{AO} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{EH}$ puisque O est le centre de EFGH.

Conseil

Pour décomposer un vecteur dans une base, on peut, depuis l'origine de ce vecteur, « suivre un chemin » de vecteurs colinéaires aux vecteurs de la base afin d'arriver au point extrémité.

Voir exercices

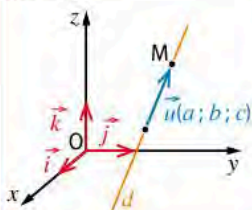
80 Pour s'entraîner

136 Pour travailler en autonomie

5. Représentation paramétrique d'une droite

Vocabulaire

Le réel t est le **paramètre** du point M .



À noter

La représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique puisque ni le point A , ni le vecteur $\vec{u}$ ne sont uniques.

PROPRIÉTÉ Soit d une droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à d si et seulement si, il existe un réel t

$$\text{tel que : } \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

DÉMONSTRATION

Soit $M(x; y; z)$, alors $\vec{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$.

M appartient à d si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$ donc si et seulement

$$\text{si, il existe } t \text{ tel que } \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

DÉFINITION Soit x_0, y_0, z_0, a, b et c des réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Le système d'équations $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, définit une **représentation**

paramétrique de la droite d passant par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$. Un tel système est aussi appelé système d'équations paramétriques de d .

Géométrie repérée et systèmes linéaires

En géométrie repérée dans l'espace, on est souvent amené à résoudre des systèmes de trois équations à trois inconnues. Pour cela, on utilise la **méthode de substitution** qui consiste à exprimer une variable en fonction des deux autres, puis à substituer cette expression dans les deux autres équations formant alors un système à deux inconnues.

EXEMPLE : On résout le système d'équations (S) :
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 & (E_1) \\ 3x + 7y + 14z = 16 & (E_2) \\ x + 4y + 9z = 5 & (E_3) \end{cases}$$
 d'inconnues x, y et z .

• Dans l'équation (E_1) le coefficient de x est égal à 1 : on peut facilement exprimer l'inconnue x en fonction de y et de z . L'équation (E_1) équivaut à $x = -2y - 4z + 5$.

• On **substitue** cette expression dans chacune des deux équations (E_2) et (E_3) .

$$(S) \text{ devient : } \begin{cases} x = -2y - 4z + 5 \\ 3(-2y - 4z + 5) + 7y + 14z = 16 \text{ soit } \begin{cases} x = -2y - 4z + 5 & (E'_1) \\ y + 2z = 1 & (E'_2) \\ -2y - 4z + 5 + 4y + 9z = 5 & (E'_3) \end{cases} \end{cases}$$

• Les équations (E'_2) et (E'_3) ne comportent que les deux inconnues y et z . On poursuit la résolution par substitution en exprimant y en fonction de z à l'aide de (E'_2) : $y = 1 - 2z$.

$$\text{Le système devient : } \begin{cases} x = -2y - 4z + 5 \\ y = 1 - 2z \\ 2(1 - 2z) + 5z = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -2y - 4z + 5 \\ y = 1 - 2z \\ z = -2 \end{cases}$$

On obtient alors la valeur de z , puis par substitution la valeur de y , puis celle de x :

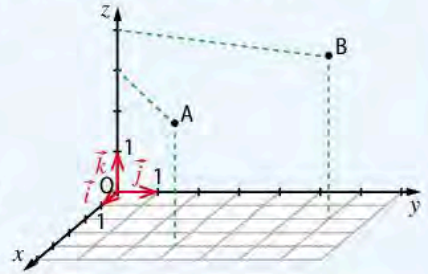
$$\begin{cases} x = -2y - 4 \times (-2) + 5 \\ y = 1 - 2 \times (-2) \\ z = -2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = -2y + 13 \\ y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \text{ et donc à } \begin{cases} x = -2 \times 5 + 13 \\ y = 5 \\ z = -2 \end{cases}$$

Le système a ainsi pour unique solution le triplet $(3; 5; -2)$.

Déterminer une représentation paramétrique de droite

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on a représenté les points A et B.

- 1 Lire graphiquement les coordonnées de ces points dans le repère.
- 2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- 3 Déterminer deux représentations paramétriques différentes de la droite (AB) dans ce repère.



Méthode

Pour écrire une représentation paramétrique d'une droite, on identifie un vecteur directeur et un point appartenant à la droite.

Solution commentée

- 1 Les coordonnées de A sont $(3; 3; 3)$ et celles de B sont $(2; 6; 4)$.
- 2 Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$, c'est-à-dire $(2 - 3; 6 - 3; 4 - 3)$ soit $(-1; 3; 1)$.
- 3 La droite (AB) passe par le point A $(3; 3; 3)$ et elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-1; 3; 1)$. Une représentation paramétrique de (AB) est donc

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + t z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit } \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Puisque B est un point de (AB), une autre représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = x_B + k x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_B + k y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_B + k z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}, \text{ soit } \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 6 + 3k \\ z = 4 + k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Voir exercices

112 Pour s'entraîner

140 Pour travailler en autonomie

Vidéo 09:11

Utiliser la représentation paramétrique d'une droite



Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique

On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- 1 Le point A $(3; 5; -2)$ appartient-il à la droite d ?
- 2 Donner les coordonnées d'un point de d , ainsi que celles d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de d .
- 3 d est-elle parallèle à la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = 1 - 6k \\ z = -5 - 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$?

Solution commentée

- 1 A appartient à d si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\begin{cases} x_A = 5 - t \\ y_A = -1 + 3t \\ z_A = 1 + t \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} 3 = 5 - t \\ 5 = -1 + 3t \\ -2 = 1 + t \end{cases}$ soit à $\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$.

Ceci implique qu'il n'existe pas de réel t vérifiant les trois équations : on en déduit que le point A n'appartient pas à la droite d .

- 2 Un point de d a pour coordonnées $(5; -1; 1)$ que l'on obtient en remplaçant t par 0 dans les équations. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de d a pour coordonnées $(-1; 3; 1)$.
- 3 $\vec{u}(-1; 3; 1)$ est un vecteur directeur de la droite d et $\vec{v}(2; -6; -2)$ est un vecteur directeur de la droite d' . On remarque que $\vec{v} = -2\vec{u}$. Puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on en déduit que les droites d et d' sont parallèles.

Méthode

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite dont on connaît une représentation paramétrique, on repère les coefficients du paramètre dans chacune des équations.

Voir exercices

116 Pour s'entraîner

140 Pour travailler en autonomie

Déterminer l'intersection de deux droites de l'espace

Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - 5k \end{cases}$$

Démontrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Méthode

Pour démontrer que deux droites dont on connaît une représentation paramétrique sont sécantes, on résout un système de trois équations à deux inconnues.

Solution commentée

Les droites d et d' ont un point d'intersection si, et seulement si, il existe un couple

$$(t; k) \text{ de réels solution du système } \begin{cases} 3 + 2t = 1 - 3k \\ -1 - t = 1 + k \\ 4 + 3t = 2 - 5k \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \\ 3t + 5k = -2 \end{cases}.$$

On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :

$$\begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -t - k = 2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ -2t - 2k = 4 \end{cases}$$

On remplace la deuxième équation par la somme des deux équations, le système équivaut à $\begin{cases} 2t + 3k = -2 \\ k = 2 \end{cases}$. On obtient alors $t = -4$ et $k = 2$.

Il faut à présent s'assurer que la troisième égalité est vérifiée par ces valeurs :

$3t + 5k = 3 \times (-4) + 5 \times 2 = -2$, ce qui convient.

Par conséquent, A est le point de d de paramètre -4 et A est aussi le point de d' de paramètre 2. On remplace, par exemple, dans la représentation paramétrique de d' :

$$\begin{cases} x_A = 1 - 3 \times 2 \\ y_A = 1 + 2 \\ z_A = 2 - 5 \times 2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_A = -5 \\ y_A = 3 \\ z_A = -8 \end{cases}.$$

Voir exercices

123 Pour s'entraîner

141 Pour travailler en autonomie

Vidéo 06:46

Coplanarité de quatre points



Méthode

Pour démontrer que des points A, B, C et D sont coplanaires, on prouve que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

Voir exercices

102 Pour s'entraîner

137 Pour travailler en autonomie

Démontrer la coplanarité de quatre points

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(2; -1; 4), B(6; -7; 0), C(1; 0; 1) et D(13; -16; 5).

- 1 Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- 2 Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Solution commentée

- 1 On a $\vec{AB}(4; -6; -4)$ et $\vec{AC}(-1; 1; -3)$.

Puisque $x_{\vec{AB}} = -4x_{\vec{AC}}$ mais $y_{\vec{AB}} \neq -4y_{\vec{AC}}$, il n'existe pas de réel t tel que $\vec{AB} = t\vec{AC}$.

Par conséquent, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

- 2 Comme $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires revient à déterminer deux réels α et β tels que $\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$.

$$\text{Puisque } \vec{AD}(11; -15; 1), \text{ cela se traduit par le système : } \begin{cases} 4\alpha - \beta = 11 \\ -6\alpha + \beta = -15 \\ -4\alpha - 3\beta = 1 \end{cases}$$

On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :

$$\begin{cases} 4\alpha - \beta = 11 \\ -6\alpha + \beta = -15 \end{cases} \quad \text{On remplace la deuxième équation par la somme des deux équations, le système équivaut à } \begin{cases} 4\alpha - \beta = 11 \\ -2\alpha = -4 \end{cases}. \text{ On obtient alors } \alpha = 2 \text{ et } \beta = -3.$$

Il faut à présent s'assurer que la troisième égalité est vérifiée par ces valeurs :

$-4\alpha - 3\beta = -4 \times 2 - 3 \times (-3) = 1$ ce qui convient.

Ainsi $\vec{AD} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ donc les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

On en conclut que les points A, B, C et D sont également coplanaires.

Montrer que des vecteurs de l'espace forment une base

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit les vecteurs $\vec{u}(1; -3; 5)$, $\vec{v}(4; 2; 1)$ et $\vec{w}(0; 2; -1)$.

- 1 Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan.
- 2 Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

Méthode

Pour démontrer que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace, on démontre que l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

Solution commentée

- 1 $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$$k \text{ doit donc être solution du système } \begin{cases} 1 = k \times 4 \\ -3 = k \times 2 \\ 5 = k \times 1 \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ k = \frac{-3}{2} \\ k = 5 \end{cases}.$$

Puisque ce système n'a pas de solution, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base d'un plan.

- 2 Soit a , b et c trois réels tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Les coordonnées du vecteur

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \text{ sont } \begin{pmatrix} a \times 1 + b \times 4 + c \times 0 \\ a \times (-3) + b \times 2 + c \times 2 \\ a \times 5 + b \times 1 + c \times (-1) \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} a + 4b \\ -3a + 2b + 2c \\ 5a + b - c \end{pmatrix}.$$

$$\text{L'égalité } a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \text{ équivaut à } \begin{cases} a + 4b = 0 \\ -3a + 2b + 2c = 0 \\ 5a + b - c = 0 \end{cases} \text{ donc à } \begin{cases} a = -4b \\ -3 \times (-4b) + 2b + 2c = 0 \\ 5 \times (-4b) + b - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4b \\ -3 \times (-4b) + 2b + 2c = 0 \\ 5 \times (-4b) + b - c = 0 \end{cases} \text{ soit à } \begin{cases} a = -4b \\ 14b + 2c = 0 \\ -19b - c = 0 \end{cases} \text{ donc à } \begin{cases} a = -4b \\ c = -7b \\ -12b = 0 \end{cases} \text{ puis à } \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

On en conclut que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

Voir exercices

84 Pour s'entraîner

138 Pour travailler en autonomie

Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base

D'après la capacité 13 précédente, les vecteurs $\vec{u}(1; -3; 5)$, $\vec{v}(4; 2; 1)$ et $\vec{w}(0; 2; -1)$ forment une base de l'espace.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}(-1; -15; 16)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Solution commentée

On cherche trois réels a , b et c tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. On a vu dans la capacité

$$\text{précédente que le vecteur } a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} a + 4b \\ -3a + 2b + 2c \\ 5a + b - c \end{pmatrix}.$$

$$\text{L'égalité } \vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \text{ est donc équivalente au système : } \begin{cases} a + 4b = -1 \\ -3a + 2b + 2c = -15 \\ 5a + b - c = 16 \end{cases}$$

$$\text{donc à } \begin{cases} a = -1 - 4b \\ -3 \times (-1 - 4b) + 2b + 2c = -15 \\ 5 \times (-1 - 4b) + b - c = 16 \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -19b - c = 21 \end{cases}$$

$$\text{soit à } \begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -38b - 2c = 42 \end{cases} \text{ En remplaçant la troisième équation par la somme de la}$$

$$\text{deuxième et de la troisième, le système devient } \begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -24b = 24 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

On en déduit l'égalité $\vec{t} = 3\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}$, donc les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $(3; -1; -2)$.

Méthode

Pour exprimer un vecteur en fonction de trois autres, on peut résoudre un système.

Voir exercices

95 Pour s'entraîner

139 Pour travailler en autonomie

Étudier une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ DU COURS 2 PAGE 52 Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, ils sont linéairement dépendants.

RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

Soit A un point de l'espace et soit B, C et D tels que $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$ et $\vec{AD} = \vec{w}$.

• **1^{er} cas** : on se place dans le cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Dans ce cas les points A, B et C sont alignés. Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et D, ce plan contient donc également le point C : les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$,

et $\vec{w}$ sont donc coplanaires. Par ailleurs :

– Si $\vec{u}$ est le vecteur nul, $1\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$. Il existe trois réels $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$ non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

– Si $\vec{u}$ est non nul, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ et $k\vec{u} - \vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$.

Il existe trois réels $a = k$, $b = -1$ et $c = 0$ non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

• **2nd cas** : on se place dans le cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ engendrent la direction du plan (ABC).

Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires alors le point D appartient au plan (ABC) : il existe deux réels x et y tels que $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, soit tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

On a alors $x\vec{u} + y\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

Réciproquement, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants, il existe trois réels a , b et c non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Le réel c est non nul, sinon $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient colinéaires. On en déduit l'égalité : $\frac{a}{c}\vec{u} + \frac{b}{c}\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ donc

$\vec{w} = -\frac{a}{c}\vec{u} - \frac{b}{c}\vec{v}$. Ainsi, le vecteur $\vec{w}$ appartient à la direction du plan (ABC) :

les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

Conclusion : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

QUESTIONS

1. Dans les lignes 2 à 10, pourquoi les propositions « les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires » et « les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants » sont-elles équivalentes ?

2. Quelle implication démontre-t-on dans les lignes 13 à 15 ?

3. Justifier l'affirmation ligne 17 : « Le réel c est non nul, sinon $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient colinéaires. »

Faire une démonstration

D1 Démontrer qu'une droite d est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, d est incluse dans $\mathcal{P}$ ou si l'intersection de d et $\mathcal{P}$ est vide.

Piste : Dans le cas où d n'est pas incluse dans $\mathcal{P}$, considérer la parallèle à d passant par un point A de $\mathcal{P}$ et utiliser le plan défini par les droites d et d' .

D2 Démontrer que deux droites non coplanaires n'ont pas de point commun.

Piste : Raisonner par l'absurde en supposant qu'elles ont un point commun et aboutir à une contradiction.

Calcul mental

- 1** a. Convertir 1,25 heure en minutes.
 b. Convertir 270 minutes en heures.
 c. Convertir $\frac{3}{4}$ d'heure en minutes.
 d. Convertir 12 minutes en heures.
- 2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
 a. $3x - 6 = 0$ b. $3 - 5x = 0$ c. $2x + 8 = 0$ d. $-4x = 0$
- 3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
 a. $x^2 = 3$ b. $x^2 = -5$ c. $x^2 = \frac{9}{4}$

- 4** Simplifier les expressions suivantes :

a. $\frac{e^{-3} \times e^7}{e^4}$ b. $\frac{(e^4)^2}{e^5 \times e^{-7}}$
 c. $\frac{8 - \sqrt{36}}{8}$ d. $\frac{10^3}{5^2}$

- 5** Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions f et g suivantes :

a. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 1$, sur $\mathbb{R}$
 b. $g(x) = \frac{4}{x}$, sur $]0; +\infty[$.

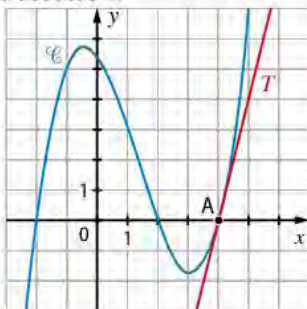
Automatismes

Calculs numériques et algébriques

- 6** Calculer, en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :
- a. $A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \times \frac{2}{3} + 1$ b. $B = \frac{\frac{5}{8} - \frac{5}{6}}{\frac{3}{4} - 2}$
- 7** Soit x un réel. Dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes.
 a. $2x^2 - 8x + 8$ b. $\frac{10x - 5}{1 - x}$ c. $3x^2 - 10x + 3$
- 8** Soit x un réel.
 Développer et réduire les expressions suivantes.
 a. $A = (x + 1)(2x - 3) - 3x - 4(5 - x)$
 b. $B = (2x - 3)^2 - (x + 2)^2$

Fonctions

- 9** Questions de méthodes
 On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 4.



- Comment déterminer l'image de 0 par f ?
- Comment déterminer le (ou les) antécédent(s) de 3 par f ?
- Comment déterminer $f'(4)$?
- Comment dresser le tableau de signes de f ?
- Comment déterminer le tableau de signes de la dérivée f' de f ?

- 10** Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère. On donne $f(3) = 4$ et $f'(3) = 1$.

- Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3?
- Déterminer une équation de cette tangente.

- 11** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse -2 .

- 12** On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 5$.

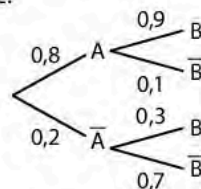
- Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.
- En déduire le tableau de variations de f .

Statistiques et probabilités

13 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.
 On considère l'arbre pondéré ci-contre.

- a. $P(A) = 0,8$ b. $P_A(B) = 0,9$
 c. $P(\bar{A} \cap B) = 0,5$ d. $P_{\bar{B}}(A) = 0,1$
 e. $P(B) = 0,78$
 f. A et B sont indépendants.

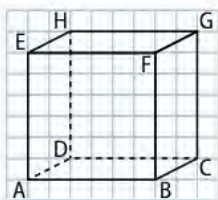
**14** Questions de méthodes

La variable aléatoire X prend pour valeurs le nombre de parties gagnées successivement par un joueur d'échec. La loi de X est donnée par :

Nombre k de parties gagnées	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,38	0,35	0,15	a	0,03

- Comment déterminer la valeur de a ?
- Comment calculer l'espérance de X ?
- Comment calculer l'écart-type de X ?

Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Lorsque l'exercice désigne le cube ABCDEFGH, il se réfère au cube représenté ci-contre.



Vecteurs de l'espace

Questions flash

15 ORAL VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier. On considère le cube ABCDEFGH.

1. Le point R tel que $\vec{AR} = \vec{HG}$ est confondu avec le point G.
2. Le point S tel que $\vec{BS} = \vec{BC} + \vec{BE}$ est confondu avec le point H.
3. Le point T défini par $\vec{CT} = \vec{CH} + \frac{1}{2}\vec{EF}$ est le milieu du segment [EF].

16 Remplacer les pointillés par le sommet du cube ABCDEFGH qui convient.

1. $\vec{B...} = \vec{BA} + \vec{BG}$
2. $\vec{B...} = \vec{BE} + \vec{DC} + \vec{GD}$
3. $\vec{C...} = \vec{CA} + \vec{DG}$
4. $\vec{A...} = \vec{AC} + \vec{DE} + \vec{BD}$

17 1. Reproduire le cube ABCDEFGH.

2. Placer le point K tel que $\vec{AK} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{BC}$.
3. Placer le point L tel que $\vec{EL} = \vec{EH} + \frac{1}{3}\vec{EF} + \vec{EA}$.

18 Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{AB}$ en fonction du vecteur $\vec{AC}$.

1. $4\vec{AB} + 3\vec{BC} = \vec{0}$
2. $2\vec{AB} - 3\vec{AC} = \vec{BC}$

19 On considère le cube ABCDEFGH.

Exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

- a. $\vec{AF}$
- b. $\vec{AH}$
- c. $\vec{AG}$
- d. $\vec{EB}$
- e. $\vec{CF}$
- f. $\vec{BH}$

Alignement et coplanarité

Question flash

20 ORAL Citer au moins deux méthodes qui permettent de justifier que trois points A, B et C de l'espace sont alignés.

21 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $3\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0}$ ne sont pas coplanaires.
2. A, B et C sont trois points non alignés. Le point M de l'espace tel que $\vec{AM} = 3\vec{AB} + 5\vec{AC}$ appartient au plan (ABC).

22 ABCD est un tétraèdre. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par $\vec{u} = 9\vec{AB} - 6\vec{AC} + 3\vec{AD}$ et $\vec{v} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC} + \vec{AD}$ sont colinéaires.

23 On considère le cube ABCDEFGH.

1. Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$ sont-ils coplanaires ?
2. a. Donner un représentant du vecteur $\vec{AD}$ dans le plan (BCG).
b. Les vecteurs $\vec{AD}$, $\vec{CF}$ et $\vec{BG}$ sont-ils coplanaires ?
3. Les vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AB}$ sont-ils coplanaires ?

24 A, B et C sont trois points non alignés et D est le point tel que $-3\vec{AD} + 5\vec{BD} + 2\vec{CD} = \vec{0}$.

1. Justifier que $\vec{AD}$, $\vec{BD}$ et $\vec{CD}$ sont coplanaires.
2. a. Justifier que $\vec{BD} = -\vec{AB} + \vec{AD}$.
b. Justifier que $\vec{CD} = -\vec{AC} + \vec{AD}$.
c. En déduire que $\vec{AD} = \frac{5}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

Positions relatives de droites et de plans

Questions flash

25 ORAL QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

On considère le cube ABCDEFGH.

1. La droite (DC) est :
a. sécante au plan (ABC)
b. incluse dans (ABC)
c. strictement parallèle à (ABC)
2. La droite (AB) est :
a. sécante au plan (ADF)
b. incluse dans (ADF)
c. strictement parallèle à (ADF)
3. La droite (HC) est :
a. sécante au plan (ABF)
b. incluse dans (ABF)
c. strictement parallèle à (ABF)

26 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

On considère le cube ABCDEFGH.

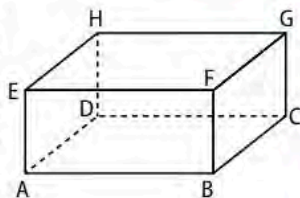
1. $\vec{EG}$ appartient à la direction du plan (BEG).
2. Les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{HG}$ engendrent la direction du plan (EFG).
3. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ engendrent la direction du plan (ABC).

27 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Deux droites de l'espace sont soit sécantes, soit parallèles.

28 ABCDEFGH est le parallépipède rectangle représenté ci-contre :



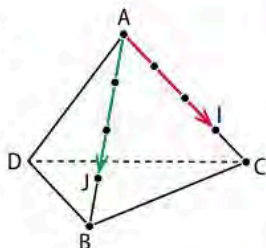
Pour chacun des couples de plans qui suivent, préciser si ces plans sont sécants, confondus ou strictement parallèles.

S'ils sont sécants, préciser leur droite d'intersection.

1. (ABC) et (FGH)
2. (ABF) et (AEG)
3. (EFG) et (EHF)
4. (ADE) et (BFH)

29 Dans le tétraèdre ABCD, on place les points I et J tels que $\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AC}$ et $\vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AB}$.

1. Montrer que $\vec{JI} = \frac{3}{4}\vec{BC}$.
2. Que peut-on en déduire pour la droite (IJ) et le plan (BCD) ?



30 On considère le tétraèdre ABCD ci-dessus. Les points E et F sont tels que $\vec{AE} = \vec{BC}$ et $\vec{AF} = \vec{BD}$.

1. $(\vec{BC}; \vec{BD})$ est-elle une base de (BCD) ?
2. Que peut-on dire des plans (AEF) et (BCD) ?

Repérage dans l'espace

Questions flash

31 1. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. On pose : $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

2. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quelles sont les coordonnées du point A tel que $\vec{OA} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$?

32 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier. Soit le cube ABCDEFGH.

On se place dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. Dans ce repère :

1. Les coordonnées de A sont $(0; 0; 0)$.
2. Les coordonnées de C sont $(1; 0; 1)$.
3. Les coordonnées de F sont $(1; 1; 0)$.
4. Les coordonnées de G sont $(1; 1; 1)$.

33 Soit $\vec{u}(2; 4; -3)$ et $\vec{v}(0; -5; 7)$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

34 Soit A(9; -4; 1) et B(-1; 4; 3).

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$.
2. Calculer les coordonnées du milieu I de [AB].

35 Soit A(-1; 2; 3), B(0; -1; 2) et C(2; -7; 0).

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ puis celles du vecteur $\vec{AC}$.
2. a. Justifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- b. Que peut-on en déduire ?

36 On considère les points A(1; 0; 4), B(2; 0; 6), C(3; 4; 0) et D(2; 4; -2).

Justifier que ABCD est un parallélogramme.

37 Soit $\vec{u}(3; 1; 2)$, $\vec{v}(3; -2; 4)$ et $\vec{w}(-3; 8; -8)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
2. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

38 Soit $\vec{u}(-3; 2; 4)$, $\vec{v}(-1; 2; 1)$ et $\vec{w}(2; 0; -3)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.
2. Que peut-on en déduire ?

Représentation paramétrique d'une droite

Question flash

39 ORAL VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

La droite d de vecteur directeur $\vec{u}(3; 2; 4)$ et passant par le point A(1; 5; 3) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

40 Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de d .
2. Déterminer les coordonnées du point A de d de paramètre 1.
3. Déterminer les coordonnées du point B de d de paramètre 0.
4. E est le point de d de cote 1.

Déterminer le paramètre t correspondant au point E puis les coordonnées de E.

41 A(-3; 2; 8) et B(4; 5; -2) sont deux points de l'espace.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$.
2. En déduire une représentation paramétrique de la droite (AB).
3. Soit C le point de (AB) d'abscisse -11.
- a. Déterminer le paramètre correspondant au point C dans la représentation paramétrique obtenue en question 2.
- b. En déduire les coordonnées de C.

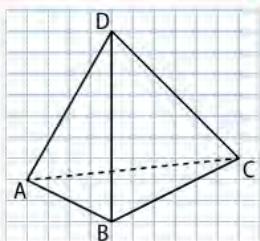
42 Soit les droites d et d' de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 9t \\ z = 5 - 12t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 3 - 6k \\ z = 2 + 8k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites.
2. Démontrer que les droites d et d' sont parallèles.

Vecteurs de l'espace

Pour les exercices 43 à 46, reproduire sur une feuille quadrillée le tétraèdre ABCD ci-contre.



43 Capacité 1, p. 51

Construire les points E et F tels que :

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AD} \text{ et } \vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}.$$

44 Construire les points K et L tels que :

$$\vec{CK} = \frac{2}{3}\vec{CB} + \frac{1}{6}\vec{CD} \text{ et } \vec{AL} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}.$$

45 1. Le point G est tel que $6\vec{CG} = 4\vec{CD} + 2\vec{CB}$.

a. Exprimer $\vec{CG}$ en fonction de $\vec{CD}$ et $\vec{CB}$.

b. Placer le point G sur la figure.

2. Le point H est tel que $3\vec{HA} + \vec{HD} = \vec{0}$.

a. Exprimer $\vec{AH}$ en fonction de $\vec{AD}$.

b. Placer le point H sur la figure.

46 1. Placer I, J et K, les milieux respectifs des arêtes [CD], [BD] et [BC].

2. Construire les points E, F et G tels que :

$$\vec{AE} = 2\vec{AI}, \vec{AF} = 2\vec{AJ} \text{ et } \vec{AG} = 2\vec{AK}.$$

3. a. Justifier que BCEF est un parallélogramme.

b. Pourquoi les segments [BE], [CF] et [DG] ont-ils le même milieu ? Justifier.

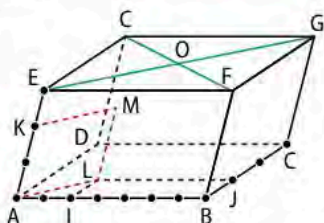
47 Capacité 2, p. 51

ABCDEFGH est un parallélépipède. Les graduations sur chaque arête sont régulières.

1. Exprimer $\vec{BK}$ en fonction $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$.

2. Exprimer $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{EA}$ et $\vec{EH}$.

48 ABCDEFGH est un parallélépipède. Les graduations sur chaque arête sont régulières. De plus, BILJ et ALMK sont des parallélogrammes.



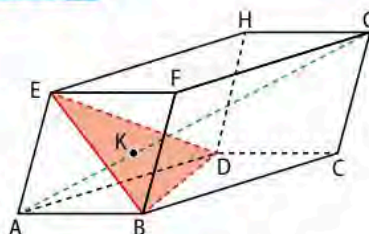
1. Exprimer $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

2. Exprimer $\vec{AO}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

49 Dans un tétraèdre ABCD, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD]. Exprimer $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$.

Alignement et coplanarité

50 Capacité 3, p. 53



ABCDEFGH est un parallélépipède et K est le point de l'espace tel que $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{1}{3}\vec{BE}$.

1. Démontrer que $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 3\vec{AK}$.

2. a. Exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

b. En déduire que A, K et G sont alignés.

51 ABCDEFGH est un cube.

Les points K et L sont tels que :

$$\vec{AK} = \frac{3}{2}\vec{AC} \text{ et } \vec{AL} = 3\vec{AE}.$$

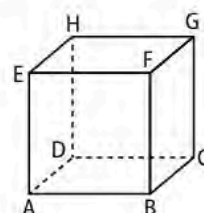
1. Réaliser une figure.

2. a. Exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$.

b. En déduire que $\vec{KG} = -\frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AE}$.

3. a. Exprimer $\vec{KL}$ en fonction de $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$.

b. En déduire que K, G et L sont alignés.



52 ABCD est un tétraèdre.

Soit les points E, F et G tels que :

$$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB}, \vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$\text{et } \vec{AG} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AD}.$$

1. Exprimer $\vec{EF}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

2. Exprimer $\vec{EG}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

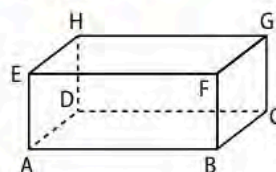
3. En déduire que E, F et G sont alignés.

53 LOGIQUE 1. La proposition suivante est-elle vraie ?

« Si les points A, B, C et D sont alignés, alors les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires. »

2. La propriété réciproque est-elle vraie ?

Pour les exercices 54 et 55, on considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.



54 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Soit M le point tel que $\vec{DM} = 2\vec{DC} + \vec{FC}$.

Les points E, C et M sont alignés.

55 Soit les points I, J et K tels que :

$$\vec{EI} = \frac{2}{3}\vec{EH}, \vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BG} \text{ et } \vec{AK} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{BC}.$$

1. Exprimer les vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{AJ}$ et $\vec{AK}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.
2. Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

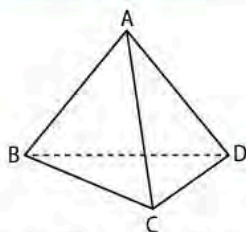
56 Une question ouverte

ABCD est un tétraèdre.

On nomme E le milieu de [AB], F le milieu de [CD], G tel que $\vec{CG} = \vec{DA}$ et H tel que $\vec{CH} = k\vec{AB}$, où k est un réel.

Existe-t-il une valeur de k pour laquelle les vecteurs $\vec{GE}$ et $\vec{FH}$ sont colinéaires ?

Piste → Voir p. 466



Pour les exercices 57 à 60, on considère le tétraèdre ABCD représenté ci-contre.

57 Capacité 4, p. 53

I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD] et [CD].

1. Justifier que $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.
2. Justifier que $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
3. En déduire que $\vec{IJ}$, $\vec{KL}$ et $\vec{AB}$ sont coplanaires.

58 I est le milieu de [BC], J est le milieu de [BD], E et F sont définis par les égalités vectorielles $\vec{CE} = 2\vec{CD}$ et $\vec{BF} = \vec{AE}$.

1. Exprimer $\vec{AB} + \vec{AC}$ en fonction de $\vec{AI}$.
2. a. Démontrer que $\vec{AF} - 2\vec{AI} = 2\vec{CD}$.
- b. En déduire que $\vec{AF} - 2\vec{AI} = 4\vec{IJ}$.
- c. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{AI}$, $\vec{AJ}$ et $\vec{AF}$?

59 Le point E est tel que :

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD} - \frac{1}{2}\vec{BD}.$$

Montrer que les vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires.

60 Les points M, N, P et Q sont définis par :

$$\vec{AM} = 2\vec{AB}, \vec{AN} = 3\vec{AC}, \vec{AP} = \frac{4}{3}\vec{AD} \text{ et } \vec{AQ} = -4\vec{AB} + 18\vec{AC} - 4\vec{AD}.$$

1. Exprimer les vecteurs $\vec{MN}$, $\vec{MP}$ et $\vec{MQ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.
2. a. Exprimer $6\vec{MN} - 3\vec{MP}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.
- b. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{MN}$, $\vec{MP}$ et $\vec{MQ}$?

MÉTHODE À L'ORAL

61 On définit les points E, F et G par les égalités vectorielles :

$$\vec{AE} = 3\vec{AB} + 6\vec{AC}, \vec{AF} = 2\vec{AB} + 4\vec{AC} \text{ et } \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AD}.$$

1. Comment démontrer que les points A, E et F sont alignés ?
2. Comment démontrer que (FG) et (DE) sont parallèles ?
3. Quels points sont coplanaires d'après les deux questions précédentes ?

62 LOGIQUE 1. La proposition suivante est-elle vraie ?

« Si les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas coplanaires, alors ils ne sont pas colinéaires deux à deux. »

2. La propriété réciproque est-elle vraie ?

63 ABCDEFGH est un cube.

Le point K est tel que :

$$\vec{AK} = 6\vec{AB} + 2\vec{AD} - 3\vec{AE}.$$

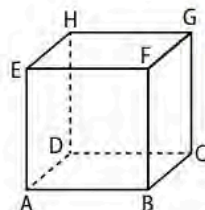
1. Exprimer $\vec{EG}$, $\vec{EB}$, $\vec{EK}$ et en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

2. Déterminer deux réels x et y tels que :

$$\vec{EK} = x\vec{EG} + y\vec{EB}.$$

3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{EK}$, $\vec{EG}$ et $\vec{EB}$?

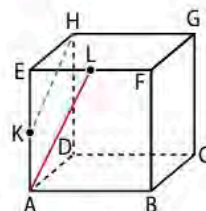
4. Que peut-on alors dire des points B, E, G et K ?



Plans et droites de l'espace

64 Capacité 5, p. 55

ABCDEFGH est un cube, K est le milieu de [AE] et L est le milieu de [EF].



1. a. Justifier que K appartient au plan (ADH).
- b. Justifier que les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{KH}$ ne sont pas colinéaires.
- c. Que peut-on en déduire pour les droites (AD) et (KH) ?
2. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que les droites (AL) et (KH) ne sont pas parallèles.

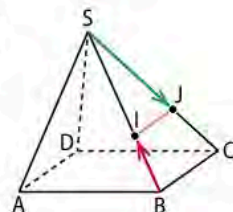
65 SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme.

Les points I et J sont tels que :

$$\vec{BI} = \frac{1}{3}\vec{BS} \text{ et } \vec{SJ} = \frac{2}{3}\vec{SC}.$$

1. Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

2. Démontrer que les droites (AJ) et (DI) sont sécantes.



66 LOGIQUE 1. La proposition suivante est-elle vraie ?

« Si deux droites de l'espace n'ont pas de point commun, alors ces droites sont strictement parallèles. »

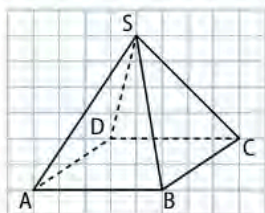
2. La propriété réciproque est-elle vraie ?

67 ABCD est un tétraèdre. Les points E, F et G sont tels que :

$$\vec{BE} = \frac{1}{5}\vec{BC}, \vec{EF} = \frac{1}{5}\vec{CD} \text{ et } \vec{EG} = \frac{1}{5}\vec{CA}.$$

1. Justifier que F est un point de (BD).
2. Justifier que G est un point de (AB).
3. Démontrer que (FG) et (AD) sont parallèles.

68 1. Reproduire la pyramide SABCD ci-dessous.



2. Placer les points E et F définis par $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AS}$ et $\vec{SF} = \frac{3}{4}\vec{SC}$.

3. Démontrer que les droites (EF) et (AC) sont sécantes puis construire leur point d'intersection.

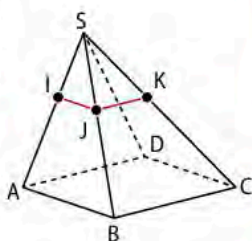
69 Capacité 6, p. 55

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme. Les points I, J et K sont tels que :

$$\vec{SI} = \frac{1}{3}\vec{SA}, \vec{SJ} = \frac{1}{3}\vec{SB} \text{ et } \vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SC}.$$

1. Justifier que $\vec{IJ}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires puis que $\vec{JK}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires.

2. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.



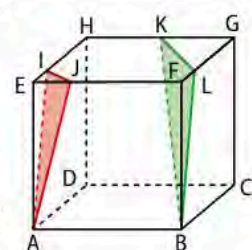
70 ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K et L sont tels que :

$$\vec{EI} = \frac{1}{3}\vec{EH}, \vec{EJ} = \frac{1}{4}\vec{EF}, \vec{FL} = \frac{1}{3}\vec{FG} \text{ et } \vec{GL} = \frac{1}{2}\vec{GH}.$$

1. Justifier que $\vec{AI} = \vec{BL}$.

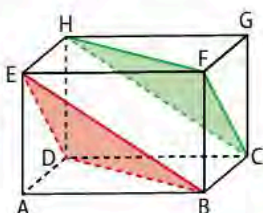
2. a. Exprimer les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{KL}$ en fonction des vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{FG}$.

b. Démontrer que les plans (AIJ) et (BKL) sont parallèles.



71 ABCD est un tétraèdre. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des arêtes [BC], [AC] et [CD]. Démontrer que les plans (IJK) et (ABD) sont parallèles.

72 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Démontrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.



73 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Les points M, N et P sont définis par les égalités :

$$\vec{GM} = \frac{1}{4}\vec{GF}, \vec{EN} = \frac{3}{4}\vec{EH} \text{ et } \vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AD}.$$

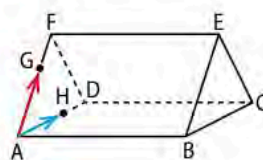
1. Faire une figure.

2. Démontrer que $\vec{MN} = \vec{GH}$.

3. Démontrer que les plans (AMN) et (GHP) sont parallèles.

Piste 3. : On peut commencer par montrer que les vecteurs $\vec{AN}$ et $\vec{PH}$ sont égaux.

74 ABCDEF est un polyèdre tel que les faces ABCD, ABEF et CEFD sont des rectangles.



Les points G et H sont tels que :

$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AF} \text{ et } \vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AD}.$$

1. Justifier que les plans (BCE) et (ADF) sont parallèles.

2. Justifier que les plans (BCE) et (ECG) sont sécants. Préciser leur droite d'intersection d_1 .

3. a. Exprimer $\vec{GH}$ en fonction de $\vec{EC}$.

b. En déduire que H est un point du plan (ECG).

c. Justifier que les plans (ADF) et (ECG) sont sécants. Préciser leur droite d'intersection d_2 .

4. Que peut-on dire des droites d_1 et d_2 ? Justifier.

75 SABCD est une pyramide dont la base est le parallélogramme ABCD.

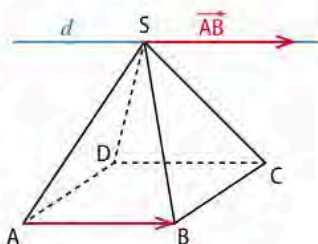
1. Justifier que la droite (AB) est parallèle au plan (SDC).

2. Justifier que les plans (SAB) et (SDC) sont sécants.

3. On appelle d la droite passant par S et de vecteur directeur $\vec{AB}$.

a. Pourquoi la droite d est-elle incluse dans le plan (SAB) ?

b. Démontrer que d est la droite d'intersection entre les plans (SAB) et (SDC).

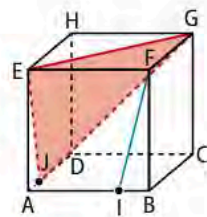


76 ABCDEFGH est un cube. I et J sont tels que $\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \frac{1}{4}\vec{AD}$.

1. Exprimer les vecteurs $\vec{EG}$, $\vec{EJ}$ et $\vec{IF}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

2. En déduire que $\vec{IF} = \frac{1}{4}\vec{EG} - \vec{EJ}$.

3. Que peut-on dire de la droite (IF) et du plan (EGJ) ?



77 VRAI/FAUX

ABCD est un tétraèdre. E est un point du segment [AC]. La parallèle à (AB) passant par E coupe [BC] en F.

Les points G et H sont les milieux respectifs des segments [AD] et [BD].

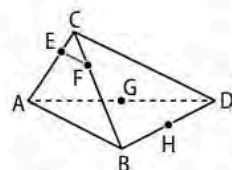
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. Les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

b. Les droites (EF) et (CD) sont parallèles.

c. Les droites (EF) et (GH) ne sont pas coplanaires.

d. La droite (GH) est l'intersection des plans (EFG) et (ABD).

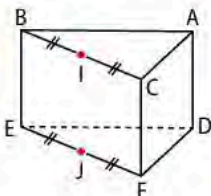


Base de plan, base de l'espace

78 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

1. Quelle droite passe par D et est dirigée par le vecteur $\vec{HF}$?
2. Quelle droite passe par F et est dirigée par le vecteur $\vec{ED}$?
3. De quel plan passant par le point E les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ engendrent-ils la direction ?
4. De quel plan passant par le point B les vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{CH}$ engendrent-ils la direction ?

Pour les exercices **79** et **80**, ABCDEF est un prisme à base triangulaire. I est le milieu de [BC] et J est celui de [EF].



79 Capacité 7, p. 57

1. Justifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ forment une base du plan (ABC).
2. a. Justifier que $(\vec{AI}, \vec{BC})$ est aussi une base du plan (ABC).
b. Compléter cette base pour former une base de l'espace.
3. $(\vec{AI}, \vec{AE}, \vec{JC})$ est-elle une base de l'espace ?

80 Capacité 8, p. 57

1. a. Décomposer le vecteur $\vec{AI}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$.
b. Décomposer le vecteur $\vec{AB}$ dans la base $(\vec{AI}, \vec{BC})$.
2. a. Décomposer le vecteur $\vec{AJ}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.
b. Décomposer le vecteur $\vec{DI}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.

81 ABCD est un tétraèdre.

On définit les points E, F et G par les égalités :

$$\vec{AE} + \vec{DE} = \vec{0}; \vec{AF} - \vec{BF} - \vec{CF} = \vec{0} \text{ et } \vec{BG} + \vec{CG} + \vec{DG} = \vec{0}.$$

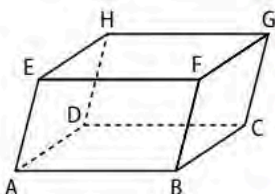
1. a. Que peut-on dire du point E ?
b. À quels plans appartiennent les points F et G ? Justifier.
2. a. Exprimer $\vec{AE}$ en fonction de $\vec{AD}$.
b. Exprimer $\vec{AF}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$.
c. En déduire l'expression du vecteur $\vec{EF}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.
3. a. Exprimer $\vec{AG}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.
b. En déduire que les points E, F et G sont alignés.

Repérage dans l'espace

Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

82 Soit les points A(3 ; 0 ; -1), B(5 ; 1 ; -2) et C(-3 ; 2 ; 3). Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

83 Soit les points A(1 ; -2 ; 3), B(1 ; 3 ; 2), D(-2 ; -1 ; 2) et E(3 ; 0 ; 6). Déterminer les coordonnées des points C, F, G et H de sorte que ABCDEFGH soit un parallélépipède.



84 Capacité 13, p. 61

On considère les vecteurs $\vec{u}(-5; 6; -4)$, $\vec{v}(1; 0; -2)$ et $\vec{w}(0; 3; 5)$.

1. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan.
2. Démontrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

Pour les exercices **85** à **87**, indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan en justifiant.

85 $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(4; 5; 6)$

86 $\vec{u}(3; 9; -6)$ et $\vec{v}(2; 6; -4)$

87 $\vec{u}(4; -2; 1)$ et $\vec{v}(2; -1; 0)$

88 Soit t un réel. Déterminer l'unique valeur de t pour laquelle les vecteurs $\vec{u}(t-5; t; -2)$ et $\vec{v}(3; -2; t)$ sont colinéaires.

Pour les exercices **89** et **90**, démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

89 $\vec{u}(1; 0; 3)$, $\vec{v}(2; 1; 0)$ et $\vec{w}(0; -4; -2)$.

90 $\vec{u}(3; 3; 3)$, $\vec{v}(6; 0; 9)$ et $\vec{w}(2; -2; 2)$.

Pour les exercices **91** et **92**, démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne forment pas une base de l'espace.

91 $\vec{u}(0; 3; 2)$, $\vec{v}(3; 9; 18)$ et $\vec{w}(1; 0; 4)$.

92 $\vec{u}(1; -1; 0)$, $\vec{v}(0; 2; 1)$ et $\vec{w}(2; 0; 1)$.

Pour les exercices **93** et **94**, indiquer si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace en justifiant.

93 $\vec{u}(3; -9; 6)$, $\vec{v}(1; -3; 2)$ et $\vec{w}(-2; 6; -4)$.

94 $\vec{u}(0; 4; -5)$, $\vec{v}(5; 1; 3)$ et $\vec{w}(2; -6; 0)$.

95 Capacité 14, p. 61

On admet que les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 0)$, $\vec{v}(1; 1; 0)$ et $\vec{w}(1; 1; 1)$ forment une base de l'espace. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{r}(3; 1; 2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

96 On admet que les vecteurs $\vec{u}(0; 1; 1)$, $\vec{v}(2; 3; 4)$ et $\vec{w}(1; 1; 0)$ forment une base de l'espace. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{r}(4; 2; 1)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

97 Soit les vecteurs $\vec{u}(0; 1; 2)$, $\vec{v}(1; 1; 30)$ et $\vec{w}(-1; 3; 1)$.

1. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{r}(5; -4; 5)$ dans cette base.

Alignement et coplanarité dans un repère

98 Soit les points A(-1 ; 6 ; -2), B(3 ; 5 ; 1) et C(19 ; 1 ; 13). Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

99 Les points A(2 ; 3 ; 4), B(3 ; 5 ; 7) et C(1 ; 2 ; 3) sont-ils alignés ? Justifier.

100 Soit $A(-3; 2; 1)$, $B(-1; 6; 7)$, $C(8; 6; 4)$ et $D(4; 4; 2)$.

- Déterminer les coordonnées du point E tel que $\vec{CE} = 3\vec{CD}$.
- En déduire que les points A, B et E sont alignés.

101 **LOGIQUE** La proposition suivante est-elle vraie ?

« Si une des coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ est nulle et que la coordonnée correspondante du vecteur $\vec{CD}$ n'est pas nulle, alors $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne peuvent pas être colinéaires. »

102 **Capacité 12, p. 60**

Soit $A(-2; -14; -24)$, $B(-2; 8; 4)$, $C(-1; 3; -7)$ et $D(-3; 2; 1)$.

- Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

103 Soit $A(1; 0; 1)$, $B(3; 14; 9)$, $C(12; 5; 0)$ et $D(-2; 3; 4)$.

- Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

104 Les points $A(2; 3; 4)$, $B(3; 0; 4)$, $C(5; 6; 7)$ et $D(8; 7; 13)$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

105 Soit $A(-3; 0; 1)$, $B(4; 2; 3)$, $C(-5; 2; -3)$ et $D(3; 0; 5)$.

- Montrer que les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires.
- Que peut-on en déduire pour les points A, B, C et D ?

106 Soit $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; 1)$ et $C(2; -1; 3)$.

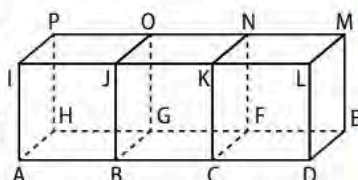
- Démontrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- Pour quelle valeur de z le point $D(1; -3; z)$ appartient-il au plan (ABC) ?

107 Soit $A(1; 2; 3)$, $B(4; -5; 6)$, $C(0; 0; 3)$ et $D(7; 8; -9)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.
- Démontrer que ces vecteurs ne sont pas coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B, C et D ?
- Calculer les coordonnées de I, milieu de [AB], et de J, milieu de [CD].
- Les points E et F sont tels que IACE et IBDF sont des parallélogrammes. Déterminer les coordonnées de E et F.
- Justifier que J est le milieu du segment [EF].

108 La figure ci-contre est composée de trois cubes identiques.

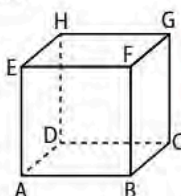
- Sans justifier, donner les coordonnées de chacun des points de cette figure dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AH}, \vec{AI})$.



- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{DN}$, $\vec{AM}$ et $\vec{HC}$ dans ce repère.
- Ces vecteurs sont-ils coplanaires ? Justifier.

109 ABCDEFGH est un cube.

- Donner les coordonnées des sommets du cube dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
- Les points I et J sont tels que $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AD}$.



Calculer leurs coordonnées dans le repère.

- Justifier que les vecteurs $\vec{IF}$, $\vec{EG}$ et $\vec{EJ}$ sont coplanaires.
- Que peut-on en déduire pour la droite (IF) et le plan (EGJ) ?

Représentation paramétrique d'une droite

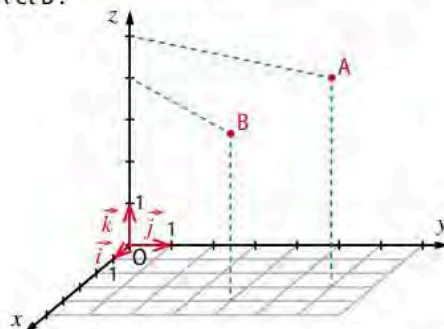
Pour les exercices **110** et **111**, déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

110 $A(3; 5; -2)$ et $\vec{u}(3; 2; -1)$.

111 $A(2; 0; -2)$ et $\vec{u}(3; -5; 0)$.

112 **Capacité 9, p. 59**

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on a représenté les points A et B :



- Lire graphiquement les coordonnées de ces points.
- Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$.
- Déterminer deux représentations paramétriques différentes de la droite (AB).

Pour les exercices **113** et **114**, déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

113 $A(3; -1; 0)$ et $B(5; 2; -3)$.

114 $A(1; 2; -2)$ et $B(6; -4; 3)$.

115 Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(5; 2; -1)$ et parallèle à la droite (BC) avec $B(4; -3; 1)$ et $C(0; 5; 7)$.

116 **Capacité 10, p. 59**

Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 8 - 7t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

- Le point $A(-4; 1; 3)$ appartient-il à la droite d ?
- Donner les coordonnées d'un autre point de d , ainsi que celles d'un vecteur directeur de d .
- d est-elle parallèle à d' de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 - 14k \\ z = 5 + 4k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} ?$$

117 Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 - 2t \text{ avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = 4t \end{cases}$$

1. Le point $A(3 ; 0 ; 4)$ appartient-il à la droite d ?
2. Donner les coordonnées d'un point de d , ainsi que celles d'un vecteur directeur de d .
3. Soit les points $B(3 ; -3 ; 13)$ et $C(3 ; 5 ; -3)$. Les droites d et (BC) sont-elles parallèles ?

118 Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 3t \text{ avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 7t \end{cases}$$

1. Vérifier que le point $A(-4 ; 5 ; -6)$ appartient à la droite d .
2. Déterminer les coordonnées de E , le point de la droite d ayant pour paramètre 3.
3. On considère les points $B(2 ; 0 ; 4)$ et $C(4, 3, 2)$.
 - a. Démontrer que A , B et C définissent un plan.
 - b. Démontrer que E appartient au plan (ABC) .
 - c. Quelle est la position relative de la droite d avec le plan (ABC) ?

119 Soit les points $A(3 ; -2 ; 4)$ et $B(5 ; 2 ; 0)$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre la droite (AB) et le plan $(O ; \vec{i}, \vec{k})$.

120 VRAI/FAUX

Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = -2 + 6t \text{ avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La droite d passe par le point $A(4 ; 6 ; -1)$.
2. $\vec{u}(6 ; -3 ; 9)$ est un vecteur directeur de d .
3. La droite d coupe le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ en $B(5 ; 10 ; 0)$.
4. Le point $C(9 ; 16 ; -1)$ appartient à la droite d .

121 Soit d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - 2k \\ y = 1 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}. \\ z = -9 + 3k \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées de E , F et G , points d'intersection respectifs entre d et les plans :

- a. $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
- b. $(O ; \vec{i}, \vec{k})$
- c. $(O ; \vec{j}, \vec{k})$

122 La droite d passant par le point $A(2 ; 5 ; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3 ; -4 ; 0)$ est-elle parallèle au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$? Justifier.

123 Capacité 11, p. 60

Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 8 - t \\ y = -6 + 2t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \\ z = 15 + t \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 6 - 6k \text{ avec } k \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

Démontrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

124 Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = 20 + t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = 2 - 3k \text{ avec } k \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + k \end{cases}$$

Démontrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

125 Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + 3k \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } \\ z = 2k \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - t \text{ avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

Démontrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

126 La droite d passe par le point $A(1 ; 1 ; 0)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 1 ; -1)$. La droite d' passe par le point $B(0 ; 1 ; -1)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{v}(1 ; 2 ; 1)$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
2. Justifier qu'alors d et d' sont sécantes.
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

127 Une question ouverte

Soit $A(3 ; 0 ; 1)$, $B(-1 ; 0 ; 1)$, $C(1 ; 2 ; 3)$, $E(-1 ; -2 ; -3)$ et $F(6 ; 3 ; 6)$.

Justifier que la droite (EF) coupe le plan (ABC) en un point appartenant à un des côtés du triangle ABC .

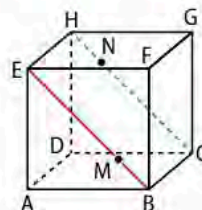
Piste → Voir p. 466

Problème de synthèse

128 = CALCULER  RAISONNER

ABCDEFGH est un cube.

On définit les points M et N tels que $\vec{BM} = \frac{1}{4}\vec{BE}$ et $\vec{CN} = \frac{3}{4}\vec{CH}$.



1. Donner les coordonnées de chacun des sommets du cube dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
2. a. Calculer les coordonnées des points M et N dans ce repère.
b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN) dans ce repère.
3. c. En déduire les coordonnées de P , point d'intersection entre (MN) et le plan (ABD) .
3. a. Sans effectuer de calcul, justifier que P , B et G ne sont pas alignés.
b. Sans effectuer de calcul, justifier que P , B et C sont alignés.
4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC) .
b. En déduire le paramètre correspondant pour le point P .

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

Colinéarité

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Coplanarité

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe trois réels a , b et c non tous nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Base de l'espace

- Triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.
- Coordonnées de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ dans cette base : $(x; y; z)$.
- Repère de l'espace
- Quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.

Vecteurs de l'espace

Caractérisation vectorielle d'un plan

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de la direction d'un plan $\mathcal{P}$, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec x et y réels quelconque, est un plan passant par A .

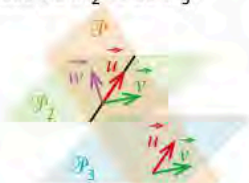
Représentation paramétrique

Droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

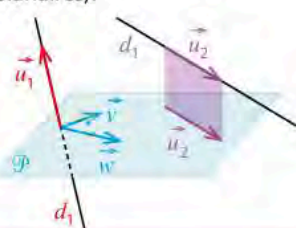
Plans de l'espace

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon la droite d ($\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires).
- $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont parallèles : $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}_2$ et de $\mathcal{P}_3$.

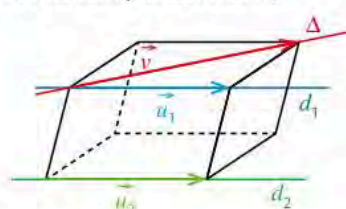


Droites de l'espace

- d_1 et $\mathcal{P}$ sont sécants en M ($\vec{u}_1, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires).
- d_2 est parallèle à $\mathcal{P}$ ($\vec{u}_2, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires).



- d_1 et d_2 sont parallèles ($\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires).
- d_1 et Δ sont sécantes ($\vec{u}_1$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires).
- d_2 et Δ ne sont pas coplanaires ($\vec{u}_2$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires).



Faire le point avec des exercices corrigés

Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Utiliser la géométrie non repérée

* 129 10 min Capacité 1 et 2, p. 51

ABCD est un tétraèdre. E et F sont définis par :

$$\vec{AE} = \frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \text{ et } \vec{AF} = \frac{1}{5}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

1. Réaliser une figure en choisissant de façon pertinente les longueurs des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.
2. Exprimer $\vec{EF}$ en fonction de $\vec{BD}$. Que peut-on en déduire ?

* 130 5 min Capacité 2, p. 51

Soit trois points A, B et C et $\vec{u} = 2\vec{AC} - 2\vec{BC} + 4\vec{BA}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

* 131 15 min Capacité 3, p. 53

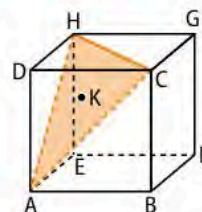
ABCDEFGH est un cube. Le point K est tel que $\vec{AK} + \vec{CK} + \vec{HK} = \vec{0}$.

1. a. Exprimer $\vec{AC}$ et $\vec{AH}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

- b. En déduire que :

$$\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE}.$$

2. Justifier que D, K et F sont alignés.



132 20 min Capacité 4, p. 53

ABCD est un tétraèdre. M, N et P sont définis par :

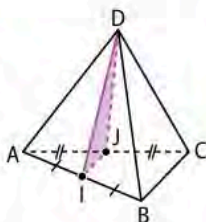
$$\vec{CM} = \vec{AC}, \vec{CN} = \vec{BM} \text{ et } \vec{AP} = \vec{DN}.$$

- Justifier l'égalité $\vec{DP} = \vec{DA} + \vec{DM} + \vec{BC}$.
- En déduire que les vecteurs $\vec{DP}$, $\vec{DC}$ et $\vec{BC}$ sont coplanaires.

133 10 min Capacités 5 et 6, p. 55

On considère le tétraèdre ABCD. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC].

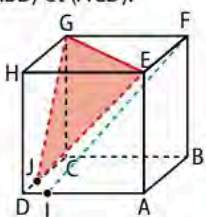
- Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
- Les plans (DIJ) et (BCD) sont-ils parallèles ? Justifier.
- Déterminer l'intersection des plans (ABD) et (ACD).



134 15 min Capacité 6, p. 55

ABCDEFGH est un cube. I et J sont définis par $\vec{AI} = \frac{3}{5} \vec{AD}$ et $\vec{DJ} = \frac{2}{5} \vec{DC}$.

- Justifier que les vecteurs $\vec{JI}$ et $\vec{GE}$ sont colinéaires.
- En déduire la position relative de la droite (FI) et du plan (EGJ).



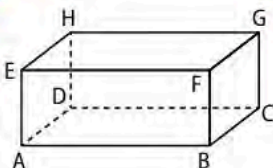
135 10 min Capacité 7, p. 57

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

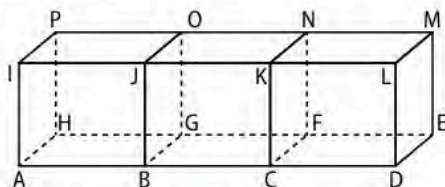
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

- $(\vec{AB}, \vec{BC})$ est une base du plan (ABC).
- $(\vec{BE}, \vec{CH})$ est une base du plan (EBC).
- $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base de l'espace.
- $(\vec{BE}, \vec{AH}, \vec{CA})$ est une base de l'espace.



136 10 min Capacité 8, p. 57

La figure ci-dessous est composée de trois parallélépipèdes rectangles identiques :



Décomposer les vecteurs $\vec{AN}$, $\vec{OC}$, et $\vec{HL}$ dans chacune des bases suivantes :

- $(\vec{AB}, \vec{AH}, \vec{AI})$
- $(\vec{KN}, \vec{KJ}, \vec{KB})$

Travailler en géométrie repérée

137 15 min Capacité 12, p. 60

Soit les points A(1 ; -2), B(0 ; 5 ; 5), C(6 ; -3 ; -5) et D(1 ; 2 ; 0).

- Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
- Le point E(2 ; 3 ; 1) appartient-il au plan (ABD) ? Justifier.

138 15 min Capacités 13 et 14, p. 61

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit les vecteurs $\vec{u}(1 ; -1 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; 7 ; -5)$, $\vec{w}(1 ; 17 ; -17)$ et $\vec{t}(7 ; -7 ; 19)$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$ forment une base d'un plan.
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
- Dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\vec{t}$ a pour coordonnées (4 ; 2 ; -1).
- Dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$, $\vec{w}$ a pour coordonnées (4 ; 2 ; -1).

139 20 min Capacités 13 et 14, p. 61

On considère les points A(2 ; -2 ; 1), B(0 ; -1 ; 3) et C(4 ; 1 ; -1).

- Calculer les coordonnées du milieu I de [BC].
- Calculer les coordonnées du point D de I par rapport au point A.
- Calculer les coordonnées du point E tel que : $\vec{BE} = \vec{BC} - 3\vec{AC}$.
- Calculer les coordonnées du point F tel que : $3\vec{BF} = 5\vec{CF}$.
- Les points D, E et F sont-ils alignés ? Justifier.

Utiliser une représentation paramétrique d'une droite

140 15 min Capacités 9 et 10, p. 59

VRAI/FAUX

Soit A(4 ; -2 ; 6) et soit d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 6t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- A est un point de d.
- $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$ est un vecteur directeur de d.
- La droite d coupe le plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{k}$) en B(-3 ; 2 ; 0).
- Une représentation paramétrique de la droite d' passant par A et parallèle à d est :

$$\begin{cases} x = 4k \\ y = -2k \\ z = 6k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

141 20 min Capacité 11, p. 60

La droite d passe par le point A(-1 ; 3 ; -3) et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(-3 ; 2 ; 1)$. La droite d' passe par le point B(1 ; 3 ; -1) et admet pour vecteur directeur $\vec{v}(-2 ; 1 ; 0)$.

- Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.
- Justifier qu'alors d et d' sont sécantes.
- Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

142 10 min Capacité 11, p. 60

Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -2k \\ z = -2 + 4k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

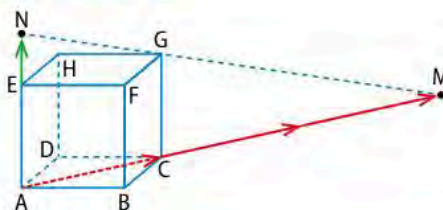
Les droites d et d' sont-elles parallèles, sécantes ou non coplanaires ? Justifier.

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Déterminer un alignement avec le calcul vectoriel

■ **Un exemple :** ABCDEFGH est un cube.

M et N sont les points de l'espace définis par $\vec{AM} = 3\vec{AC}$ et $\vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AE}$.
Démontrer que les points M, N et G sont alignés



Ma réflexion	→ Ma démarche
Que dois-je faire ?	Je dois démontrer que des points sont alignés. ► Traduire cet alignement par une propriété sur des vecteurs.
Comment montrer que deux vecteurs sont colinéaires ?	Je peux décomposer chacun des vecteurs dans une même base d'un plan ou de l'espace. ► Exprimer $\vec{MN}$ en fonction des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$.
Comment continuer ?	Je peux exprimer $\vec{GN}$ en fonction des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$. ► Utiliser l'égalité $\vec{GN} = \vec{GA} + \vec{AN}$ et les propriétés du cube pour obtenir la décomposition souhaitée.
Comment conclure ?	Je recherche le coefficient de colinéarité entre $\vec{MN}$ et $\vec{GN}$. ► Calculer $3\vec{GN}$ puis conclure.

Pour chaque exercice suivant, on se place dans le cube ABCDEFGH.

143 On définit les points I, J et K par les égalités $\vec{BI} = \frac{2}{3}\vec{BE}$, $\vec{EJ} = \frac{1}{2}\vec{EG}$ et $\vec{BK} = 2\vec{BG}$.

Exprimer chacun des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ en fonction des vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{EG}$. En déduire que les points I, J et K sont alignés.

144 P est le point défini par l'égalité $\vec{BP} = \frac{2}{3}\vec{BD} + \frac{1}{3}\vec{DE}$.

a. Exprimer le vecteur $\vec{BD}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ et le vecteur $\vec{DE}$ en fonction de $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

b. En déduire l'égalité $3\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$, puis démontrer que les points A, P et G sont alignés.

PARCOURS 2 Déterminer et utiliser une représentation paramétrique d'une droite

■ **Un exemple :** On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Soit A(2 ; -1 ; 1) et B(3 ; 1 ; 5) deux points.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) et en déduire les coordonnées du point C de (AB) ayant pour cote 0.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on ?	Je dois déterminer une représentation paramétrique d'une droite. ► Préciser cette droite.
Comment démarrer ?	Je dois connaître un point et un vecteur directeur de la droite. ► Préciser les coordonnées d'un point puis déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur. En déduire une représentation paramétrique de la droite.
Comment poursuivre ?	J'utilise le fait que C a 0 comme troisième coordonnée. ► Déterminer la valeur du paramètre telle que z_C soit égal à 0.
Comment conclure ?	Je remplace la valeur du paramètre dans les autres équations. ► Vérifier que $x_C = 2$ et $y_C = -1$ puis rédiger une conclusion.

145 Soit A(5 ; 0 ; -2) et B(1 ; -5 ; -1) deux points de l'espace. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) et en déduire les coordonnées du point C de (AB) ayant pour ordonnée 15.

146 Soit A(7 ; -2 ; 4) et B(-1 ; 2 ; -4) deux points de l'espace. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) et en déduire les coordonnées du point C de (AB) ayant pour abscisse -5.

PARCOURS 3 Barycentre d'une famille de points pondérés

147 Existence et unicité des barycentres

Soit A et B sont deux points distincts de l'espace.

1. a. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $2\vec{GA} + 5\vec{GB} = \vec{0}$.

b. Construire le point G.

2. Existe-t-il un point H tel que $3\vec{HA} - 3\vec{HB} = \vec{0}$?

3. Soit (a, b) un couple de réels tels que $a + b$ ne soit pas nul.

Montrer qu'il existe un unique point K tel que $a\vec{KA} + b\vec{KB} = \vec{0}$.

Lorsque $a + b$ n'est pas nul, on dit que K est le **barycentre** du système de points pondérés $\{(A; a), (B; b)\}$.

4. Soit C un point n'appartenant pas à la droite (AB).

Montrer qu'il existe un unique point P tel que $3\vec{PA} + 2\vec{PB} - \vec{PC} = \vec{0}$.

Lorsque a, b et c sont trois réels tels que $a + b + c$ n'est pas nul, il existe un unique point Q tel que $a\vec{QA} + b\vec{QB} + c\vec{QC} = \vec{0}$. Ce point Q est appelé **barycentre** du système de points pondérés $\{(A; a), (B; b), (C; c)\}$.

Applications

148 Soit A et B deux points distincts et G le barycentre de $\{(A; 3), (B; 1)\}$.

1. Pourquoi ce barycentre existe-t-il ? Quelle égalité vectorielle peut-on en déduire ?

2. Montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ puis construire G.

3. Le système $\{(A; 2), (B; -2)\}$ a-t-il un barycentre ?

149 A, B et C sont trois points non alignés. M est le point défini par $\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{AC}$.

1. En utilisant le point G barycentre de $\{(A; 1), (B; -3)\}$, écrire $\vec{MA} - 3\vec{MB}$ sous la forme d'un unique vecteur d'extrémité M.

2. Construire G, puis M.

150 Montrer que si G est le barycentre du système $\{(A; a), (B; b)\}$ avec $a + b \neq 0$, alors G est aussi le barycentre du système $\{(A; ka), (B; kb)\}$ où k est un réel non nul.

151 Soit ABC un triangle et G est le barycentre de $\{(A; 2), (B; -1), (C; 1)\}$.

Exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. En déduire $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ puis construire G.

Piste 1. a. : Exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$.

Piste 2. : Raisonner par l'absurde.

PARCOURS 4 Associativité du barycentre

152 Simplification et construction

Soit ABC un triangle et G le barycentre de $\{(A; 2), (B; -1), (C; 1)\}$.

1. On appelle K le barycentre de $\{(A; 2), (B; -1)\}$.

Construire le point K.

2. Démontrer que $2\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{GK}$.

3. En déduire que G est le barycentre de $\{(K; 1), (C; 1)\}$ puis construire le point G.

Lorsque $a + b \neq 0$ et $a + b + c \neq 0$, dire que G est le **barycentre** de $\{(A; a), (B; b), (C; c)\}$ équivaut à dire que G est le **barycentre** de $\{(K; a + b), (C; c)\}$, où K est le barycentre de $\{(A; a), (B; b)\}$.

Applications

153 ABCD est un tétraèdre. J est le barycentre de $\{(C; 1), (D; 2)\}$.

On appelle K le milieu de [AC] et G le barycentre de $\{(A; 1), (C; 1), (D; 2)\}$.

1. En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G est le milieu de [KD].

2. En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G est barycentre de A et J avec des coefficients à déterminer.

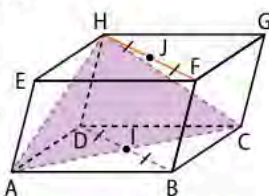
154 ABCD est un tétraèdre et I, J, K, L, M, et N sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [AC], [AD], [BD] et [CD]. Montrer que les droites (KM), (JL) et (IN) sont concourantes.

Piste : Introduire O, barycentre de $\{(A; 1), (B; 1), (C; 1), (D; 1)\}$.

Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

155 Parallélisme et intersections

ABCDEFGH est un parallélépipède. I et J sont les milieux respectifs de [AC] et de [FH] :



1. Justifier que la droite (BJ) est parallèle au plan (ACH).

2. a. Pourquoi la droite (DJ) et le plan (ACH) sont-ils sécants ?

b. On nomme K le point d'intersection entre (DJ) et (ACH). Que peut-on dire de K ? Justifier.

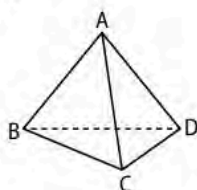
c. Exprimer $\vec{AK}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Piste 2. b. : On peut commencer par déterminer la nature du quadrilatère DIJH.

156 Alignement dans une base de l'espace.

ABCD est un tétraèdre. On définit les points E, F et G par les égalités :

$$3\vec{AE} - 2\vec{BE} + 4\vec{CE} = \vec{0}; 5\vec{AF} - \vec{BF} + 2\vec{DF} = \vec{0} \text{ et } -7\vec{BG} + 20\vec{CG} - 6\vec{DG} = \vec{0}.$$



1. À quels plans appartiennent chacun des points E, F et G ? Justifier.

2. a. Exprimer $\vec{BE}$ dans la base $(\vec{BA}, \vec{BC})$.

b. Exprimer $\vec{BF}$ dans la base $(\vec{BA}, \vec{BD})$.

c. Exprimer $\vec{BG}$ dans la base $(\vec{BC}, \vec{BD})$.

3. a. Déterminer l'expression des vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{EG}$ dans la base de l'espace $(\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD})$.

b. Que peut-on en déduire pour les points E, F et G ?

157 PYTHON Condition de colinéarité de deux vecteurs

Six réels x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 et z_2 sont tels que les triplets $(x_1; y_1; z_1)$ et $(x_2; y_2; z_2)$ sont différents du triplet $(0; 0; 0)$.

1. Dans cette question, on suppose que les triplets $(x_1; y_1; z_1)$ et $(x_2; y_2; z_2)$ sont proportionnels.

Démontrer que
$$\begin{cases} x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 = 0 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0 \end{cases}$$

2. Réciproquement, on suppose que les triplets $(x_1; y_1; z_1)$ et

$(x_2; y_2; z_2)$ sont tels que
$$\begin{cases} x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 = 0 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que si deux des trois réels x_1, y_1 et z_1 sont nuls, alors les triplets sont proportionnels.

b. Montrer que si exactement un des réels x_1, y_1 ou z_1 est nul, alors les triplets sont proportionnels.

c. Montrer que si aucun des réels x_1, y_1 ou z_1 n'est nul, alors les triplets sont proportionnels. Conclure.

3. $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$ et $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ sont deux vecteurs non nuls donnés dans une base de l'espace.

Recopier et compléter la définition de la fonction Python sont_colin qui renvoie True lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et False sinon.

```
def sont_colin(x1, y1, z1, x2, y2, z2):
    k1 = .....
    k2 = .....
    k3 = .....
    if ..... and ..... and ..... :
        return .....
    else:
        return .....
```

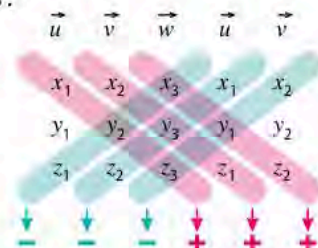
Piste 3. : En Python, pour vérifier que plusieurs conditions sont vraies en même temps, on utilise le mot-clef and (et) entre ces conditions.

158 PYTHON Histoire des mathématiques

Condition de coplanarité de trois vecteurs

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}(15; -14; 12)$, $\vec{v}(6; -4; 0)$ et $\vec{w}(-1; 2; -4)$ sont coplanaires.

2. $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ et $\vec{w}(x_3; y_3; z_3)$ sont trois vecteurs donnés par leurs coordonnées dans une base de l'espace. La règle de Sarrus permet de calculer le déterminant d des trois vecteurs :



$$d = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3$$

Lorsque ce déterminant est nul, les trois vecteurs sont coplanaires.

a. Appliquer la règle de Sarrus aux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de la question 1. La valeur obtenue confirme-t-elle la coplanarité des trois vecteurs ?

b. On considère les points A(-1; 7; 0), B(-4; 7; 3), C(-1; 4; 3) et D(-3; 5; 1).

En utilisant la règle de Sarrus, déterminer si ces quatre points sont coplanaires.

3. Recopier et compléter la définition de la fonction Python sont_coplan qui renvoie True lorsque $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ et $\vec{w}(x_3; y_3; z_3)$ sont coplanaires et False sinon.

```
def sont_coplan(x1, y1, z1, x2, y2, z2, x3, y3, z3):
    d = .....
    if ..... :
        return .....
    else:
        return .....
```

Point Histoire

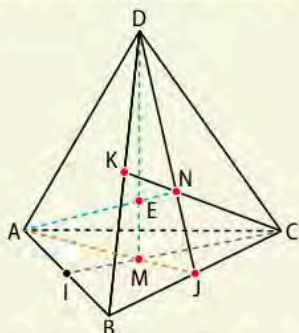
Le mathématicien français Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) est l'inventeur de cette formule difficile à retenir. Mais c'est le mathématicien français Pierre Sarrus (1798-1861) qui l'a rendue accessible grâce à la méthode présentée ci-dessus.



MATHS & CHIMIE

159 Molécule de méthane

La molécule de méthane CH_4 est constituée de quatre atomes d'hydrogène disposés sous la forme d'un tétraèdre régulier autour d'un atome de carbone. On modélise donc le centre des atomes d'hydrogène par le tétraèdre régulier ABCD et on nomme E le centre de l'atome de carbone :



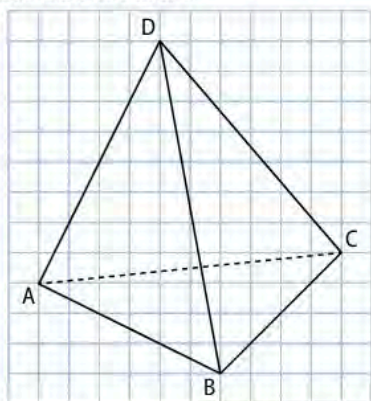
I, J et K sont respectivement les milieux des arêtes [AB], [BC] et [BD]. Les segments [CI] et [AJ] se coupent en M tandis que les segments [CK] et [DJ] se coupent en N. Enfin, E est le point d'intersection entre [AN] et [DM].

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du réel k tel que $\vec{AE} = k\vec{AN}$.

1. a. Justifier que $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ est un repère de l'espace.
- b. Donner les coordonnées des sommets du tétraèdre dans ce repère.
2. a. Calculer les coordonnées des points I, J et K.
- b. Déterminer une représentation paramétrique des droites (AJ) et (CI).
- c. En déduire les coordonnées de M dans ce repère.
3. En raisonnant de manière analogue, démontrer que les coordonnées de N sont $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
4. a. Déterminer les coordonnées du point E.
- b. Conclure.

160 REPRÉSENTER CALCULER

Section plane d'un tétraèdre



1. Reproduire le tétraèdre ci-dessus sur une feuille quadrillée.
2. On définit les points E, F et G par les égalités vectorielles :

$$\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \vec{AF} = \frac{3}{4}\vec{AD} \text{ et } \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}.$$

- a. Placer les points E et F sur la figure.
- b. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [CD]. Montrer que les points D, G et I sont alignés puis que les points B, G et J sont alignés.
- c. Placer le point G sur la figure.
3. Le but des questions suivantes est de construire la section du tétraèdre ABCD par le plan (EFG).
- a. Justifier que (EFG) coupe (ABD) selon la droite (EF).
- b. Pourquoi est-il nécessaire de déterminer un deuxième point d'intersection entre les plans (EFG) et (ABC) ?
4. On définit le point H par l'égalité : $\vec{AH} - 3\vec{BH} - 3\vec{CH} = \vec{0}$.
- a. À quel plan appartient le point H ? Justifier.
- b. Exprimer $\vec{EF}$, $\vec{EG}$ et $\vec{EH}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.
- c. En déduire que les points E, F, G et H sont coplanaires.
5. a. Dessiner la droite d'intersection entre (EFG) et (ABC). Cette droite coupe (BC) en K.
- b. En déduire les droites d'intersection entre (EFG) et (BCD) puis entre (EFG) et (ACD).
- c. Tracer en rouge la trace de la section du tétraèdre ABCD par le plan (EFG).

MATHS & SVT

161 Vol du vautour

Des biologistes ont cartographié une montagne des Alpes et établi un repère local pour étudier le vol d'un vautour.



Dans ce repère, la dernière coordonnée représente l'altitude. Le vautour décolle de son aire situé au point A(5 000 ; -3 200 ; 2 200) et il suit une trajectoire rectiligne pour retrouver sa colonie à l'altitude de 1 000 mètres. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ associé à ce déplacement est constant et il a pour coordonnées (11, 8, -2), où chaque coordonnée s'exprime en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la trajectoire rectiligne d suivie par le vautour.
2. À quelle altitude se trouve le vautour après quatre minutes de vol ?
3. Quelles sont les coordonnées de sa colonie ?
4. Le vautour poursuit ensuite son vol en suivant la trajectoire de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 11\,600 - 8,25k \\ y = 1\,600 - 6k \\ z = 1\,000 + 1,5k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

- a. Justifier que le vautour suit exactement la même trajectoire qu'à l'aller.
- b. Rejoindra-t-il son aire d'envol en 10 minutes ?

162 Représentation paramétrique de plan

Partie A : Définition

Soit A(2 ; 4 ; 5) un point de l'espace et deux vecteurs $\vec{u}(1 ; 2 ; 3)$ et $\vec{v}(1 ; 1 ; 1)$.

1. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. On nomme $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et dont la direction est engendrée par la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Soit M(x ; y ; z) un point quelconque de l'espace.

Justifier que M appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe deux

$$\text{réels } t \text{ et } t' \text{ tels que : } \begin{cases} x = 2 + t + t' \\ y = 4 + 2t + t' \\ z = 5 + 3t + t' \end{cases}$$

On appelle ce système **représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$** .

3. Déterminer les coordonnées du point B de $\mathcal{P}$ de paramètres $t = 2$ et $t' = -1$.

4. Justifier que le point d'intersection C entre $\mathcal{P}$ et l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-1; 0; 0)$.

5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection D entre $\mathcal{P}$ et l'axe des côtes $(0; \vec{k})$.

Partie B : Application

Soit $M(1; 3; 4)$, $N(7; -4; 2)$ et $P(7; -3; 4)$ trois points de l'espace.

1. Montrer que les points M, N et P définissent un plan.

2. À l'aide du travail réalisé dans la partie précédente, établir une représentation paramétrique du plan (MNP).

3. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 9 - k \\ y = -4 + 2k \\ z = 1 + k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

a. Justifier que la droite d n'est pas parallèle au plan (MNP).

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection E entre d et (MNP).

Partie C : Intersection de plans

Les plans $\mathcal{P}$ et (MNP) sont-ils confondus, parallèles ou sécants ? Dans ce dernier cas, déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

163 Ensemble de points

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace.

1. Soit M un point quelconque de l'espace.

Montrer que le vecteur $2\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC}$ est indépendant du point M.

2. On nomme G le point défini par : $2\vec{GA} + 3\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

a. Montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$.

b. Déterminer l'expression du vecteur $2\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC}$ en fonction du vecteur $\vec{MG}$.

164 Histoire des mathématiques

Fonction vectorielle de Leibniz

Soit A, B, C trois points de l'espace et soit a , b et c trois réels fixés. Quel que soit le point M de l'espace, le vecteur $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$ ne dépend que de M puisque les autres données sont fixées. On note $\vec{f}(M)$ ce vecteur.

1. a. Justifier que $\vec{f}(A) = b\vec{AB} + c\vec{AC}$.

b. Soit N un point quelconque de l'espace.

Donner l'expression du vecteur $\vec{f}(N)$.

c. Montrer que $\vec{f}(M) - \vec{f}(N) = (a + b + c)\vec{MN}$.

2. Dans cette question, on suppose que la somme $a + b + c$ est nulle. Justifier que $\vec{f}(M) = \vec{f}(A)$ pour tout point M de l'espace.

3. Dans cette question, on suppose que la somme $a + b + c$ n'est pas nulle et on note $s = a + b + c$.

a. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\vec{f}(G) = \vec{0}$.

b. En déduire que pour tout point M de l'espace, $\vec{f}(M) = s\vec{MG}$.

LE SAVIEZ-VOUS

Le point G défini ci-dessus s'appelle le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients a , b et c . Pour en savoir plus sur le barycentre, voir la page 75.

Point Histoire

Le mathématicien allemand **Gottfried Leibniz** (1646-1716) a introduit le concept de fonction. Il a utilisé cette notion de fonction aussi bien pour étudier des relations numériques que pour des relations géométriques.



TRAVAIL EN GROUPE

165 Polyèdres réguliers

1. Étudier les cinq polyèdres réguliers, également appelés « solides de Platon ».

2. Rechercher la « formule d'Euler » pour un polyèdre puis prouver à l'aide de cette formule qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers.

Prise d'initiatives

166 t est un réel.

Existe-t-il une valeur de t pour laquelle les vecteurs $\vec{u}(-5t; 2t - 1; 1)$ et $\vec{v}(3t - 12; 9; 2t - 1)$ sont colinéaires ?

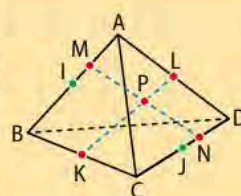
167 ABCD est un tétraèdre.

1. Tracer ce tétraèdre.

2. Placer I, le milieu de [AB], J, le point défini par $3\vec{JC} + \vec{JA} = \vec{0}$ et K, le point tel que $\vec{CK} + 2\vec{DK} = \vec{0}$.

3. Représenter la trace de la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

168 Soit A, B, C et D quatre points de l'espace non coplanaires. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [BC] et [AD].



1. Montrer que $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{KL}$.

2. Démontrer que, pour tout point P du segment [KL], il existe un unique point M de [AB] et un unique point N de [CD] tel que P soit le milieu de [MN].

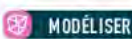
TP Section plane d'un cube



GÉOMÉTRIE



REPRÉSENTER



MODÉLISER

Fichier GeoGebra/Cabri

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr**A Construction d'un point défini par une égalité vectorielle**

Le fichier 02_Indice_Tlespe_TP1.ggb contient un segment $[AB]$ ainsi que deux curseurs a et b prenant pour valeur des nombres entiers strictement positifs.

Le but de cette partie est de construire, s'il existe, le point M tel que $a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{BM} = \vec{0}$, où a et b sont des réels strictement positifs.

1. Étude théorique

a. Justifier que cette égalité vectorielle équivaut à $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$.

b. En déduire l'existence du point M et que M est un point du segment $[AB]$, distinct des extrémités A et B .

2. Utilisation des translations

a. Sur le fichier fourni, construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (nommé automatiquement $\vec{u}$ par le logiciel).

b. Dans la barre de saisie, définir le vecteur $\vec{v}$ égal à $\frac{b}{a+b} \vec{u}$.

c. Définir ensuite le point M comme image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$.

d. Modifier les valeurs des curseurs a et b . Constater que M est un point situé sur le segment $[AB]$.

3. Utilisation de points pondérés

a. Supprimer le vecteur $\vec{v}$. Le point M doit alors être supprimé automatiquement.

b. Justifier que l'égalité $a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ équivaut à $\frac{a}{a+b} \overrightarrow{AM} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c. Dans la barre de saisie, définir le point M par l'expression : $(a*A+b*B)/(a+b)$.

d. Expliquer pourquoi le point M est construit à la bonne position sur le segment $[AB]$.

B Construction d'une section d'un cube

Le fichier 02_Indice_Tlespe_TP2.ggb contient un cube $ABCDEFGH$.

1. Construire le point M , milieu de $[EH]$, le point N milieu de $[FC]$ et le point P tel que $3\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$.

Le but de cette partie est de construire la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (MNP) .

2. a. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L .

b. Construire le point L .

3. a. Justifier que les droites (LN) et (CG) sont sécantes en un point K .

b. Construire le point K .

c. Déterminer l'intersection des plans (MNP) et (CDG) ? Justifier.

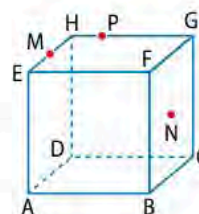
4. a. Justifier que les droites (LN) et (BF) sont sécantes en un point I .

b. Construire le point I .

c. Que peut-on dire de la droite d , intersection des plans (MNP) et (ABF) ? Justifier.

d. Construire Q , le point d'intersection des droites d et (AE) .

5. En déduire le tracé de la section du cube par le plan (MNP) .

**C Observation de différentes sections**

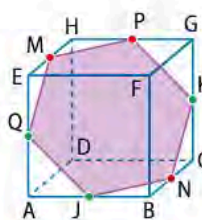
Le fichier 02_Indice_Tlespe_TP3.ggb contient un cube $ABCDEFGH$.

1. Construire un point M sur le segment $[EH]$, un point P sur le segment $[HG]$ et un point N sur la face $BCGF$.

2. Construire le plan (MNP) puis l'intersection du plan (MNP) et du cube $ABCDEFGH$.

3. En déplaçant les points M , N et P , observer différentes sections possibles. En particulier, retrouver la section obtenue dans la partie précédente.

4. Expliquer la construction de cette section lorsque N est un point du segment $[BC]$ (figure ci-contre).



Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 61, 171

Question

Comment expliquer les propriétés macroscopiques d'un cristal ?

Enjeu de la question

Les propriétés macroscopiques d'un cristal sont liées à sa composition atomique et à la disposition des atomes entre eux. Ainsi, plus un cristal est compact, plus il sera dense.



Plan possible

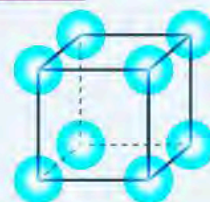
1. Maille d'une structure cristalline homonucléaire
2. Réseau cubique simple
3. Réseau cubique à faces centrées
4. Réseau hexagonal compact
5. Conclusion (propriétés de ces structures)

Les mots-clés

Vecteurs de l'espace • Repérage • Transformations
• Distances et volumes

Support de présentation possible

- Schéma d'une maille cubique :



- Volume d'une sphère de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

- Calcul de compacité :

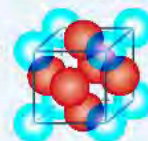
$$\frac{\text{Volume occupé par les sphères dans une maille}}{\text{Volume d'une maille}}$$

- La compacité d'une maille cubique simple est $\frac{\pi}{6}$.

- Kepler (1571–1630)

Il émet la conjecture que la compacité maximale d'empilement de sphères

identiques est $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.



Cette compacité est celle d'un empilement tétraédrique qui correspond au réseau cubique à faces centrées ainsi qu'au réseau hexagonal compact.

Questions d'approfondissement possibles

Comment expliquer graphiquement qu'un empilement de sphères identiques selon un maillage hexagonal correspond au réseau cubique à faces centrées ?

Détailler le calcul de la compacité d'une maille cubique simple.

Comment prouver que trois vecteurs de l'espace ne sont pas coplanaires ?

Calculer la longueur de la grande diagonale du cube d'arête a .

Poursuite d'études et projet professionnel

- Pourquoi étudier la géométrie dans l'espace ?

Ce domaine des mathématiques permet de modéliser le monde qui nous entoure. Il est utilisé en mécanique, en biologie, en productique comme l'impression 3D, etc.

- Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude de la géométrie dans l'espace est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : écoles d'architecture, écoles graphiques, licences scientifiques, écoles d'ingénieur.

- Un exemple de métier ?

Le (la) **concepteur(trice)** de moteur graphique programme des interfaces graphiques permettant de modéliser informatiquement des structures en trois dimensions. Il (elle) effectue les recherches mathématiques, physiques, biologiques et informatiques afin que le moteur reproduise au plus près la réalité. Les moteurs graphiques ainsi réalisés sont ensuite utilisés dans le domaine de l'imagerie médicale, du jeu vidéo, du cinéma d'animation, de l'astronomie, de la physique des particules...

THÈMES

- Vecteurs de l'espace
- Positions relatives de plans
- Représentation paramétrique d'une droite

ÉNONCÉ MODÉLISER CALCULER

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On note I le milieu du segment [EF], J le milieu du segment [EH], K le point tel que $\vec{EK} = \frac{2}{3}\vec{EA}$ et L le point tel que $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$.

1. a. En considérant la base $(\vec{EF}, \vec{EH})$ du plan (EFH),

justifier que les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{FH}$ sont colinéaires.

b. Justifier que les vecteurs $\vec{KJ}$ et $\vec{LH}$ sont colinéaires.

c. Pourquoi les plans (FHL) et (IJK) sont-ils parallèles ?

2. Dans cette question, on se place dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

a. Donner sans justifier les coordonnées des points B, C, E, F et G dans ce repère.

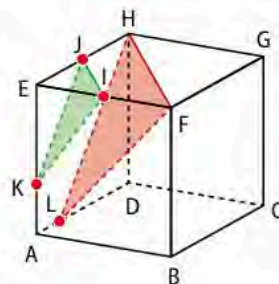
b. On note Δ la droite passant par le point E et de vecteur directeur $\vec{u}(4; 4; -3)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

c. Les points du plan (ABC) ont une coordonnée nulle. Laquelle ?

d. En déduire les coordonnées du point M, d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

e. Les droites Δ et (BF) sont-elles parallèles, sécantes ou non coplanaires ? Justifier.



D'après Bac S, Métropole, juin 2019

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. a. Les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{FH}$ appartiennent à la direction du plan (EFH). On les exprime dans une base de ce plan.

Capacité 8, p. 57

b. Utiliser la même méthode qu'en 1. a. en se plaçant dans une base de (ADE), par exemple $(\vec{AD}, \vec{AE})$.

c. Deux vecteurs non colinéaires de (FHL) sont colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de (IJK).

Capacité 6, p. 55

2. a. A est l'origine du repère, B, D et E sont les points de coordonnée 1 de chaque axe.

b. Utiliser la formule du cours.

c. $(\vec{AB}, \vec{AD})$ est une base du plan (ABC).

d. On connaît la cote de M. Elle permet d'obtenir le paramètre associé.

Capacité 10, p. 59

e. On recherche d'abord si les droites sont parallèles.

Dans le cas contraire, on recherche leur point d'intersection.

Capacité 11, p. 60

SOLUTION COMMENTÉE

1. a. On a $\vec{FH} = \vec{FE} + \vec{EH} = -\vec{EF} + \vec{EH}$.

De plus, I et J sont les milieux respectifs de [EF] et [EH]

donc $\vec{IJ} = \vec{IE} + \vec{EJ} = -\frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{EH} = \frac{1}{2}\vec{FH}$.

Ainsi, les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{FH}$ sont colinéaires.

b. On a $\vec{LH} = \vec{LA} + \vec{AH} = -\frac{1}{4}\vec{AD} + \vec{AD} + \vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AD} + \vec{AE}$.

De plus, $\vec{KJ} = \vec{KE} + \vec{EJ} = -\frac{2}{3}\vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{EH} = \frac{2}{3}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.

On constate que $\vec{LH} = \frac{3}{2}\vec{KJ}$ donc les vecteurs $\vec{KJ}$ et $\vec{LH}$ sont colinéaires.

c. D'après les questions précédentes, $\vec{IJ}$ et $\vec{KJ}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) qui sont respectivement colinéaires à $\vec{FH}$ et $\vec{LH}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (FHL).

Par suite, les plans (IJK) et (FHL) sont parallèles.

2. a. On a B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1) et G(1 ; 1 ; 1).

b. Δ passe par E(0 ; 0 ; 1) et a pour vecteur directeur $\vec{u}(4; 4; -3)$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc $\begin{cases} x = 4t \\ y = 4t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c. Les points du plan (ABC) ont tous une cote nulle car (ABC) est le plan $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

d. M est un point de (ABC) donc $z_M = 0$. Puisque M appartient à Δ , on cherche le paramètre t associé : $0 = 1 - 3t$ d'où $t = \frac{1}{3}$. Ainsi $M(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 0)$.

e. $\vec{u}(4; 4; 3)$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{BF}(0; 0; 1)$ est un vecteur directeur de (BF). Puisque $x_{BF} = 0$ mais $x_u \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{BF}$ ne peuvent pas être colinéaires donc les droites Δ et (BF) ne sont pas parallèles.

Une représentation paramétrique de (BF) est $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$. On résout le

système $\begin{cases} 4t = 1 \\ 4t = 0 \\ 1 - 3t = k \end{cases}$. Les deux premières équations conduisent à $t = \frac{1}{4}$ et $t = 0$.

Ce système n'a pas de solution donc les droites Δ et (BF) ne sont pas coplanaires.

Sujet A



45 min

REPRÉSENTER



CALCULER

THÈMES • Vecteurs de l'espace

- Vecteurs coplanaires
- Positions relatives de droites

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

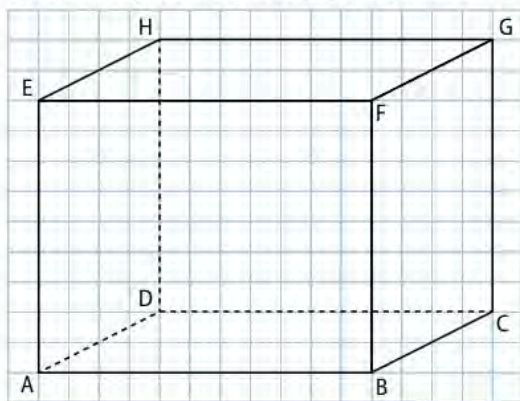
Question 1. ► Capacité 1 p. 51

Questions 2. et 3. ► Capacité 2 p. 51

Question 4. ► Capacité 4 p. 53

Question 5. ► Capacité 5 p. 55

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous.



1. Reproduire cette figure puis placer les points I, J et K tels que $\vec{AI} = \frac{1}{6}\vec{AB}$, $\vec{AJ} = \frac{1}{4}\vec{AD}$ et $\vec{BK} = \frac{5}{9}\vec{BF}$.
2. Exprimer les vecteurs $\vec{AG}$ et $\vec{AK}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.
3. Justifier les égalités suivantes :
 - a. $6\vec{IG} = 5\vec{AB} + 6\vec{AD} + 6\vec{AE}$.
 - b. $4\vec{JG} = 4\vec{AB} + 3\vec{AD} + 4\vec{AE}$.
 - c. $9\vec{KG} = 9\vec{AD} + 4\vec{AE}$.
4. a. En multipliant $6\vec{IG}$ et $4\vec{JG}$ par des coefficients bien choisis, montrer que $9\vec{KG}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{IG}$ et $\vec{JG}$.
b. Que peut-on en déduire pour les points G, I, J et K ?
5. Les droites (IK) et (GJ) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Sujet B



40 min

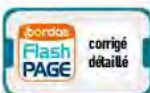


MODÉLISER



CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Positions relatives de droites et de plans

- Représentation paramétrique d'une droite

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

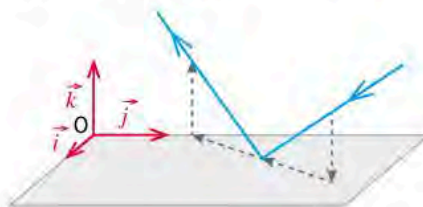
Questions 2. et 3. ► Capacités 9 et 10 p. 59

Question 4. ► Capacité 13 p. 61

Un catadioptré est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie. Les trois miroirs du catadioptré sont représentés par les plans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $(O; \vec{j}, \vec{k})$ et $(O; \vec{i}, \vec{k})$, où $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admisses)

- Lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$, un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}(a; b; -c)$.
- Lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$, un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}(-a; b; c)$.
- Lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est réfléchi par le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$, un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}(a; -b; c)$.

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est réfléchi successivement par les plans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $(O; \vec{j}, \vec{k})$ et $(O; \vec{i}, \vec{k})$, le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\vec{v}_1(-2; -1; -1)$ qui vient frapper le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ au point $I_1(2; 3; 0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\vec{v}_2(-2; -1; 1)$ et passant par le point I_1 .

2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite d_2 .
b. On considère un point quelconque du plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$. Quelle coordonnée de ce point est nulle ?
c. En déduire que la droite d_2 et le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ sont sécants en $I_2(0; 2; 1)$.
3. On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$. d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\vec{v}_3(2; -1; 1)$ passant par le point $I_2(0; 2; 1)$. Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 entre la droite d_3 et le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$.
4. On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$. Elle est donc parallèle à la droite d_1 .
a. Les droites d_1 , d_2 et d_3 sont-elles coplanaires ?
b. Les droites d_1 , d_2 et d_4 sont-elles coplanaires ?

CALCULER

- Positions relatives de plans et de droites
- Représentation paramétrique d'une droite

● CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 2: ► Capacité 11 p. 60

Question 3. ► Capacité 12 p. 60

VRAI/FAUX

Dans l'espace rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1; 2; 3)$, $B(3; 0; 1)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(2; 1; -1)$, $E(-1; -2; 3)$ et $F(-1; -6; -3)$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- a. Les trois points A, B et C sont alignés.
- b. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
- c. La droite (EF) est parallèle au plan (ABC).

CALCULER

- Décomposition d'un vecteur dans une base

● CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 2 ► Capacité 4 p. 53

Question 4. ► Capacité 14 p. 61

Question 5. ► Capacité 11 p. 60

Dans l'espace rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$ et $D(11; 4; 4)$.

1. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes du repère. Lequel ?
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par C et de base $(\vec{j}, \vec{k})$.
Montrer que la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
3. Justifier que la droite (AB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
4. a. Soit $E(11; -1; 5)$.
Déterminer deux réels a et b tels que $\overrightarrow{CE} = a\vec{j} + b\vec{k}$.
b. Vérifier que E est le point d'intersection entre (AB) et $\mathcal{P}$.
5. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

- Vecteurs coplanaires, vecteurs colinéaires

● CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

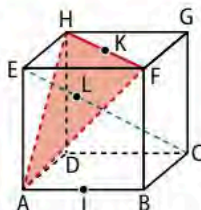
Question 2. ► Capacité 2 p. 51

Question 3. ► Capacité 4 p. 53

Question 4. ► Capacité 3 p. 53

ABCDEFGH désigne un cube. K est le milieu du segment [HF] et L est le point tel que $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$.

- 1.** Justifier que $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base de l'espace.



2. a. Donner l'expression de $\overrightarrow{CE}$ dans cette base.
- b. En déduire l'expression de $\overrightarrow{AL}$ dans cette base.
3. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont coplanaires.
4. Démontrer que les points A, L et K sont alignés.

ALCULER

- Positions relatives de droites

● CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

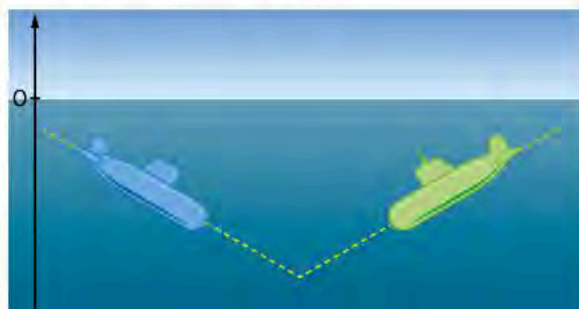
Question 1. ► Capacité 9 p. 59

Question 2. ► Capacité 10 p. 59

Question 3. ► Capacité 11 p. 60

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.

On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.



À chaque instant t , exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'unité est le mètre.

Le plan défini par $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ représente la surface de la mer.
La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel t , le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :
- $$\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$$

- Donner les coordonnées du sous-marin au début de l'observation.
- Donner les coordonnées du vecteur vitesse de ce sous-marin.
- Combien de temps a-t-il fallu au sous-marin pour se rendre de la surface au point $S_1(0)$?

- 2.** Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68 ; 135 ; -68)$ et il atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202 ; -405 ; -248)$ avec une vitesse constante. Déterminer les coordonnées du point $S_2(t)$ en fonction du paramètre t .

- 3. a.** À quel instant t , exprimé en minutes et secondes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?
b. Les deux sous-marins suivent-ils des trajectoires parallèles, sécantes ou non coplanaires ? Justifier.

► Calculer et utiliser le produit scalaire dans le plan

1 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

On note $a = AB$ et I le milieu de [BC].

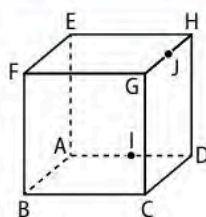
1. $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$ est égal à : a. a^2 b. $-a^2$ c. 0 d. $\vec{AI} \cdot \vec{IA}$
 2. $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ est égal à : a. $2\vec{BA} \cdot \vec{BI}$ b. a^2 c. $BA \times BC \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d. $\vec{BC} \cdot \vec{BC}$

2 Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A(3 ; 3), B(6 ; 5), C(11 ; 4) et D(2 ; 11).

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BD}$.
 b. Calculer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BD}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?
 2. a. Calculer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ et les longueurs BA et BC.
 b. En déduire l'égalité $\cos \widehat{ABC} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ puis la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$.

► Utiliser les vecteurs de l'espace

3 Soit ABCDEFGH un cube, I le milieu de [AD], J le milieu de [HG] et M le point tel que $\vec{BM} = \vec{BG} + \vec{AB} + \vec{AE}$.



1. Démontrer l'égalité : $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$.
 2. Exprimer $\vec{BM}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.
 3. En déduire que les droites (IJ) et (BM) sont parallèles.

4 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

Soit ABCDEFGH un cube.

1. Le vecteur $\vec{DC}$ est un vecteur de la direction du plan (ABC).
 2. Les vecteurs $\vec{BG}$ et $\vec{FC}$ engendrent la direction du plan (BCG).
 3. Le couple $\left(\vec{AE}, \frac{1}{2}\vec{HD}\right)$ est une base du plan (ADH).

► Calculer avec des coordonnées dans l'espace

5 VRAI/FAUX

Dans l'espace muni d'un repère, on considère la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 9 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Le vecteur $\vec{u}(2 ; 1 ; 9)$ est un vecteur directeur de d .
 2. Le point A(-4 ; 9 ; 7) appartient à d .

6 Dans l'espace muni d'un repère, on considère les points A(-1 ; 3 ; 5) et B(5 ; 1 ; 4).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$.
 2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).



Les propriétés physiques du diamant en font le matériau naturel le plus dur. Le diamant trouve de nombreuses applications dans l'industrie, dans les sciences, ainsi que dans la joaillerie. Le diamant est une forme de cristallisation du carbone. Ses propriétés physiques tiennent aux fortes liaisons covalentes entre ses atomes arrangés selon un système cristallin cubique. Le produit scalaire dans l'espace étudié dans ce chapitre permet de déterminer les angles des liaisons entre les atomes de carbone.

Voir Activité n°4 page 87

LES NOTIONS DU CHAPITRE

- Produit scalaire dans l'espace
- Orthogonalité de droites et de plans
- Projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite
- Plan médiateur d'un segment
- Vecteur normal à un plan
- Équation cartésienne d'un plan



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 89 ; 97 ; 98
Animations	pp. 86 ; 92
Corrigés détaillés	pp. 112 ; 113 ; 122 ; 123

Activité 1

Objectif

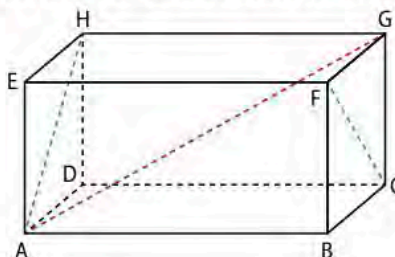
Introduire la notion de produit scalaire dans l'espace.

Cours 1

Produit scalaire dans l'espace

Approche du produit scalaire dans l'espace

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle avec $AB = 2a$ et $BC = BF = a$.



- 1 En se plaçant dans le plan (AED), calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- 2 a. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires. Pourquoi ?
b. En se plaçant dans le plan (AED), calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$.
Comme $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$, on définit le produit scalaire dans l'espace $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CF}$ par $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DE}$.
- 3 a. En se plaçant dans le plan (ABC), déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$.
b. En procédant comme à la question 2.b., déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HG}$.
- 4 a. Justifier que le quadrilatère AFGD est un rectangle.
Que peut-on en déduire pour les droites (AD) et (DG) ?
b. Dans le plan (ADG), calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ et vérifier, en utilisant les questions 1. et 3., que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ est égal à la somme de $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HG}$.

Activité 2

Objectif

Introduire la notion d'orthogonalité d'une droite et d'un plan.

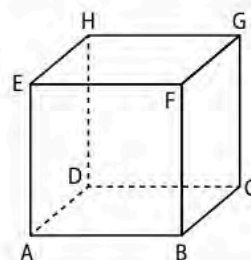
Cours 3

Orthogonalité de droites et de plans

Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Soit ABCDEFGH un cube.

- 1 a. Que peut-on dire des droites (AB) et (AE) ?
b. Que déduit-on pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$?
c. Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont orthogonaux.
Les droites (AB) et (DH) sont dites orthogonales car un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.
d. Citer deux autres couples de droites orthogonales passant par des sommets du cube.



- 2 a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AD}$, et en déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$.
b. Soit $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
Démontrer que : $\overrightarrow{AE} \cdot \vec{i} = 0$.
- 3 Soit $\vec{w}$ un vecteur de la direction du plan (ABC).
a. Justifier qu'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$.
b. Déduire de ce qui précède l'égalité : $\overrightarrow{AE} \cdot \vec{w} = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction du plan (ABC) : on dit que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC).
- 4 Le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui est un vecteur de la direction du plan (ABG). La droite (DH) est-elle perpendiculaire au plan (ABG) ?

Animation
Orthogonalité
d'une droite
et d'un plan



Activité 3

Objectif

Introduire la notion d'équation cartésienne d'un plan.

Cours 5

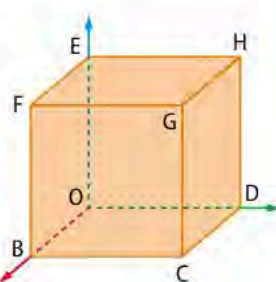
Applications du produit scalaire

Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On veut déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points de l'espace dont la somme des coordonnées est égale à 1.

On considère le cube OBCDEFGH tel que $\vec{OB} = \vec{i}$, $\vec{OD} = \vec{j}$ et $\vec{OE} = \vec{k}$.



- 1** a. Donner les coordonnées de chacun des sommets du cube.
b. Quels sont les sommets du cube qui appartiennent à $\mathcal{P}$?
- 2** a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BE).
b. Démontrer que tout point de la droite (BE) est un point de l'ensemble $\mathcal{P}$.
- 3** a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{BD}$.
b. Soit M un point du plan (BED). Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $\vec{BM} = a\vec{BE} + b\vec{BD}$, puis exprimer les coordonnées de $\vec{BM}$ en fonction de a et b .
c. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de a et b .
d. En déduire que le plan (BED) est inclus dans l'ensemble $\mathcal{P}$.
- 4** a. Démontrer que le vecteur $\vec{OG}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{BD}$.
b. Quel est le plan passant par B et perpendiculaire à la droite (OG) ?
- 5** Soit $M(x; y; z)$ un point de l'ensemble $\mathcal{P}$.
a. Exprimer z en fonction de x et y .
b. Démontrer que le vecteur $\vec{BM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{OG}$.
c. En déduire que M appartient à un plan que l'on précisera.
- 6** En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$.

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

Activité 4

Objectif

Découvrir une application du produit scalaire en chimie.

Cours 5

Applications du produit scalaire

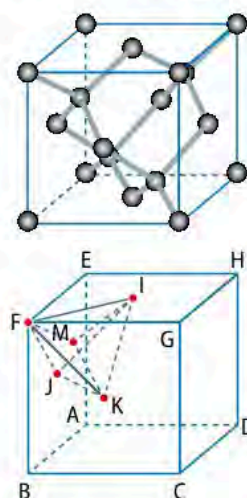
Les diamants sont éternels

Le diamant est constitué uniquement d'atomes de carbone. La maille du cristal de diamant est une forme dérivée du cristal cubique face centrée : en plus des atomes situés à chacun des sommets du cube et au centre de chacune des faces, on trouve quatre atomes chacun situé au centre d'un tétraèdre formé par les atomes précédents.

Dans le cube ABCDEFGH donné ci-contre, on a représenté un des sites tétraédriques constitué de cinq atomes de carbone, positionnés aux points I, J, K, F et M.

Les points I, J et K sont les centres des faces FGHE, ABFE et BCGF, le point M est le centre du tétraèdre régulier IJKF c'est-à-dire le point équidistant des points I, J, K et F.

On considère le repère orthonormé de l'espace $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



- 1** a. Donner les coordonnées des points F, C et H.
b. Calculer les coordonnées de I, J et K.
- 2** Soit P le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.
a. Calculer les longueurs IP, JP, KP et FP.
b. Que peut-on en déduire pour les points P et M ?
- 3** a. Calculer le produit scalaire $\vec{MF} \cdot \vec{MK}$.
b. En déduire que $\cos(\widehat{FMK}) = -\frac{1}{3}$ et déterminer une valeur approchée à $0,1^\circ$ près de l'angle $\widehat{FMK}$.

1. Produit scalaire dans l'espace

Approche géométrique du produit scalaire

À noter

On admet que le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est indépendant du plan $\mathcal{P}$ et des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

DÉFINITION Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Ainsi :

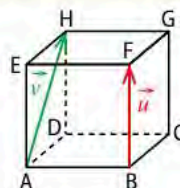
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$;
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul : $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$ et $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$.

EXEMPLE : ABCDEFGH est un cube d'arête a .

On note $\vec{u} = \overrightarrow{BF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$.

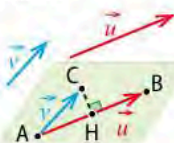
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} = BF \times BG \times \cos \widehat{FBG}.$$

$$\text{Donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$



À noter

Toutes les propriétés du produit scalaire énoncées dans le plan s'appliquent dans l'espace à des points et des vecteurs coplanaires.



PROPRIÉTÉS (1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et K le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

(2) **Bilinéarité et symétrie du produit scalaire**

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et k est un réel, alors

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \bullet \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \bullet \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(3) Soit $\vec{u}$ un vecteur et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On a $\vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = \|\vec{u}\|^2$.

EXEMPLES : ABCDEFGH est un cube d'arête a .

• Dans le plan (AGC), C est le projeté orthogonal de G sur (AC), donc

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 = (\sqrt{2}a)^2 = 2a^2.$$

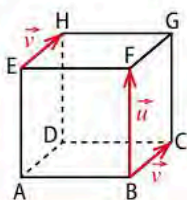
• Pour calculer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AG}$, on peut remplacer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ par la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$:

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BF} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 + a^2 = a^2.$$

Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

À noter

On admet que la définition de l'orthogonalité de deux vecteurs non nuls est indépendante du point A choisi.



DÉFINITIONS (1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, A un point de l'espace et d_1 et d_2 les droites passant par A et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si, et seulement si, les droites sécantes d_1 et d_2 sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

(2) Le vecteur nul est par définition orthogonal à tout vecteur de l'espace.

EXEMPLE : ABCDEFGH est un cube.

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{BF}$ est un vecteur directeur de la droite (BF) et le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{EH}$ est un vecteur directeur de la droite (BC) puisque $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC}$. Comme les droites (BF) et (BC) sont perpendiculaires, les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux.

PROPRIÉTÉ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

DÉMONSTRATION

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ d'après la définition.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls. Soit alors des points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires ce qui équivaut à $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$ radians donc à $\cos \widehat{BAC} = 0$ soit à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Vidéo 03:58

Calculer un produit scalaire



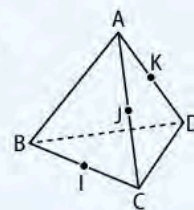
CAPACITÉ

1

Calculer un produit scalaire

Soit ABCD un tétraèdre régulier de côté a .

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AD].



1 Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$

2 a. Justifier que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$.b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Conseil

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, il peut être utile de choisir des représentants de ces vecteurs ayant la même origine.

Solution commentée

1 a. Les arêtes d'un tétraèdre régulier sont toutes de même longueur, donc le triangle ABC est équilatéral et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ rad.

$$\text{On a donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = a^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}a^2.$$

b. La droite (AI) est une médiane du triangle équilatéral ABC, donc (AI) est aussi la hauteur issue de A dans ce triangle.

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

2 a. Comme J est le milieu de [AC], $\overrightarrow{JA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$ et comme K est le milieu de [AD],

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}. \text{ On a alors } \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} \text{ soit } \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) \text{ soit } \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}.$$

b. Comme $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$, on a $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \cdot (-\overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Le triangle CDB est équilatéral puisque ABCD est un tétraèdre régulier donc

$$\widehat{DCB} = \frac{\pi}{3} \text{ rad. On a alors } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = CD \times CB \times \cos \widehat{DCB} = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}a^2.$$

$$\text{Finalement } \overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{4}a^2.$$

Voir exercices

56 Pour s'entraîner

143 Pour travailler en autonomie

Vidéo 05:45

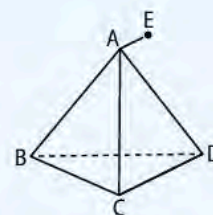
Utiliser un produit scalaire



CAPACITÉ

2

Utiliser le produit scalaire

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a et Ele point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CD}$.1 Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.2 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

3 En déduire que le triangle ABE est rectangle en A.

Méthode

Pour calculer un produit scalaire, on peut décomposer un des vecteurs (ou les deux) à l'aide de la relation de Chasles et se ramener à des produits scalaires connus.

Solution commentée

1 Le triangle ABC est équilatéral donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ rad donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2.$$

Le triangle ABD est équilatéral donc de la même façon on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}a^2$.

2 Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \text{ soit}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0.$$

3 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{3} \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont donc orthogonaux, ce qui prouve que le triangle ABE est rectangle en A.

Voir exercices

59 Pour s'entraîner

144 Pour travailler en autonomie

2. Produit scalaire dans un repère de l'espace

Expression analytique du produit scalaire



DÉFINITIONS (1) On appelle **base orthonormée de l'espace** toute base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace telle que les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

(2) Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit **orthonormé** si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

PROPRIÉTÉS Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs et soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points.

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(3) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

DÉMONSTRATIONS

(1) Soit I, J et K les points de l'espace tels que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

On a : $\vec{i} \cdot \vec{i} = \overrightarrow{OI} \times \overrightarrow{OI} \times \cos(\widehat{IOI}) = \overrightarrow{OI} \times \overrightarrow{OI} \times \cos(0) = 1 \times 1 \times 1 = 1$. De même $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$.

Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ étant deux à deux orthogonaux, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i} \cdot \vec{j} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} + zz'\vec{k} \cdot \vec{k} + (xy' + xy'')\vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + x'z)\vec{i} \cdot \vec{k} + (yz' + y'z)\vec{j} \cdot \vec{k} = xx' + yy' + zz'.$$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$ puis $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(3) On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$, donc d'après **(2)** :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Formules de polarisation

PROPRIÉTÉ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

DÉMONSTRATION

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}. \text{ Or } \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2, \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \text{ on déduit donc } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

$$\text{Soit } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

À noter

La première formule de polarisation, permet de calculer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$ uniquement à partir des longueurs AB, AC et BC.

PROPRIÉTÉS Formules de polarisation

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

DÉMONSTRATIONS

(1) Comme $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, on a $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ soit que $2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

(2) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + (-\vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot (-\vec{v}) + \|-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ car $\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|-\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$. On en déduit que :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2)$$

$$\text{soit } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{Donc } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v} \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité dans un repère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 7; -2)$, $B(4; 6; -5)$ et $C(3; 1; 2)$.

- 1 Justifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.
- 2 Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

Méthode

Pour démontrer que deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux, on peut calculer leur produit scalaire.

Voir exercices

- 63 Pour s'entraîner
145 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- 1 On calcule les coordonnées de chacun des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
On a $\vec{AB}(4-1; 6-7; -5-(-2))$ soit $\vec{AB}(3; -1; -3)$ et $\vec{AC}(3-1; 1-7; 2-(-2))$ soit $\vec{AC}(2; -6; 4)$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est :
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 2 + (-1) \times (-6) + (-3) \times 4 = 6 + 6 - 12 = 0$.
Comme $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, on en déduit que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.
- 2 Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ étant orthogonaux, (AB) et (AC) sont perpendiculaires dans le plan (ABC), donc le triangle ABC est rectangle en A.

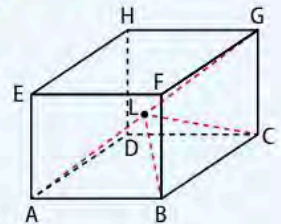
Utiliser le produit scalaire pour calculer un angle ou une longueur dans un repère



On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 4$, $AE = 3$ et $AD = 12$.

Le point L est le milieu de [AG]. On définit les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ par $\vec{i} = \frac{1}{4}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{12}\vec{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\vec{AE}$.

- 1 Justifier que le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé.
- 2 a. Donner les coordonnées des points B, C et G.
b. Calculer les coordonnées du point L.
- 3 Calculer le produit scalaire $\vec{LB} \cdot \vec{LC}$.
- 4 a. Calculer les longueurs LB et LC.
b. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BLC}$ à 0,1 degré près.



Méthode

Pour déterminer un angle, on peut utiliser deux expressions du produit scalaire.

Solution commentée

- 1 Comme ABCDEFGH est un pavé droit, les droites (AB), (AD) et (AE) sont deux à deux perpendiculaires donc les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.
De plus, $\|\vec{i}\| = \left\| \frac{1}{4}\vec{AB} \right\| = \frac{1}{4} \times AB = 1$, $\|\vec{j}\| = \left\| \frac{1}{12}\vec{AD} \right\| = \frac{1}{12} \times AD = 1$
et $\|\vec{k}\| = \left\| \frac{1}{3}\vec{AE} \right\| = \frac{1}{3} \times AE = 1$. Le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc orthonormé.
- 2 a. A est l'origine du repère et $\vec{AB} = 4\vec{i}$ donc B a pour coordonnées $(4; 0; 0)$.
 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 4\vec{i} + 12\vec{j}$ donc C a pour coordonnées $(4; 12; 0)$.
 $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AC} + \vec{AE} = 4\vec{i} + 12\vec{j} + 3\vec{k}$ donc G a pour coordonnées $(4; 12; 3)$.
b. L est le milieu de [AG] et on a $A(0; 0; 0)$ et $G(4; 12; 3)$ donc L a pour coordonnées :
 $\left(\frac{0+4}{2}; \frac{0+12}{2}; \frac{0+3}{2} \right)$ soit $\left(2; 6; \frac{3}{2} \right)$.
- 3 On a $\vec{LB} \left(2; -6; -\frac{3}{2} \right)$ et $\vec{LC} \left(2; 6; -\frac{3}{2} \right)$ donc
 $\vec{LB} \cdot \vec{LC} = 2 \times 2 + (-6) \times 6 + \left(-\frac{3}{2} \right) \times \left(-\frac{3}{2} \right)$ soit $\vec{LB} \cdot \vec{LC} = 4 - 36 + \frac{9}{4} = -\frac{119}{4}$.
- 4 a. $LB = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$, $LC = \sqrt{2^2 + 6^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$.
b. On a $\vec{LB} \cdot \vec{LC} = LB \times LC \times \cos(\widehat{BLC})$ donc $\cos(\widehat{BLC}) = \frac{\vec{LB} \cdot \vec{LC}}{LB \times LC} = \frac{-\frac{119}{4}}{\frac{13}{2} \times \frac{13}{2}} = -\frac{119}{169}$.
Avec la calculatrice on obtient : $\widehat{BLC} \approx 134,8^\circ$ à 0,1° près.

Voir exercices

- 68 Pour s'entraîner
146 Pour travailler en autonomie

3. Orthogonalité de droites et de plans

Orthogonalité de deux droites

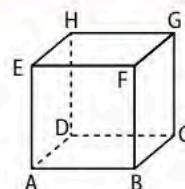
DÉFINITIONS (1) Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite d' de vecteur directeur $\vec{v}$ sont dites **orthogonales** si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

(2) Deux droites sont dites **perpendiculaires** si et seulement si elles sont **coplanaires** et **orthogonales**.

EXEMPLES : Soit ABCDEFGH un cube.

(1) Les droites (AB) et (EH) sont orthogonales car les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{EH}$ sont orthogonaux.

(2) Les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires car orthogonales et coplanaires dans le plan (ABC).



PROPRIÉTÉS (1) Deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

(2) Deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, si et seulement s'il existe une droite d'_1 parallèle à d_1 et une droite d'_2 parallèle à d_2 telles que d'_1 et d'_2 sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

DÉMONSTRATIONS

(1) Les droites d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ce qui équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

(2) Soit d_1 et d_2 deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit A un point de l'espace, d'_1 la parallèle à d_1 passant par A et d'_2 la parallèle à d_2 passant par A. Les droites d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ce qui équivaut à d'_1 et d'_2 orthogonales soit à d'_1 et d'_2 perpendiculaires puisque d'_1 et d'_2 sont coplanaires.

Animation

Orthogonalité
d'une droite
et d'un plan



Démonstration de cette propriété
Voir page 100

Vocabulaire

On dit d'une droite orthogonale
à un plan qu'elle est
perpendiculaire à ce plan.

Orthogonalité d'une droite et d'un plan

DÉFINITION Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est **orthogonale** à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathcal{P}$.

PROPRIÉTÉ Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à **deux vecteurs non colinéaires** de la direction de $\mathcal{P}$.

PROPRIÉTÉ Une droite d est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si d est orthogonale à **toutes les droites du plan $\mathcal{P}$** ce qui équivaut aussi à ce que d soit orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$.

PROPRIÉTÉS (1) Il existe une unique droite d passant par un point A et perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ donné (figure 1).

(2) Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ passant par un point A et perpendiculaire à une droite d donnée (figure 2).

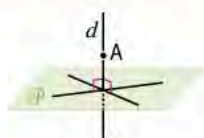


Figure 1

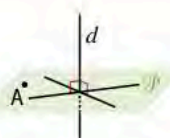


Figure 2

Étudier l'orthogonalité de droites et de plans dans un repère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2; -3; 4)$, $B(1; 2; -11)$, $C(-4; 5; -9)$, $D(-8; 3; 4)$ et $E(-3; 10; 6)$.

- 1 Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
- 2 Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
- 3 Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Méthode

Pour démontrer que deux droites sont orthogonales on peut démontrer qu'un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Voir exercices

76 Pour s'entraîner

148 Pour travailler en autonomie

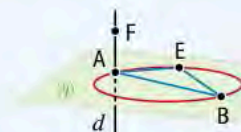
Solution commentée

- 1 On a $\vec{AB}(-1; 5; -15)$ et $\vec{AC}(-6; 8; -13)$. Les triplets $(-1; 5; -15)$ et $(-6; 8; -13)$ ne sont pas proportionnels donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B et C définissent un plan.
- 2 On a $\vec{DE}(5; 7; 2)$ et $\vec{DE} \cdot \vec{AB} = 5 \times (-1) + 7 \times 5 + 2 \times (-15) = -5 + 35 - 30 = 0$.
Donc le vecteur $\vec{DE}$ est orthogonal au vecteur $\vec{AB}$. Comme $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et $\vec{DE}$ est un vecteur directeur de la droite (DE), on en déduit que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
- 3 $\vec{DE} \cdot \vec{AC} = 5 \times (-6) + 7 \times 8 + 2 \times (-13) = -30 + 56 - 26 = 0$
donc le vecteur $\vec{DE}$ est orthogonal au vecteur $\vec{AC}$.
On a vu que $\vec{DE}$ est orthogonal à $\vec{AB}$, donc le vecteur $\vec{DE}$ qui est un vecteur directeur de (DE), est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan (ABC) donc la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Étudier l'orthogonalité de droites et de plans

$\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre [AB] d'un plan $\mathcal{P}$ et d est la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A.

Soit E un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B, et F un point de d distinct de A.



- 1 Justifier que les droites (AE) et (BE) sont perpendiculaires.
- 2 En déduire que la droite (BE) est perpendiculaire au plan (AEF).

Méthode

Pour démontrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, on peut démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Voir exercices

80 Pour s'entraîner

149 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

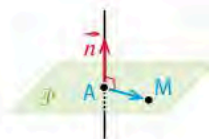
- 1 Les droites (AE) et (BE) sont coplanaires dans le plan $\mathcal{P}$. Dans ce plan, le point E appartient au cercle de diamètre [AB] donc les droites (AE) et (BE) sont perpendiculaires.
- 2 La droite d est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan. La droite (BE) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$, donc les droites d et (BE) sont orthogonales.
La droite d , c'est-à-dire (AF), est incluse dans le plan (AEF). La droite (BE) est donc orthogonale à deux droites sécantes, (AE) et (AF), du plan (AEF) : on en déduit que la droite (BE) est orthogonale au plan (AEF).

4. Vecteur normal à un plan

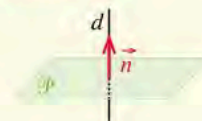
Caractérisation d'un plan avec le produit scalaire

À noter

Tous les vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires entre eux.



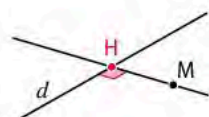
DÉFINITION On dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$.



PROPRIÉTÉ Un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$.

PROPRIÉTÉ Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou sur un plan

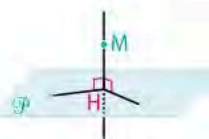


DÉFINITION Projeté orthogonal sur une droite

Soit M un point et d une droite de l'espace. On appelle projeté orthogonal de M sur d , l'unique point H vérifiant :

- si M appartient à d alors H est confondu avec M ;
- sinon, H est le projeté orthogonal de M sur d dans l'unique plan $\mathcal{P}$ passant par M et contenant la droite d .

PROPRIÉTÉ Le projeté orthogonal du point M sur une droite d est le point de la droite d le plus proche du point M.



DÉFINITION Projeté orthogonal sur un plan

Soit M un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan. On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, le point H intersection de $\mathcal{P}$ avec sa perpendiculaire passant par M.

PROPRIÉTÉ Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche du point M.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Soit $\mathcal{P}$ un plan et M un point. On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

1^{er} cas : M appartient à $\mathcal{P}$. Alors, M est confondu avec H donc $MH=0$. Si A est un point de $\mathcal{P}$ distinct de M, alors $MA \neq 0$ donc $MA > 0$ soit $MA > MH$.

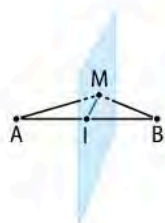
2^e cas : M n'appartient pas à $\mathcal{P}$. Soit A un point de $\mathcal{P}$ distinct de H. Le vecteur $\vec{HM}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ et $\vec{HA}$ est un vecteur de la direction de $\mathcal{P}$ donc $\vec{HM}$ est orthogonal à $\vec{HA}$: le triangle MHA est rectangle en H. La longueur de l'hypoténuse [MA] du triangle MHA est strictement plus grande que les deux autres côtés de ce triangle rectangle. En particulier $MA > MH$.

Dans tous les cas, H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche du point M.

Plan médiateur d'un segment

DÉFINITION Soit A et B deux points distincts de l'espace. Le **plan médiateur** du segment [AB] est le plan passant par le milieu I de [AB] et de vecteur normal $\vec{AB}$.

PROPRIÉTÉ Le plan médiateur de [AB] est l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et B.



CAPACITÉ

7

Déterminer si un vecteur est normal à un plan

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2; -3; 5)$, $B(1; 0; 7)$ et $C(-4; 1; 3)$.

- 1 Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
- 2 Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Méthode

Pour démontrer qu'un vecteur est normal à un plan, on montre que c'est un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Voir exercices

85 Pour s'entraîner

150 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- 1 Pour démontrer que les points A, B et C définissent un plan, on prouve que ces points ne sont pas alignés. On a $\vec{AB}(-1; 3; 2)$ et $\vec{AC}(-6; 4; -2)$. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires car les triplets $(-1; 3; 2)$ et $(-6; 4; -2)$ ne sont pas proportionnels. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés : ils définissent un plan.
- 2 $\vec{AB} \cdot \vec{n} = -1 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times (-1) = -1 + 3 - 2 = 0$, donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{AB}$.
 $\vec{AC} \cdot \vec{n} = -6 \times 1 + 4 \times 1 + (-2) \times (-1) = -6 + 4 + 2 = 0$,
 donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{AC}$.
 Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur non nul, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan (ABC), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

CAPACITÉ

8

Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou un plan

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2; 3; 3)$, $B(-1; 17; -17)$ et le vecteur $\vec{n}(2; 3; -4)$.

On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

- 1 Démontrer que le point $H(-9; 5; -1)$ appartient à $\mathcal{P}$.
- 2 a. Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.
 b. En déduire la distance du point B au plan $\mathcal{P}$.
- 3 Soit $C(5; 11; -5)$.
 a. Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).
 b. Calculer la distance du point H à la droite (BC).

Méthode

Pour démontrer qu'un point H d'un plan $\mathcal{P}$ est le projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$ d'un point B, on démontre que le vecteur $\vec{HB}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Solution commentée

- 1 On a $\vec{AH}(-9-2; 5-3; -1-3)$ soit $\vec{AH}(-11; 2; -4)$.
 On calcule le produit scalaire $\vec{AH} \cdot \vec{n} = -11 \times 2 + 2 \times 3 + (-4) \times (-4) = -22 + 6 + 16 = 0$.
 On en déduit que le point H appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, c'est-à-dire que H appartient à $\mathcal{P}$.
- 2 a. Le vecteur $\vec{HB}$ a pour coordonnées $(-1 - (-9); 17 - 5; -17 - (-1))$ donc $\vec{HB}$ a pour coordonnées $(8; 12; -16)$. On a donc $\vec{HB} = 4\vec{n}$ donc la droite (HB) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. Comme H appartient à $\mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.
 b. Comme H est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{P}$, la distance du point B au plan $\mathcal{P}$ est la longueur HB.
 $HB = \|\vec{HB}\| = \sqrt{8^2 + 12^2 + (-16)^2} = \sqrt{64 + 144 + 256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$.
 La distance du point B au plan $\mathcal{P}$ est égale à $4\sqrt{29}$ soit environ 21,54 à 0,01 près.
- 3 a. On a $\vec{BC}(6; -6; 12)$ et $\vec{CH}(-14; -6; 4)$ donc $\vec{BC} \cdot \vec{CH} = 6 \times (-14) + (-6) \times (-6) + 12 \times 4$ soit $\vec{BC} \cdot \vec{CH} = -84 + 36 + 48 = 0$.
 Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{CH}$ sont orthogonaux, C appartient à chacune des droites (BC) et (CH), donc (BC) et (CH) sont perpendiculaires en C.
 C est donc le projeté orthogonal de H sur (BC).
 b. $CH = \|\vec{CH}\| = \sqrt{(-14)^2 + (-6)^2 + 4^2} = \sqrt{196 + 36 + 16} = \sqrt{248} = 2\sqrt{62}$.
 La distance du point H à la droite (BC) est égale à $2\sqrt{62}$ soit environ 15,75 à 0,01 près.

Voir exercices

91 Pour s'entraîner

152 Pour travailler en autonomie

5. Applications du produit scalaire

Équation cartésienne d'un plan

À noter

Le plan (xOy) a pour équation $z=0$, le plan (yOz) a pour équation $x=0$ et le plan (xOz) a pour équation $y=0$.

PROPRIÉTÉ Dans un repère orthonormé, un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement, si les réels a , b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

• Soit $A(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

On a $\vec{AM}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ et $\vec{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$.

M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui équivaut à :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \text{ soit } ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$\text{donc } ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

En posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ on en déduit que M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$.

• Réciproquement, puisque a , b et c ne sont pas tous nuls on peut supposer par exemple que a est différent de 0. Le point $A\left(\frac{-d}{a}; 0; 0\right)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ car $a \times \frac{-d}{a} + b \times 0 + c \times 0 + d = -d + d = 0$.

L'équation $ax + by + cz + d = 0$ équivaut à $ax + by + cz + a \times \frac{d}{a} = 0$ soit :

$$ax + a \times \frac{d}{a} + by + cz = 0 \text{ donc } a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0, \text{ c'est-à-dire } \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

où $\vec{n}(a; b; c)$.

$\mathcal{E}$ est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Intersection de droites et de plans

PROPRIÉTÉS Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

(1) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, alors la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

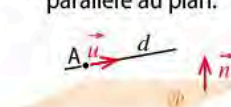
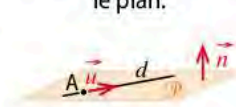
(2) Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :

- si A appartient à $\mathcal{P}$, alors la droite d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$;
- si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, alors la droite d est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

La droite est sécante au plan.

La droite est incluse dans le plan.

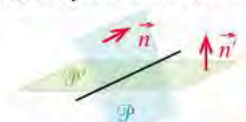
La droite est strictement parallèle au plan.



(1) Les plans sont parallèles.



(2) Les plans sont sécants.



PROPRIÉTÉS Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

(1) Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

(2) Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite.

Comme les vecteurs $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n}'(a'; b'; c')$ sont colinéaires si et seulement si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ sont proportionnels, on en déduit la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ On se place dans un repère orthonormé.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont sécants si et seulement si, $(a; b; c)$ n'est pas proportionnel à $(a'; b'; c')$.

Vidéo 03:40

Déterminer une équation cartésienne d'un plan



CAPACITÉ

9

Déterminer une équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point

Soit $A(-1; 2; 5)$ un point de l'espace et $\vec{n}(-3; 1; 4)$ un vecteur.

- 1 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
- 2 Soit $B(3; 8; 7)$.
Déterminer une équation du plan médiateur $\mathcal{P}'$ du segment $[AB]$.

Solution commentée

- 1 **Méthode n° 1 :** Comme le vecteur $\vec{n}(-3; 1; 4)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, ce plan a une équation de la forme $-3x + y + 4z + d = 0$. Le point $A(-1; 2; 5)$ appartient au plan $\mathcal{P}$, donc $-3x_A + y_A + 4z_A + d = 0$ soit $-3 \times (-1) + 2 + 4 \times 5 + d = 0$ donc $25 + d = 25$ et $d = -25$.

Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation $-3x + y + 4z - 25 = 0$.

Méthode n° 2 : Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace : on a $\vec{AM}(x+1; y-2; z-5)$.

M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ce qui équivaut à $(x+1) \times (-3) + (y-2) \times 1 + (z-5) \times 4 = 0$ soit $-3x - 3 + y - 2 + 4z - 20 = 0$ donc $-3x + y + 4z - 25 = 0$.

Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation $-3x + y + 4z - 25 = 0$.

- 2 $\mathcal{P}'$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et de vecteur normal $\vec{AB}$.

I a pour coordonnées : $\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{2+8}{2}; \frac{5+7}{2}\right)$ soit $I(1; 5; 6)$.

$\vec{AB}$ a pour coordonnées $(3 - (-1); 8 - 2; 7 - 5)$ soit $\vec{AB}(4; 6; 2)$.

$\mathcal{P}'$ a une équation de la forme $4x + 6y + 2z + d = 0$ et I appartient à $\mathcal{P}'$ donc :

$4x_I + 6y_I + 2z_I + d = 0$ soit $4 \times 1 + 6 \times 5 + 2 \times 6 + d = 0$ donc $46 + d = 0$ et $d = -46$.

Le plan $\mathcal{P}'$ a donc pour équation $4x + 6y + 2z - 46 = 0$ soit aussi $2x + 3y + z - 23 = 0$.

Voir exercices

98 Pour s'entraîner

155 Pour travailler en autonomie

Méthode

Pour déterminer un vecteur normal d'un plan à partir d'une de ses équations cartésiennes, on identifie les coefficients de x , y et z dans cette équation.

Voir exercices

111 Pour s'entraîner

157 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

10

Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan

Soit $A(1; 0; 3)$, $B(2; 2; 7)$ et $C(-1; 5; 4)$ trois points de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + y - z + 1 = 0$.

- 1 Démontrer que les points A , B et C définissent un plan.
- 2 a. Démontrer que $\mathcal{P}$ est le plan (ABC) .
b. En déduire un vecteur normal au plan (ABC) .

Solution commentée

- 1 On a $\vec{AB}(2-1; 2-0; 7-3)$ soit $\vec{AB}(1; 2; 4)$ et $\vec{AC}(-1-1; 5-0; 4-3)$ soit $\vec{AC}(-2; 5; 1)$. Les triplets de coordonnées $(1; 2; 4)$ et $(-2; 5; 1)$ ne sont pas proportionnels donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A , B et C ne sont donc pas alignés : ils définissent un plan.

- 2 a. On vérifie que chacun des points A , B et C appartient au plan $\mathcal{P}$.

$2x_A + y_A - z_A + 1 = 2 \times 1 + 0 - 3 + 1 = 0$ donc A est un point de $\mathcal{P}$.

$2x_B + y_B - z_B + 1 = 2 \times 2 + 2 - 7 + 1 = 4 + 2 - 7 + 1 = 0$ donc B appartient au plan $\mathcal{P}$.

$2x_C + y_C - z_C + 1 = 2 \times (-1) + 5 - 4 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$ donc C appartient au plan $\mathcal{P}$.

On en déduit que le plan $\mathcal{P}$ est confondu avec le plan (ABC) .

b. Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne : $2x + y - z + 1 = 0$

cette équation est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = -1$.

Le vecteur $\vec{n}(2; 1; -1)$ est donc un vecteur normal au plan (ABC) .

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit d la droite passant par le point $A(1; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3; 1; 4)$. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point $B(-15; -10; 4)$ sur la droite d .

Méthode

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H d'un point B sur une droite d , on traduit l'appartenance de H à la droite d et l'orthogonalité de d et (BH) .

Solution commentée

Le point H est le point de la droite d tel que les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Soit $(x_H; y_H; z_H)$ les coordonnées de H . Une représentation paramétrique de d est

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ il existe donc un réel } t_0 \text{ tel que } \begin{cases} x_H = 1 - 3t_0 \\ y_H = -2 + t_0 \\ z_H = 1 + 4t_0 \end{cases}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{BH}$ sont $(x_H + 15; y_H + 10; z_H - 4)$ soit en substituant les expressions de x_H, y_H et z_H : $(16 - 3t_0; 8 + t_0; -3 + 4t_0)$.

On a donc : $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{u} = (16 - 3t_0) \times (-3) + (8 + t_0) \times 1 + (-3 + 4t_0) \times 4 = 26t_0 - 52$.

Comme $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{u} = 0$ on déduit que $26t_0 - 52 = 0$ soit $26t_0 = 52$ et $t_0 = \frac{52}{26}$ soit $t_0 = 2$.

On obtient alors $x_H = 1 - 3t_0 = 1 - 3 \times 2 = -5$; $y_H = -2 + t_0 = -2 + 2 = 0$ et $z_H = 1 + 4t_0 = 1 + 4 \times 2 = 9$.

Le point H a donc pour coordonnées $(-5; 0; 9)$.

Voir exercices

95 Pour s'entraîner

154 Pour travailler en autonomie

Vidéo 11-14

Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan



Déterminer dans un repère l'intersection d'une droite et d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - 7z - 14 = 0$ et d la droite dont une représentation

$$\text{paramétrique est } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -11 + 3t \\ z = 19 - 5t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

Solution commentée

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

Le point M appartient à l'intersection de $\mathcal{P}$ et d si et seulement si M appartient à $\mathcal{P}$ et M appartient à d , ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z - 14 = 0 \\ x = -2 + t \\ y = -11 + 3t \\ z = 19 - 5t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En substituant les expressions de x, y et z dans la première équation, on obtient :

$$2 \times (-2 + t) + 3 \times (-11 + 3t) - 7 \times (19 - 5t) - 14 = 0 \text{ soit}$$

$$-4 + 2t - 33 + 9t - 133 + 35t - 14 = 0$$

$$\text{donc } 46t - 184 = 0 \text{ et } 46t = 184 \text{ puis } t = \frac{184}{46} \text{ donc } t = 4.$$

$$\text{On en déduit : } x = -2 + 4 = 2; y = -11 + 3 \times 4 = 1 \text{ et } z = 19 - 5 \times 4 = -1.$$

Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont donc sécants au point $A(2; 1; -1)$.

Voir exercices

125 Pour s'entraîner

158 Pour travailler en autonomie

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne

Soit A (8 ; 10 ; 5) un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - z + 1 = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Méthode

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point A sur un plan, on détermine les coordonnées du point d'intersection de ce plan avec sa perpendiculaire passant par A.

Solution commentée

Le point H est l'intersection de $\mathcal{P}$ avec sa perpendiculaire d passant par A. Comme $\vec{n}(2; 3; -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de d .

Une représentation paramétrique de d est donc $\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 10 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Comme H appartient à la fois à d et à $\mathcal{P}$, ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le

$$\text{système: } \begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ x = 8 + 2t \\ y = 10 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

En substituant les expressions de x, y et z dans la première équation, on obtient :

$$2(8 + 2t) + 3(10 + 3t) - (5 - t) + 1 = 0 \text{ soit } 42 + 14t = 0 \text{ donc } 14t = -42 \text{ et } t = -3.$$

On a alors : $x = 8 + 2 \times (-3) = 2$; $y = 10 + 3 \times (-3) = 1$ et $z = 5 - (-3) = 8$.

Le point H a donc pour coordonnées (2 ; 1 ; 8).

Voir exercices

132 Pour s'entraîner

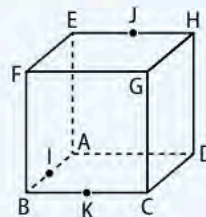
159 Pour travailler en autonomie

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures

Soit ABCDEFGH un cube.

L'espace est muni du repère orthonormé (A ; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$).

Soit I le milieu du segment [AB], J le milieu du segment [EH] et K le milieu du segment [BC].



1 a. Déterminer les coordonnées de I, J et K.

b. Démontrer que le triangle IJK est rectangle en I.

c. Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle IJK.

2 On admet que le point $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ est le projeté orthogonal de F sur le plan (IJK). Déterminer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre IJKF.

Méthode

Pour calculer des aires de figures planes de l'espace, on peut utiliser les formules de géométrie du plan.

Solution commentée

1 a. On a A(0 ; 0 ; 0) et B(1 ; 0 ; 0) donc I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$.

On a E(0 ; 0 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1) donc J a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.

On a B(1 ; 0 ; 0) et C(1 ; 1 ; 0) donc K a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.

b. On a $\vec{IJ}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ et $\vec{IK}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ donc $\vec{IJ} \cdot \vec{IK} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0$ ce qui prouve que le triangle IJK est rectangle en I.

c. $IJ = \|\vec{IJ}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $IK = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

On en déduit : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times IJ \times IK = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2 [FM] est la hauteur du tétraèdre IJKF relative à la face IJK, donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times FM$.

On a F(1 ; 0 ; 1) donc $FM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}.$$

Voir exercices

137 Pour s'entraîner

160 Pour travailler en autonomie

Étudier une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ DU COURS 3 PAGE 92

Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$.

RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

Pour démontrer cette propriété, on va raisonner par double implication.

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan $\mathcal{P}$.

Si d est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, alors par définition $\vec{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction du plan $\mathcal{P}$, en particulier $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.

5 Réciproquement, supposons que la droite d est telle que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.
On a donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

Soit $\vec{t}$ un vecteur de la direction du plan $\mathcal{P}$.

Il existe deux réels x et y tels que $\vec{t} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{t} = \vec{u} \cdot (x\vec{v} + y\vec{w}) = x\vec{u} \cdot \vec{v} + y\vec{u} \cdot \vec{w} = x \times 0 + y \times 0 = 0.$$

10 On en déduit que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{t}$.

Le vecteur $\vec{u}$ est donc orthogonal à tout vecteur de la direction du plan $\mathcal{P}$:

la droite d est donc orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

On a donc démontré que la droite d est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan $\mathcal{P}$.

QUESTIONS

1. Quelle implication démontre-t-on aux lignes 3 et 4 ?

2. a. Quelle implication utilise-t-on pour déterminer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$ aux lignes 5 et 6 ?

b. Est-ce la même implication qui est utilisée ligne 9 pour justifier que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{t}$?

3. Quelles hypothèses sur les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ permettent de déduire l'existence de deux réels x et y tels que $\vec{t} = x\vec{v} + y\vec{w}$? (ligne 8) ?

4. Quelles propriétés du produit scalaire sont utilisées ligne 9 pour calculer $\vec{u} \cdot \vec{t}$?

Faire une démonstration

Démontrer les propositions suivantes.

D1 Le plan médiateur $\mathcal{P}$ de $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et B .

Piste : Raisonner par double inclusion.

D2 Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.

L'unique plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Piste : Considérer la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

Calcul mental

1 Pour chacune des équations du second degré suivantes, déterminer la solution entière comprise entre -3 et 3 .

a. $2x^2 + 9x - 11 = 0$ b. $3x^2 + x - 24 = 0$

2 Développer et simplifier les expressions suivantes.

a. $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$ b. $(2 - \sqrt{5})^2$

3 Donner l'écriture scientifique des nombres suivants.

a. $2 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3}$ b. $4 \times 10^2 \times 3 \times 10^3$
c. $0,5 \times 10^{-4} \times 0,1$ d. $1,3 \times 2 \times 10^{-7}$

4 Calculer.

a. $\frac{5}{6} \times \frac{9}{10}$ b. $\frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{7}$ c. $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}}$

5 Résoudre les équations suivantes.

a. $4x - 3 = 5$ b. $(2x + 1)(x - 3) = 0$

6 Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions f et g suivantes.

a. $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$
b. $g(x) = e^{2x} + 2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

Automatismes

Évolutions et pourcentages

7 Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout entier naturel n . Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .

8 Déterminer la somme des douze premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison 3 .

9 Un modèle de voiture est vendu habituellement $19\,320$ €. Lors d'une campagne de promotion, ce modèle est vendu $16\,808,40$ €.

Déterminer le taux de réduction effectué et l'exprimer en pourcentage.

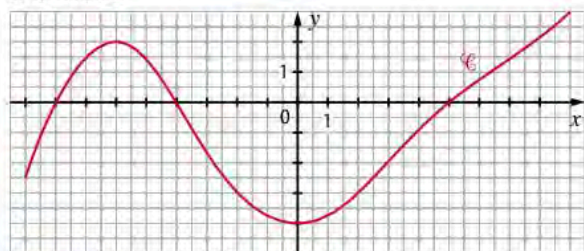
10 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. L'évolution réciproque d'une augmentation de 40% est une diminution de 40% .
2. L'évolution réciproque d'une diminution de 20% est une augmentation de 25% .

Lectures graphiques

Pour les exercices **11** et **12**, on utilise la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-9; 9]$ donnée ci-dessous.



- 11** 1. Lire graphiquement l'image de 3 par f .
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-9; 9]$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = -3$.

- 12** 1. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 1,5$.
2. Déterminer graphiquement le signe de f .
3. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2,5$.

13 Question de méthodes

Comment peut-on procéder pour tracer dans un repère du plan la droite d d'équation $y = 2x + 1$?

Algorithmique et programmation

14 On donne le script d'une fonction Python.

1. Quelle est le type de la variable retournée par la fonction f ?
2. Que retourne l'appel $f(30)$?
3. Peut-on trouver une valeur a tel que l'appel $f(a)$ retourne $[]$?

```
def f(y):
    P=[]
    x=0
    while x<100:
        x=x+y
        y=y+1
        P.append(x)
    return P
```

15 On donne ci-contre le script d'une fonction Python.

1. Que retourne l'appel $h(5,7)$?
2. Que retourne l'appel $h(9,9)$?
3. A quoi correspond la valeur retournée par la fonction h ?

```
def h(x,y):
    if x<y:
        return x
    else:
        return y
```

16 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

On considère les listes L et P définies en Python par les scripts ci-dessous où $a\%b$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b .

```
1 L=[x for x in range(30) if x%5==0]
2 P=[x for x in L if x>0]
```

1. L est la liste :
a. $[0,10,20,30]$ b. $[0,10,20]$
c. $[0,5,10,15,20,25]$ d. $[0,5,10,15,20,25,30]$
2. La liste P contient :
a. le même nombre d'éléments que L
b. un élément de moins que L c. l'entier 7
d. des entiers strictement positifs

Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Calcul de produits scalaires

Questions flash

- 17 ORAL** Soit A, B et C trois points de l'espace tels que :

$$AB = 10, AC = 6 \text{ et } \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{5}.$$

Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- 18 ORAL** Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 7$

- a. Rappeler l'expression du produit scalaire $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ en fonction des produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$.
 b. En déduire le produit scalaire $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.

- 19 ORAL** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux de l'espace. Donner la valeur du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- 20** Soit A, B et C trois points de l'espace tels que :

$$AB = 8, AC = 7 \text{ et } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}.$$

Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

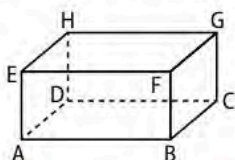
- 21** Soit A, B et C trois points de l'espace tels que :

$$AB = 5, AC = 16 \text{ et } \widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}.$$

Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- 22** On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que :

$$AB = 4, AE = 2 \text{ et } AD = 3.$$



Déterminer les produits scalaires suivants :

- a. $\vec{BC} \cdot \vec{BF}$ b. $\vec{CD} \cdot \vec{HD}$ c. $\vec{AD} \cdot \vec{AD}$
 d. $\vec{BC} \cdot \vec{HE}$ e. $\vec{AE} \cdot \vec{GH}$ f. $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$

- 23** Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{w} = -3.$$

Déterminer les produits scalaires suivants :

- a. $\vec{v}(7\vec{u})$ b. $\vec{v} \cdot \vec{u}$ c. $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w})$

- 24** Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -9 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{w} = 6.$$

1. Déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w})$.
 2. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $2\vec{v} + 3\vec{w}$?

- 25** Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tels que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6 \text{ et } \vec{AD} \cdot \vec{AC} = 5.$$

1. Exprimer $\vec{BD}$ en fonction de $\vec{BA}$ et $\vec{AD}$.
 2. En déduire le produit scalaire $\vec{BD} \cdot \vec{AC}$.

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Questions flash

- 26 ORAL** Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs.

1. **QCM** Choisir la ou les bonnes réponses.

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à :

- a. $xx' + yy'$ b. $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$
 c. $xx' + yy' + zz'$ d. $xy' - x'y$

2. Soit $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(4; 5; 6)$.

Vérifier que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à 32.

- 27** On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Calculer dans chacun des cas suivants le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

- a. $\vec{u}(-3; -1; 0)$ et $\vec{v}(2; 0; 5)$ b. $\vec{u}(1; -1; 3)$ et $\vec{v}(2; 3; -2)$

- 28 PYTHON** Compléter un programme

Compléter le script de la fonction `pro_scal` donné ci-contre afin que cette fonction Python retourne le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coordonnées dans un repère orthonormé sont saisies dans les listes U et V.

```
def pro_scal(U,V):
    p=0
    for i in range(3):
        p=p+...
    return p
```

- 29** Soit $\vec{u}(7; -1; 2)$ et $\vec{v}(-3; -11; 5)$ deux vecteurs de l'espace.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 2. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

- 30** Démontrer que les vecteurs de l'espace $\vec{u}(-4; 6; 9)$ et $\vec{v}(3; -7; 6)$ sont orthogonaux.

- 31 PYTHON** Comprendre un programme

On considère le script de la fonction `orth` donné ci-dessous.

```
1 def orth(x1,y1,z1,x2,y2,z2):
2     p=x1*x2+y1*y2+z1*z2
3     return(p==0)
```

1. Que renvoie l'appel `orth(1,2,1,-1,1,-1)` ?
 2. Que renvoie l'appel `orth(3,0,2,1,2,3)` ?
 3. À quoi peut servir cette fonction ?

- 32** 1. Rappeler l'expression de la norme d'un vecteur en fonction des coordonnées de ce vecteur.

2. Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$:

- a. $\vec{u}(1; 2; 2)$ b. $\vec{u}(-2; -3; 6)$ c. $\vec{u}(9; 12; -8)$

- 33** Soit A(2; 7; 1), B(5; -1; 3) et C(0; 4; -3) trois points.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
 2. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

- 34** 1. Rappeler la formule de polarisation donnant le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

2. En déduire le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$.

Orthogonalité de droites et de plans

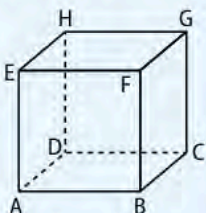
Questions flash

- 35 ORAL** Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Que peut-on dire des droites d et d' ?
- 36 ORAL** Soit $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{v}, \vec{w})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ telle que d est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Que peut-on dire des produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$?
- 37** Soit d la droite passant par le point $A(1; 1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(7; 5; 3)$ et d' la droite passant par le point $B(4; 0; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-4; 5; 1)$.
 1. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 2. En déduire que d et d' sont orthogonales.
- 38** Soit $A(1; -2; 7)$, $B(3; -1; 10)$ et $C(-4; 5; 8)$ trois points.
 1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
 b. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
 2. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AC) ?
- 39** Soit $A(4; -2; 1)$ et $B(-1; 2; 2)$ deux points. Le plan $\mathcal{P}$ passe par A et est dirigé par les vecteurs $\vec{v}(1; 1; 1)$ et $\vec{w}(1; 2; -3)$.
 1. Déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$.
 2. a. Calculer les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{v}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{w}$.
 b. Que peut-on en déduire pour la droite (AB) et le plan $\mathcal{P}$?
- 40 LOGIQUE** Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, $\mathcal{P}$ un plan et $\vec{v}$ un vecteur non nul de la direction du plan $\mathcal{P}$.
 1. La proposition suivante est-elle vraie ?
 « Si d est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. »
 2. a. Énoncer la réciproque de la proposition précédente.
 b. Cette réciproque est-elle vraie ?

Vecteur normal à un plan

Questions flash

- 41 ORAL** Une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$. Que représente le vecteur $\vec{n}$ pour le plan $\mathcal{P}$?
- 42 ORAL** Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$, A un point de l'espace et d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$. Que peut-on dire du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d ?
- 43 ORAL** ABCDEFGH est un cube.
 1. Donner un vecteur normal au plan (ADH) dont les extrémités sont des sommets du cube.
 2. Quel est le projeté orthogonal de E sur le plan (ABC) ?



44 Soit $\mathcal{P}$ un plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et soit $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
 Donner les valeurs des produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{n}$ et $\vec{v} \cdot \vec{n}$.

45 Soit $\mathcal{P}$ un plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et soit $\vec{n}$ un vecteur non nul tel que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.
 Que représente le vecteur $\vec{n}$ pour le plan $\mathcal{P}$?

46 Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(3; 6; -9)$.
 1. Justifier que les vecteurs ci-dessous sont des vecteurs normaux au plan $\mathcal{P}$.
 a. $\vec{n}_1(1; 2; -3)$ b. $\vec{n}_2(-2; -4; 6)$ c. $\vec{n}_3(1,5; 3; -4,5)$
 2. Pourquoi le vecteur $\vec{v}(4; 5; -1)$ n'est-il pas un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$?

47 Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1; 1; 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; 1; -2)$ et $\vec{v}(2; 3; -5)$.
 Soit $\vec{n}(1; 1; 1)$ un vecteur de l'espace.
 1. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
 2. Calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{n}$ et $\vec{v} \cdot \vec{n}$.
 3. Que peut-on dire du vecteur $\vec{n}$ pour le plan $\mathcal{P}$?

48 Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$. Soit B le point de l'espace tel que $\vec{AB} = 3\vec{n}$.
 Quel est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{P}$?

Équations d'un plan

Questions flash

- 49 ORAL** Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Quel est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$?
- 50 ORAL** Déterminer une équation du plan (xOy) .
- 51 ORAL** Donner un vecteur normal au plan (yOz) .

52 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - 2z + 1 = 0$.
 Parmi les points ci-dessous, déterminer ceux qui appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

a. $A(-2; 5; 6)$ b. $B(7; 3; 12)$ c. $C(5; -2; 4)$

53 Déterminer le réel d pour que le point $A(1; -2; -1)$ appartienne au plan d'équation $3x - 4y + 3z + d = 0$.

54 Justifier que le plan $\mathcal{P}$ passant par le point O , origine du repère, et de vecteur normal $\vec{n}(5; -3; 4)$ a pour équation $5x - 3y + 4z = 0$.

55 Soit le vecteur $\vec{n}(1; 2; -7)$ et les points $A(5; 1; -3)$ et $M(x; y; z)$ où x , y et z sont trois réels.
 1. Exprimer les coordonnées de $\vec{AM}$ en fonction de x , y et z .
 2. Exprimer en fonction de x , y et z le produit scalaire $\vec{AM} \cdot \vec{n}$.
 3. En déduire une équation du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Lorsque cela est nécessaire, on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Calcul de produits scalaires

56 Capacité 1, p. 89

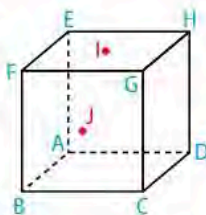
ABCDEFGH est un cube d'arête a . I est le centre du carré EFGH et J le centre du carré BCGF.

1. Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ b. $\vec{EI} \cdot \vec{HF}$ c. $\vec{BJ} \cdot \vec{CG}$

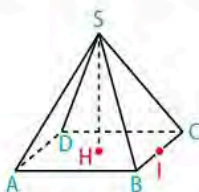
2. a. Démontrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{EB}$.

b. En déduire le produit scalaire $\vec{EA} \cdot \vec{IJ}$.



57 SABCD est une pyramide de base carrée ABCD et de sommet S, telle que les faces SAB, SBC, SDC et SDA sont des triangles équilatéraux.

H est le centre du carré ABCD et I est le milieu de [BC]. On pose $AB = a$.



1. Calculer le produit scalaire $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$.

2. Que représente le point H dans le triangle SAC ?

3. Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\vec{SH} \cdot \vec{AC}$ b. $\vec{AH} \cdot \vec{DB}$ c. $\vec{HI} \cdot \vec{SA}$ d. $\vec{HI} \cdot \vec{DH}$

Piste 2 : Le triangle SAC est isocèle en S.

58 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AE = AD = a$ et $AB = 3a$.



Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ b. $\vec{DB} \cdot \vec{CG}$ c. $\vec{EG} \cdot \vec{HF}$ d. $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$

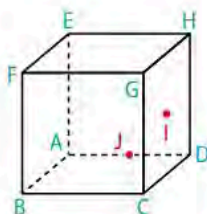
59 Capacité 2, p. 89

ABCDEFGH est un cube de côté a . Le point I est le centre de la face DCGH et J est le milieu du segment [AD].

1. Exprimer les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{BJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

2. a. Calculer le produit scalaire $\vec{AI} \cdot \vec{BJ}$.

b. Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (BJ) ?



60 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Pour tous points A, B et C tels que $AB = 9$ et $AC = 7$, on a $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 63$ ou $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -63$.

2. Pour tous points A, B et C tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5$ on a $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = -5$.

61 ABCDEFGH est un cube de côté a . On considère les points M et N définis par $\vec{AM} = 2\vec{AB} + 3\vec{AD} + 4\vec{AE}$ et $\vec{AN} = \vec{AB} - 2\vec{AD} + \vec{AE}$.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{AM} \cdot \vec{AN}$.

2. Que peut-on en déduire pour le triangle MAN ?

62 LOGIQUE On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soit l'énoncé : « Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ».

1. Dire si cet énoncé est vrai ou faux. Justifier.

2. Écrire l'énoncé réciproque de cet énoncé. Est-il vrai ?

Produit scalaire en géométrie repérée

63 Capacité 3, p. 91

On considère les points $A(1; -3; 2)$, $B(8; -4; 5)$ et $C(2; 1; 1)$.

1. Justifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.

2. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

64 On considère les points $A(4; 2; -3)$, $B(6; 4; 0)$, $C(7; 6; -2)$ et $D(5; 4; -5)$.

1. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2. a. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

b. Que peut-on en déduire pour le parallélogramme ABCD ?

65 On considère les points $A(3; 2; 1)$, $B(10; 6; -1)$, $C(9; 8; -9)$ et $D(2; 4; -7)$.

1. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2. a. Démontrer que les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ sont orthogonaux.

b. Que peut-on en déduire pour le parallélogramme ABCD.

66 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit $A(3; 5; -4)$, $B(1; -2; -1)$ et $C(6; -3; 0)$ trois points.

1. Le triangle ABC est :

- a. rectangle en A b. rectangle en B
- c. rectangle en C d. isocèle en B

2. Le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est égal à :

- a. 62 b. 5 518 c. 0 d. AB^2

67 Une question ouverte

On considère un cube ABCDEFGH dont les arêtes sont de longueur 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$. À tout réel x de l'intervalle $]0; 1[$, on associe le point M du segment [DF] tel que $\vec{DM} = x \vec{DF}$.

1. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x; x; x)$.

2. Existe-il une valeur de x telle que le triangle MEB est rectangle en M ?

Piste → Voir p. 466

68 Capacité 4, p. 91

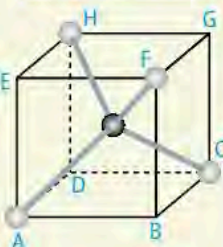
Soit les points de l'espace $A(7; -2; -5)$, $B(5; 4; 4)$ et $C(5; 1; 1)$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- b. Calculer les longueurs AB et AC.
2. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de l'angle BAC en degrés.

MATHS & CHIMIE

69 Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- les noyaux d'atomes d'hydrogène peuvent être positionnés sur les sommets A, C, F et H d'un cube ABCDEFGH ;
- le noyau de carbone au centre de la molécule est alors positionné au centre O du cube ABCDEFGH.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées du point O.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$.
3. Calculer la longueur OA.
4. En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{AOC}$ que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène.

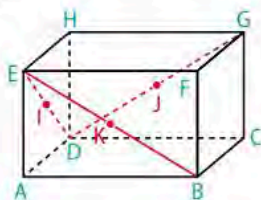
LE SAVIEZ-VOUS

Le méthane persiste moins de dix ans dans l'atmosphère, mais c'est un gaz à effet de serre bien plus puissant que le CO_2 , avec un potentiel de réchauffement global 28 fois plus élevé.

70 Soit $A(7; -5; 6)$, $B(0; -4; 3)$, $C(1; -3; 1)$ trois points de l'espace et J le milieu de [AC].

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ}$.
- b. Calculer les longueurs BC et BJ.
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{CBJ}$ en degrés.

71 Soit ABCDEFGH le parallélépipède rectangle ci-dessous, avec $AB = 2$, $AD = AE = 1$. Soit I, J et K les milieux respectifs de [DE], [DG] et [EB].



On se place dans le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

1. Démontrer que le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ est orthonormé.
2. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, puis calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$ et les longueurs IJ et IK.
- b. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{JIK}$ en degrés.

Formules de polarisation

72 Soit A, B et C trois points de l'espace tels que :

$$AB = 7, AC = 8 \text{ et } BC = 5.$$

1. a. À l'aide d'une formule de polarisation démontrer que :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(BC^2 - AB^2 - AC^2).$$

- b. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis celle du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Déterminer une valeur approchée à 0,01° près de l'angle BAC en degrés.

73 Soit A, B et C trois points de l'espace tels que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$.

1. a. À l'aide d'une formule de polarisation déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- b. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{ABC}$ en degrés.

74 LOGIQUE Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tels que ABCD est un parallélogramme.

1. À l'aide d'une formule de polarisation, démontrer que :

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(BD^2 - AC^2).$$

2. Démontrer alors la propriété suivante : « Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur. »

75 Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tels que ABCD est un parallélogramme. On suppose que $AC = 10$ et $BD = 4$.

À l'aide d'une formule de polarisation, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Orthogonalité de droites et de plans

76 Capacité 5, p. 93

Soit les points $A(-5; -4; 9)$, $B(-4; -10; 12)$, $C(-3; -2; 10)$, $D(7; 1; -5)$ et $E(-5; 6; 9)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

77 Soit les points $A(7; -1; 8)$, $B(10; 3; 6)$, $C(1; -2; 6)$ et $D(-5; 2; 5)$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

78 Soit les points $M(2; 5; -3)$, $N(11; 8; -1)$, $R(1; -3; 7)$ et $S(2; -6; 7)$.

Démontrer que les droites (MN) et (RS) sont orthogonales.

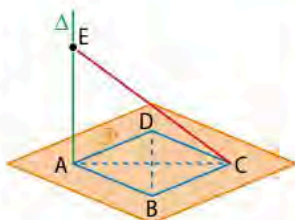
79 Soit les points $A(1; 1; 1)$, $B(3; 0; 0)$, $C(2; 1; 0)$, $D(8; -1; 3)$ et $E(12; 3; 7)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

80 Capacité 6, p. 93

Soit ABCD un carré d'un plan $\mathcal{P}$. Δ est la perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ passant par A, et E est un point quelconque de Δ .

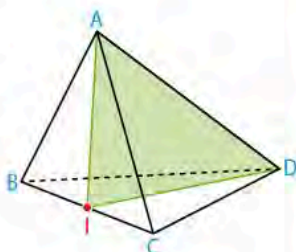
- Justifier que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires.
- En déduire que les droites (DB) et (EC) sont orthogonales.



81 ABCD est un tétraèdre régulier et I est le milieu du segment [BC].

Démontrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (IAD).

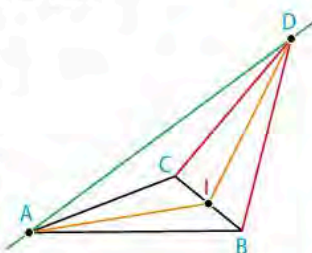
Piste : Dans un tétraèdre régulier, chacune des faces est un triangle équilatéral.



82 Soit ABC un triangle isocèle en A.

On considère un point D non situé dans le plan (ABC) et tel que BCD est isocèle en D. On note I le milieu de [BC].

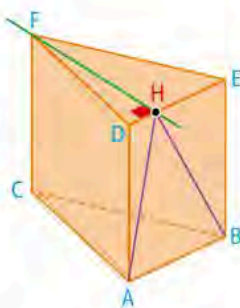
- Démontrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (AID).
- En déduire que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales.



83 ABCDEF est un prisme droit, ses faces ABED, ADFC et BEFC étant des rectangles.

On considère le point H, pied de la hauteur issue de F dans le triangle DEF.

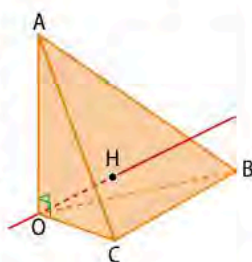
- Démontrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (DEF).
 - En déduire que (FH) est perpendiculaire au plan (ABE).
2. Démontrer que les triangles FHA et FHB sont rectangles.



84 OABC est un tétraèdre tel que OAB, OBC et OCA sont des triangles rectangles. La perpendiculaire au plan (ABC) passant par O coupe (ABC) en H.

- Justifier que la droite (OH) est orthogonale à la droite (BC).
- Montrer que (AH) est une hauteur du triangle ABC. Quel est le rôle du point H dans le triangle ABC ?

Piste 2 : On pourra montrer que (BC) est perpendiculaire à un plan contenant la droite (AH).



Vecteur normal à un plan

85 Capacité 7, p. 95

On considère les points A(-1 ; 2 ; 7), B(3 ; 3 ; 2) et C(0 ; 3 ; 8).

- Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
- Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; -3 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

86 Soit les points A(-2 ; 1 ; 0), B(1 ; 3 ; 1) et C(3 ; 0 ; 3).

- Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
- Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-7 ; 4 ; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

87 Soit les points A(-1 ; 2 ; 3), B(1 ; 4 ; 6) et C(-2 ; 5 ; 8).

- Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
- Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1 ; -13 ; 8)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

88 Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A(4 ; 8 ; -4) et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$ et $\vec{v}(4 ; 1 ; -3)$.

- Démontrer que le vecteur $\vec{n}(0 ; 3 ; 1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
- Déterminer un vecteur normal $\vec{n}_1$ au plan $\mathcal{P}$, tel que la troisième coordonnée de $\vec{n}_1$ soit égale à 7.
- Déterminer un vecteur normal $\vec{n}_2$ du plan $\mathcal{P}$, tel que la deuxième coordonnée de $\vec{n}_2$ soit égale à -1.
- Est-il possible de trouver un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ dont la première coordonnée est égale à 4 ?

89 PYTHON Comprendre et compléter un programme

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, $\mathcal{P}$ est un plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace. On considère la fonction `normal` dont on donne le script incomplet ci-dessous.

```
1 def normal(U,V,N):
2     p1=0;p2=0
3     for i in range(3):
4         p1=p1+U[i]*N[i]
5         p2=p2+V[i]*N[i]
6     rep=(p1==0 ... p2==0)
7     return(rep)
```

Les listes U, V et N contiennent respectivement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$.

- Quel est le rôle de chacune des variables p1 et p2 ?
- Recopier et compléter ce script pour que l'appel `normal(U,V,N)` retourne un booléen indiquant si le vecteur $\vec{n}$ est ou n'est pas un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

- 90 LOGIQUE 1. Soit A et B deux points distincts d'un plan $\mathcal{P}$ de l'espace. L'énoncé suivant est-il vrai : « Si le vecteur $\vec{n}$ non nul vérifie $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$, alors $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ » ?
2. L'énoncé réciproque est-il vrai ?

91 Capacité 8, p. 95

On considère les points $A(8 ; -1 ; 3)$, $B(19 ; 10 ; 4)$ et le vecteur $\vec{n}(2 ; 2 ; 1)$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Démontrer que le point $H(9 ; 0 ; -1)$ appartient à $\mathcal{P}$.
2. a. Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.
- b. En déduire la distance du point B au plan $\mathcal{P}$.
3. Soit $C(9 ; 6 ; 7)$.
- a. Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).
- b. Calculer la distance du point H à la droite (BC).

92 On considère les points $A(4 ; 5 ; -7)$, $B(-15 ; 19 ; 34)$ et le vecteur $\vec{n}(-3 ; 2 ; 7)$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Démontrer que le point $H(3 ; 7 ; -8)$ appartient à $\mathcal{P}$.
2. a. Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.
- b. En déduire la distance du point B au plan $\mathcal{P}$.
3. Soit $C(11 ; 3 ; 0)$.
- a. Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).
- b. Calculer la distance du point H à la droite (BC).

MATHS & SVT

93 FORMEL Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre.



Cette île, étant le point de convergence de nombreuses tortues, des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données.

Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes. Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 100 mètres. Le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x ; y ; z)$ avec z strictement négatif, se situe dans l'océan. La modélisation des spécialistes établit que :

• la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite d_1 dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6t \\ z = -3t \end{cases} \text{ avec } t \text{ réel ;}$$

• la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite d_2 dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 10s \\ y = 2 + 6s \\ z = -4s \end{cases} \text{ avec } s \text{ réel.}$$

MATHS & SVT

1. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

- a. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite d_2 .
- b. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(3 ; 13 ; 27)$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
- c. On admet que la distance minimale entre les droites d_1 et d_2 est la distance HH' où $\vec{HH'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ avec H appartenant à la droite d_1 et H' appartenant à la droite d_2 .

Déterminer une valeur arrondie au mètre de cette distance minimale. On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel.

Calcul formel

Résoudre($\{10*s-3*t=3, 2+6*s-6*t=13, -4*s+3*t=27\}$, $\{s, t\}$)

$\rightarrow \left\{ \begin{cases} s = \frac{675}{1814} \\ t = \frac{603}{907} \end{cases} \right\}$

2. Les scientifiques décident d'installer une balise en mer. Elle est repérée par le point B de coordonnées $(2 ; 4 ; 0)$.
- a. Soit M un point de la droite d_1 .
- Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
- b. En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

LE SAVIEZ-VOUS ?

La carapace d'une tortue verte mesure en moyenne 115 cm et l'animal pèse entre 80 et 130 kg. Certains spécimens peuvent atteindre un poids de 300 kg pour une longueur de carapace de 1,5 m.

94 VRAI/FAUX

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(2 ; 2 ; 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1 ; 2 ; 2)$ et $\vec{v}(-1 ; 3 ; 1)$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Le vecteur $\vec{n}(4 ; 3 ; -5)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
2. Le projeté orthogonal de $B(7 ; 7 ; -2)$ sur le plan $\mathcal{P}$ est le point $H(3 ; 4 ; 3)$.
3. La distance du point B au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\sqrt{59}$.

95 Capacité 11, p. 98

Soit d la droite passant par le point $A(2 ; 2 ; -2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(6 ; -1 ; 2)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $B(11 ; -18 ; 2)$ sur la droite d .

96 Soit d la droite passant par le point $K(1 ; -1 ; 10)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3 ; 4 ; -5)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $R(0 ; 6 ; -5)$ sur la droite d .

97 Soit d la droite passant par le point $A(2 ; 3 ; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4 ; -8 ; -4)$.

1. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $C(0 ; -5 ; 13)$ sur la droite d .
2. Déterminer les longueurs CH et AB, puis l'aire du triangle ABC.
3. Le point H est-il le projeté orthogonal du point $R(-13 ; 1 ; -12)$ sur la droite d ?

Équations cartésiennes d'un plan

98 Capacité 9, p. 97

Soit $A(-2; 7; 3)$ un point de l'espace et $\vec{n}(-2; 4; -5)$ un vecteur.1. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.2. Soit $B(4; 1; 9)$. Déterminer une équation du plan médiateur $\mathcal{P}'$ du segment $[AB]$.99 Soit $A(1; 3; -2)$ un point de l'espace et $\vec{n}(-1; 9; 1)$ un vecteur. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.100 Soit $A(1; 3; -5)$ et $B(1; 1; 1)$ deux points de l'espace. Déterminer une équation du plan médiateur du segment $[AB]$.101 Soit les points de l'espace $A(1; 9; 3)$ et $B(-2; -7; 5)$. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{AB}$.102 Soit les points de l'espace $A(4; 5; 8)$, $B(1; 3; -12)$ et $C(0; 0; 8)$. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par C et perpendiculaire à la droite (AB) .

103 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit les points non alignés de l'espace :

 $A(2; -5; 1)$, $B(4; -2; -4)$ et $C(6; -4; 1)$.1. Un vecteur normal du plan (ABC) a pour coordonnées :

- a. $(-3; 2; 0)$ b. $(-1; 4; 2)$
 c. $(2; -8; -4)$ d. $(2; 3; -5)$

2. Une équation du plan (ABC) est :

- a. $-x + 4y + 2z + 20 = 0$ b. $-3x + 2y + 16 = 0$
 c. $\frac{1}{2}x - 2y - z - 10 = 0$ d. $2x - 5y + z = 0$

104 Soit les points $A(9; 3; 1)$, $B(-11; 7; 5)$ et $C(5; 8; 3)$.

- Vérifier que A , B et C définissent un plan.
- Démontrer que $\vec{n}(1; -2; 7)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- En déduire une équation du plan (ABC) .
- Les points $D(5; -20; -5)$ et $E(3; 4; 1)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

105 Soit d la droite dont une représentation paramétrique

$$\text{est } \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -8 + 7t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1; -2; 9)$ et perpendiculaire à la droite d .106 Soit d la droite dont une représentation paramétrique

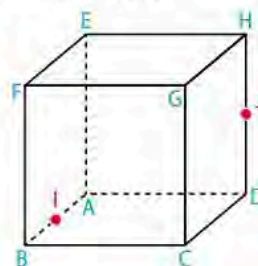
$$\text{est } \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 4 \\ z = 1 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(9; 1; -1)$ et perpendiculaire à la droite d .

107 PYTHON Compléter un programme

1. Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$.Exprimer le réel d en fonction des réels a , b , c , d , x_A , y_A et z_A .2. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul dont les coordonnées sont saisies dans une liste N et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par un point dont les coordonnées sont saisies dans une liste A .On donne le script incomplet d'une fonction Python ci-dessous dont les arguments sont les listes N et A .Compléter ce script afin que l'appel `Plan_point(N,A)` retourne les coefficients a , b , c et d d'une équation $ax + by + cz + d = 0$ du plan $\mathcal{P}$.

```
1 def Plan_point(N,A):
2     d=0
3     for i in range(3):
4         ...
5     return(...,...,...,d)
```

108 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$, parallèle au plan $\mathcal{P}'$ d'équation $4x + 11y - 2z + 1 = 0$ et passant par le point $A(4; -4; 1)$.109 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$, parallèle au plan $\mathcal{P}'$ d'équation $x + 3y - 6z + 2 = 0$ et passant par le point $A(0; 1; 0)$.110 ABCDEFGH est un cube. Le point I est le milieu de $[AB]$ et le point J est le milieu de $[DH]$.On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- Déterminer les coordonnées des points I , J et G .
- Justifier que les points I , J et G définissent un plan.
- a. Démontrer que $\vec{n}(2; 3; -4)$ est un vecteur normal au plan (IJG) .
b. En déduire une équation du plan (IJG) .

111 Capacité 10, p. 97

Soit $A(-2; -1; 1)$, $B(4; -1; -2)$ et $C(-1; 1; -1)$ trois points de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + 3y + 4z + 3 = 0$.

- Démontrer que les points A , B et C définissent un plan.
- a. Démontrer que $\mathcal{P}$ est le plan (ABC) .
b. En déduire un vecteur normal au plan (ABC) .

112 Soit $A(2; -3; 6)$, $B(7; -8; 21)$ et $C(0; 1; 4)$ trois points de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $5x + 2y - z + 2 = 0$.

- Démontrer que les points A , B et C définissent un plan.
- a. Démontrer que $\mathcal{P}$ est le plan (ABC) .
b. En déduire un vecteur normal au plan (ABC) .

113 Soit a, b et c trois réels non nuls.

Déterminer une équation du plan passant par les points $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ et $C(0; 0; c)$.

114 1. Reconnaître l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $x + 2y + 6z - 4 = 0$.

2. Caractériser cet ensemble.

115 1. Reconnaître l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $y = 2x - 6$.

2. Caractériser cet ensemble.

116 Reprendre l'exercice 115 avec l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

a. $x = 0$

b. $y = 0$

c. $z = 0$

117 Déterminer l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient $(x - y)^2 = z^2$.

118 Donner un vecteur normal à chacun des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ dont on donne une équation.

a. $\mathcal{P}_1 : 4x - 7y + 2z = 0$

b. $\mathcal{P}_2 : y + 4z + 1 = 0$

c. $\mathcal{P}_3 : -2x + z - 5 = 0$

119 Donner un vecteur normal à chacun des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ dont on donne une équation.

a. $\mathcal{P}_1 : x - 2z = 0$

b. $\mathcal{P}_2 : 4x + 2y = 3$

c. $\mathcal{P}_3 : y = z$

120 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $4x + 2y - 5z + 7 = 0$ et $A(5; -1; 2)$ un point de l'espace.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point A .

121 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y - 3z + 4 = 0$ et $A(-4; -1; -1)$ un point de l'espace.

1. Vérifier que le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passant par le point A .

122 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Une équation du plan passant par $A(1; 1; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; 0; 3)$ est $4x + 6z - 10 = 0$.

2. Le vecteur $\vec{n}(1; -2; 5)$ est normal au plan $\mathcal{P}$ d'équation $y - 2z + 5 = 0$.

123 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z - 5 = 0$ et $A(12; -8; -5)$ un point de l'espace.

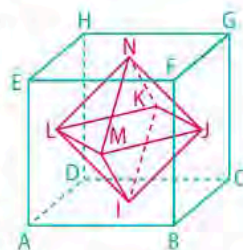
1. Vérifier que le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passant par A .

3. Montrer que $H(14; -6; -3)$ est le point d'intersection de d et $\mathcal{P}$.

124 On relie les centres de chaque face d'un cube $ABCDEFGH$ pour former un solide $IJKLMN$ comme sur la figure ci-dessous.

Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées $ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE$ et $EFGH$ (donc les milieux des diagonales de ces carrés).



1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

2. a. Déterminer les coordonnées du point N .

b. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{NC}$ et $\vec{ML}$.

c. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

d. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI) .

3. a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.

b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est la droite (EG) .

Intersection d'une droite et d'un plan

125 Capacité 12, p. 98

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - 3y - 2z + 3 = 0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 7 - 1t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

126 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $7x + 2y - z + 4 = 0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 15 - 3t \\ y = -9 + t \\ z = 7 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

127 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - 5y + 3z - 7 = 0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 9 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

128 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $5x - 3y + 3z - 2 = 0$ et d la droite définie par la représentation paramétrique suivante :

$$d : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 10 + 5t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

129 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + y - 5z + 3 = 0$ et d la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

130 Soit les points de l'espace $A(-1; 3; 2)$ et $B(2; 1; -2)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 0$.

- Justifier que la droite (AB) est sécante au plan $\mathcal{P}$.
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.

131 Soit les points de l'espace $A(4; -6; 2)$ et $B(6; -13; 9)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $4x - 7y + 3z - 14 = 0$.

- Justifier que la droite (AB) est sécante au plan $\mathcal{P}$.
- a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et $\mathcal{P}$.

132 Capacité 13, p. 99

Soit $A(6; 1; 6)$ un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $5x + 2y + 4z - 11 = 0$.

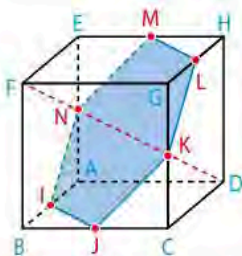
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

133 Soit $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $-2x + y = 0$ et B le point de coordonnées $(2; -1; -1)$. On désigne par H le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{Q}$.

Déterminer les coordonnées du point H .

134 On considère un cube $ABCDEFGH$.

On note I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{P}$ le plan passant par I et perpendiculaire à la droite (FD) .



On se place dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- Déterminer les coordonnées du point I et du vecteur $\vec{FD}$.
- En déduire une équation du plan $\mathcal{P}$.
- On note J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[BC], [CG], [GH], [HE]$ et $[EA]$.
Démontrer que les points J, K, L, M et N appartiennent à $\mathcal{P}$.
- Quelle est la nature de l'hexagone $IJKLMN$?

LE SAVIEZ-VOUS ?

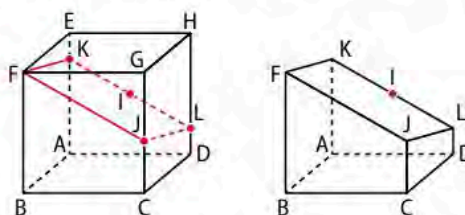
Cet exercice est un cas particulier du problème du concours général de mathématiques des lycées de 1877, où Henri Bergson eut le premier prix. Bergson (1859–1941), philosophe français, reçut le Prix Nobel de littérature en 1927.

MÉTHODE À L'ORAL

135 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + y + z + 2 = 0$ et A le point de coordonnées $(6; 3; 1)$.

- Comment déterminer une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par le point A ?
- Comment procéder pour déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$?

136 Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le centre du carré $ADHE$, c'est-à-dire, le milieu du segment $[AH]$ et du segment $[ED]$. Soit J un point du segment $[CG]$. La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (FIJ) est le quadrilatère $FKLJ$.

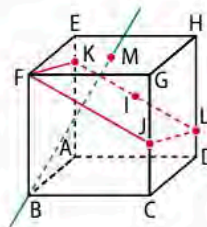


On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Partie A

Dans cette partie, J a pour coordonnées $(1; \frac{2}{5})$.

- a. Démontrer que les coordonnées de I sont $(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.
b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-1; 3; 5)$ est un vecteur normal au plan (FIJ) .
c. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est $-x + 3y + 5z - 4 = 0$.
- Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B .
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
b. On note M le projeté orthogonal de B sur le plan (FIJ) .
Démontrer que $M(\frac{6}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{7})$.



- a. Calculer $\vec{BM} \cdot \vec{BF}$.
b. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{MBF}$.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment $[CG]$. Ses coordonnées sont donc $(1; 1; a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

- Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.
- On admet alors que L a pour coordonnées $(0; 1; \frac{a}{2})$. Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère $FKLJ$ est-il un losange ?

137 Capacité 14, p. 99

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2; 1; 4)$, $(4; -1; 0)$, $(0; 3; 2)$ et $(4; 3; -2)$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
- a. Démontrer que le projeté orthogonal de B sur la droite (CD) est le point H de coordonnées $(3; 3; -1)$.
b. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2 .
- a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (BCD).
b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
d. En déduire que le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) est le point I de coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3})$.
- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

138 Soit $A(-1; 0; 1)$, $B(1; 4; -1)$, $C(3; -4; -3)$ et $S(4; 0; 4)$ quatre points de l'espace.

- Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.
- a. Démontrer que le vecteur $\vec{SO}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
b. En déduire une équation du plan (ABC).
c. Vérifier que le point O appartient au plan (ABC).
- a. Justifier que [SO] est une hauteur du tétraèdre SABC.
b. Déterminer la longueur SO.
c. Calculer le volume du tétraèdre SABC.

139 Soit $A(1; -5; 3)$, $B(2; -4; 4)$, $C(-1; -2; 2)$ et $D(18; -13; 25)$ quatre points de l'espace.

- a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
b. Déterminer l'aire du triangle ABC.
- a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-4; -1; 5)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
b. En déduire une équation du plan (ABC).
c. Vérifier que le point $H(-2; -8; 0)$ est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
- a. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).
b. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

140 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(5; -5; 2)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(0; 1; 2)$ et $D(6; 6; -1)$.

- Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
- a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2; 3; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD).
b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
- Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite d et du plan (BCD).
- Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
- a. Calculer les longueurs AB et AC.
b. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

141 Une question ouverte

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$. On note A le point de coordonnées $(1; a; a^2)$ où a est un nombre réel.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par A.
- Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance du point A de coordonnées $(1; a; a^2)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.

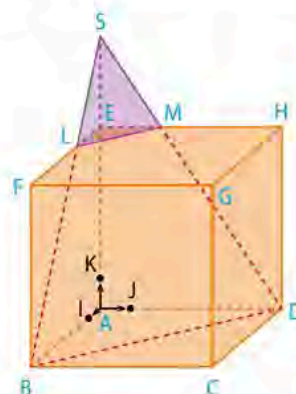
Piste → Voir p. 466

Problème de synthèse

142 CHERCHER COMMUNIQUER

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$ tel que $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\vec{FL} = \frac{2}{3}\vec{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH);
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

- Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2; 0; 6)$.
- a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).
b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0; 0; 9)$.
- Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3; 3; 2)$.
a. Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (BDL).
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH).
d. Calculer les coordonnées du point M.
- Calculer le volume du tétraèdre SELM.
- L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60° . Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

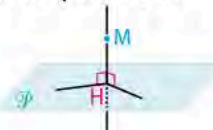
L'essentiel

Projeté orthogonal

- **Projeté orthogonal de M sur une droite d**
Point H de d tel que $(MH) \perp d$



- **Projeté orthogonal de M sur un plan P**
Point H de P tel que $(MH) \perp P$



Orthogonalité dans l'espace

Propriétés du produit scalaire

- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et k est un réel, alors :
- (1) **Bilinéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
 - (2) **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
 - (3) Si $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2 = \|\vec{u}\|^2$.
 - (4) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
 - (5) Dans un repère orthonormé :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ avec $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$.

Produit scalaire de deux vecteurs

- Soit $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
 - sinon $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Vecteur normal et équation de plan

- P plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- $\vec{n}$ vecteur normal à P équivaut à $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
 - P est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
 - Dans un repère orthonormé, équation d'un plan P :
 $ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}(a; b; c)$ vecteur normal à P .



Orthogonalité de droites et de plans

- d et d' droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
 P plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- (1) $d \perp d'$ équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$
- (2) $d \perp P$ équivaut à $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases}$ équivaut à :
 $\vec{u} \cdot \vec{t} = 0$ pour tout vecteur $\vec{t}$ de la direction de P .



- (3) Plan médiateur de $[AB]$: plan passant par le milieu de $[AB]$ et orthogonal à (AB) .

Faire le point avec des exercices corrigés

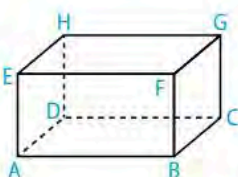
Calculer des produits scalaires

* 143 10 min Capacité 1, p. 89

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AB = 8$, $AE = 4$ et $FG = 4$.

Calculer les produits scalaires suivants :

- a. $\vec{BC} \cdot \vec{BG}$ b. $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ c. $\vec{BC} \cdot \vec{HF}$



* 144 15 min Capacité 2, p. 89

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AB = AE = 1$ et $AD = 2$.

On considère les points I, J et K définis par :

$$\vec{FI} = \frac{1}{4}\vec{AD}; \vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{AD} \text{ et } \vec{DK} = \frac{1}{2}\vec{AE}.$$

1. Exprimer le vecteur $\vec{JI}$ en fonction de $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ puis le vecteur $\vec{JK}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.
2. Calculer le produit scalaire $\vec{JI} \cdot \vec{JK}$.
3. Que peut-on en déduire pour le triangle IJK ?

Calculer un produit scalaire dans un repère orthonormé

* 145 10 min Capacité 3, p. 91

Soit les points $A(5; 2; -3)$, $B(1; 5; 6)$ et $C(8; 3; -2)$.

1. Justifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.
2. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

* 146 15 min Capacité 4, p. 91

Soit les points de l'espace $A(1; -1; -3)$, $B(5; 7; 11)$ et $C(3; 2; 3)$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- b. Calculer les longueurs AB et AC.
2. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés.

* 147 15 min Capacité 4, p. 91

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit $A(-2; -1; -9)$, $B(2; 7; 10)$ et $C(0; 5; 0)$.

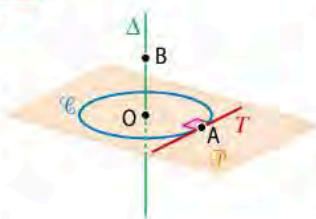
1. Le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est égal à :

- a. 227 b. -35 c. 56 d. 231
2. Quelles sont les longueurs exactes de AB et AC ?
 a. $AB = 21$ b. $AB = \sqrt{37}$ c. $AC = 101$ d. $AC = 11$
3. Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés est égal à :
 a. $0,19^\circ$ à $0,01$ près b. $79,32$ à $0,01$ près
 c. $10,68^\circ$ à $0,01$ près d. $0,98^\circ$ à $0,01$ près

Démontrer une orthogonalité

- * 148  15 min Capacité 5, p. 93
- Soit les points $A(0; 1; -4)$, $B(1; 3; -7)$, $C(-4; 1; -3)$, $D(1; 0; 0)$ et $E(3; 11; 8)$.
- Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
 - Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
 - Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

- * 149  15 min Capacité 6, p. 93
- Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O dans un plan $\mathcal{P}$.
 T est la tangente à $\mathcal{C}$ en un point A de ce cercle.
 La droite Δ est orthogonale en O au plan $\mathcal{P}$.
 B est un point de Δ distinct de O.
 Démontrer que la droite T est perpendiculaire au plan (OAB).



Déterminer et utiliser un vecteur normal à un plan

- * 150  10 min Capacité 7, p. 95
- Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(-7; 1; 4)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(-4; -3; 7)$ et $\vec{v}(1; -3; 0)$.
 Démontrer que le vecteur $\vec{n}(21; 7; 15)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

- * 151  10 min Capacité 7, p. 95
- VRAI/FAUX**
- Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(5; 2; -5)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; 1; 1)$ et $\vec{v}(1; 0; 1)$.
 Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.
- Le vecteur $\vec{n}(5; 0; 5)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
 - Le vecteur $\vec{n}(-3; 0; 3)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
 - Il existe plusieurs vecteurs normaux au plan $\mathcal{P}$.

- * 152  15 min Capacité 8, p. 95
- Soit $A(0; -1; 0)$ un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2; 1; 1)$.
 On note H le point de coordonnées $(2; -1; -4)$.
- Démontrer que H appartient au plan $\mathcal{P}$.
 - Démontrer que H est le projeté orthogonal du point $B(-2; -3; -6)$ sur le plan $\mathcal{P}$.
 - En déduire la distance du point B au plan $\mathcal{P}$.

- * 153  15 min Capacité 8, p. 95
- Soit $A(-5; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, $C(10; -1; -3)$ et $D(11; -2; 0)$ quatre points de l'espace.
- Démontrer que C est le projeté orthogonal de D sur (AB).
 - En déduire la distance du point D à la droite (AB).

- * 154  20 min Capacité 11, p. 98
- Soit d la droite passant par le point $A(-2; 3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 5; 2)$.
 Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $B(5; 20; 7)$ sur la droite d .

Déterminer une équation cartésienne d'un plan

- * 155  5 min Capacité 9, p. 97
- Soit $A(7; 8; -2)$ un point de l'espace.
 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(5; -3; 2)$.
- * 156  10 min Capacité 9, p. 97
- Soit $A(5; -2; 7)$ et $B(-1; 4; -11)$ deux points de l'espace.
 Déterminer une équation du plan médiateur du segment [AB].

- * 157  10 min Capacité 10, p. 97
- Soit $A(1; 1; 0)$, $B(0; 1; 2)$ et $C(3; 3; 1)$ trois points de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $4x - 5y + 2z + 1 = 0$.
- Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
 - a. Démontrer que $\mathcal{P}$ est le plan (ABC).
 b. En déduire un vecteur normal au plan (ABC).

Déterminer et utiliser l'intersection d'une droite et d'un plan

- * 158  10 min Capacité 12, p. 98
- Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $5x - 3y + 2z + 9 = 0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est :
- $$\begin{cases} x = 10 + 5t \\ y = -11 + 7t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
- Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

- * 159  15 min Capacité 13, p. 99
- Soit $A(-8; 17; 8)$ un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $-x + 2y + z + 4 = 0$.
 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

- * 160  20 min Capacité 14, p. 99
- Soit les points de l'espace $A(5; -5; 2)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(0; 1; 2)$ et $D(6; 6; -1)$.
- Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
 - On admet que la perpendiculaire à (BCD) passant par A coupe (BCD) en $H(1; 1; 4)$. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Utiliser le produit scalaire dans l'espace

■ **Un exemple :** Soit $A(4; 4; 3)$, $B(9; 6; 6)$, $C(9; 1; 2)$ et $D(8; 2; 3)$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on ?	Je dois démontrer que deux droites sont orthogonales. ► <i>Rappeler la définition de deux droites orthogonales.</i>
Comment faire pour commencer ?	Je dois déterminer un vecteur directeur de chacune des droites (AB) et (CD). ► <i>Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ puis déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de (CD).</i>
Comment poursuivre ?	Je dois prouver que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ► <i>De quel outil dispose-t-on pour prouver l'orthogonalité de deux vecteurs ?</i>
Comment terminer ?	Je dois calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. ► <i>Utiliser la formule du produit scalaire dans un repère orthonormé et conclure.</i>

161 Soit $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(7; -6; 4)$ et $D(6; -7; 5)$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

162 Soit d la droite passant par $A(4; 4; -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 1; 5)$.

Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point A et est dirigé par le couple de vecteurs $(\vec{v}; \vec{w})$ où $\vec{v}(2; 1; -1)$ et $\vec{w}(3; 4; -2)$.

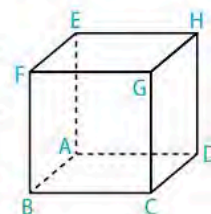
1. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
2. Que peut-on en déduire pour la droite d et le plan $\mathcal{P}$?

163 Soit $A(4; 0; 11)$, $B(11; 2; 14)$ et $C(2; 1; 15)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

164 Soit ABCDEFGH un cube.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées de chacun des points A, F, C, H et G.
2. Démontrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (FCH).



PARCOURS 2 Déterminer une équation cartésienne d'un plan

■ **Un exemple :** Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(-2; 5; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5; 2; 4)$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on ?	Je dois déterminer une équation d'un plan. ► <i>Rappeler la forme générale d'une équation cartésienne d'un plan.</i>
Comment faire pour commencer ?	Je peux choisir pour coefficients de x , y et z de l'équation, les coordonnées d'un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. ► <i>Donner les coordonnées d'un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ et en déduire que $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $5x + 2y + 4z + d = 0$.</i>
Comment déterminer le coefficient d ?	Je remplace x , y et z par les coordonnées du point A dans l'équation de $\mathcal{P}$. ► <i>Résoudre l'équation d'inconnue d et en déduire la valeur de d. Conclure.</i>

165 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(7; 4; -2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -3; 5)$.

166 Soit $A(1; -1; 3)$ et d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 5; 1)$.
Déterminer une équation du plan passant par A et perpendiculaire à la droite d .

167 Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 0; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(6; -1; 1)$.

- 168** Soit $A(8; 4; 11)$ et $B(2; 2; 3)$ deux points de l'espace.
1. Déterminer les coordonnées du milieu I de [AB].
 2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
 3. En déduire une équation du plan médiateur de [AB].

PARCOURS 3 Intersection de deux plans

169 Chercher en autonomie

Droite d'intersection de deux plans sécants

Soit les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $2x - 3y + z - 1 = 0$ et $4x - 5y + 3z - 3 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. On note Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
- a. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. Montrer que M appartient à Δ si et seulement si les réels x , y et z vérifient le système (S) :

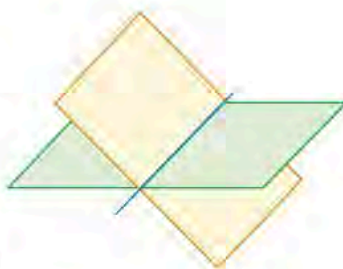
$$\begin{cases} z = -2x + 3y + 1 \\ 4x - 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

- b. En substituant l'expression de z de la première équation dans la seconde équation, montrer que le système (S) est équivalent à $\begin{cases} z = -2x + 3y + 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$.

- c. En déduire que le système (S) est équivalent à $\begin{cases} z = -y + 1 \\ x = 2y \end{cases}$.

3. Ajouter l'équation $y = t$ au système, puis exprimer x et z en fonction de t pour obtenir une représentation paramétrique de Δ .

Le système constitué des équations des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est un système d'équations cartésiennes de la droite Δ . Dans ce système, en exprimant deux des trois variables en fonction de la troisième variable que l'on a choisie comme paramètre, on a obtenu une représentation paramétrique de Δ .



170 Application

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + 2y - 7z - 6 = 0$ et $x + y - 5z - 5 = 0$.

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection Δ de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

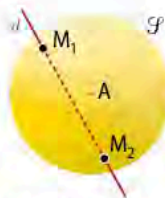
PARCOURS 4 Déterminer et utiliser une équation d'une sphère

171 Chercher en autonomie

Équation d'une sphère dans un repère orthonormé

Soit $A(1; 5; 3)$ un point de l'espace dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Rappeler la définition géométrique de la sphère de centre A et de rayon 3.
2. Soit M un point de coordonnées $(x; y; z)$.
- a. Exprimer AM^2 en fonction de x , y et z .
- b. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur x , y et z pour que le point M appartienne à la sphère $\mathcal{S}$.
3. Montrer que cette condition peut s'écrire $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y - 6z + 26 = 0$. Cette égalité est une équation cartésienne de la sphère de centre A et de rayon 3.



172 Application

Intersection d'une sphère et d'une droite

On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre $A(1; 5; 3)$ et de rayon 3. On a vu dans l'exercice 171 que cette sphère a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y - 6z + 26 = 0$. On considère la droite d passant par $B(-2; 1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5; 2; 1)$.

On souhaite déterminer l'intersection de d et de $\mathcal{S}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
2. Démontrer que la droite d coupe la sphère en deux points M_1 et M_2 dont on donnera les coordonnées.
3. Vérifier les résultats en calculant les longueurs AM_1 et AM_2 .

Piste 2. : Écrire un système de quatre équations caractérisant l'intersection de d et de $\mathcal{S}$ puis le résoudre.

MATHS & PHYSIQUE

173 Histoire des mathématiques

Le produit vectoriel

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs.

On considère le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées :

$$\vec{n}(bc' - b'c; cd' - c'd; ab' - a'b).$$

1. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Démontrer que $\vec{n} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Le vecteur $\vec{n}$ est appelé produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2. Une particule de charge q mobile et de vitesse $\vec{v}$ plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit une force $\vec{F}$ telle que $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Justifier que la force $\vec{F}$ est orthogonale à la fois à vitesse $\vec{v}$ de la particule et au champ $\vec{B}$.

3. Soit $A(3; 0; 1)$, $B(0; -1; -2)$ et $C(1; -1; 0)$.

a. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. En utilisant la question 1., déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation du plan (ABC).

Point Histoire

Le produit vectoriel a été inventé par le mathématicien allemand Hermann Günther Grassmann (1809–1877).



LE SAVIEZ-VOUS

Le produit vectoriel est utilisé pour déterminer la force qui s'exerce sur une particule soumise à un champ magnétique.

174 Approfondissement du programme

Sphère circonscrite à un tétraèdre

On considère les points $A(16; 6; 5)$, $B(4; 11; 14)$, $C(11; 1; 15)$ et $D(12; 6; -7)$. On cherche à déterminer, si elle existe, une sphère passant par les quatre sommets du tétraèdre ABCD.

On suppose qu'il existe une telle sphère et on note O son centre.

1. a. Justifier que le point O appartient au plan médiateur de [AB].

b. Déterminer une équation du plan médiateur de [AB].

2. Déterminer une équation du plan médiateur de [AC] et une équation du plan médiateur de [AD].

3. a. En déduire que les coordonnées $(x; y; z)$ du point O vérifient le système :

$$\begin{cases} -12x + 5y + 9z - 8 = 0 \\ -x - y + 2z - 3 = 0 \\ -x - 3z + 11 = 0 \end{cases}$$

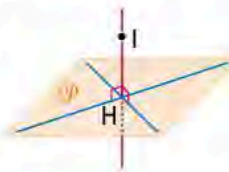
b. Résoudre le système précédent.

4. En déduire l'existence d'une sphère passant par les points A, B, C et D ; préciser le centre et le rayon de cette sphère.

175 Formule de la distance d'un point à un plan

Partie A

Soit $\mathcal{P}$ un plan et I un point de l'espace. On note H le projeté orthogonal de I sur le plan $\mathcal{P}$.



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $(x_1; y_1; z_1)$ les coordonnées du point I, $ax + by + cz + d = 0$ une équation de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a; b; c)$.

1. Justifier que $|\vec{n} \cdot \vec{IH}| = IH\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \vec{IH} = -ax_1 - by_1 - cz_1 - d$.

3. En déduire que $IH = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

1. On considère les points $A(3; -2; 2)$, $B(6; -2; -1)$, $C(6; 1; 5)$ et $D(4; 0; -1)$.

a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

b. En déduire l'aire du triangle ABC.

2. a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1; -2; 1)$ est normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation du plan (ABC).

3. a. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

b. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

4. Soit $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

Déterminer la position relative des deux plans $\mathcal{Q}$ et (ABC).

5. Le plan $\mathcal{Q}$ coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G. Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].

6. Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

Partie C

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives :

$$3x + 6y - 2z + 1 = 0 \text{ et } 2x + y - 2z + 3 = 0.$$

En utilisant la partie A, déterminer l'ensemble des points équidistants des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Piste A. 3. : On pourra utiliser le fait que H est un point du plan $\mathcal{P}$.

176 RAISONNER = CALCULER

Perpendiculaire commune

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormé $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\vec{DC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\vec{DH}$.

1. a. Donner les coordonnées des points A, C et E.

b. Déterminer les coordonnées du point L défini par $\vec{CL} = \frac{1}{3}\vec{EC}$.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{DL}$.

2. Soit $(a; b)$ un couple de réels.

On note M le point de la droite (AE) tel que $\vec{AM} = a\vec{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\vec{DN} = b\vec{DL}$.

a. Montrer qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

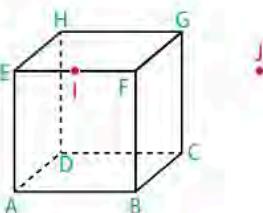
b. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0 .

177 CHERCHER COMMUNIQUER

Intersections dans un cube

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



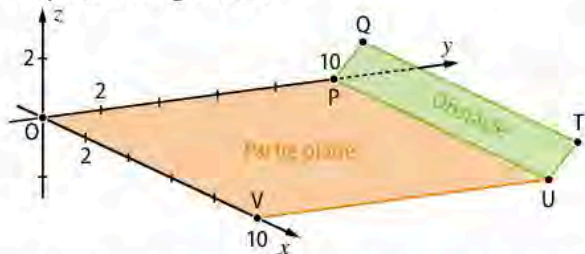
1. Déterminer une équation cartésienne du plan (BGI).
2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
 - a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
 - b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.
 - c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, dont on déterminera les coordonnées.
 - d. Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

178 CALCULER MODÉLISER

Trajectoires de drones

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Alex et Élis, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle. On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère : O(0 ; 0 ; 0), P(0 ; 10 ; 0), Q(0 ; 11 ; 1), T(10 ; 11 ; 1), U(10 ; 10 ; 0) et V(10 ; 0 ; 0). La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2 ; 4 ; 0,25) et B(2 ; 6 ; 0,75) ;
- le drone d'Élis suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4 ; 6 ; 0,25) et D(2 ; 6 ; 0,25).

Partie A : étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(0; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).
 - c. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $(2; \frac{37}{3}; \frac{7}{3})$.
 - d. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élis imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.

L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée. Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD). Il existe alors deux réels a et b tels que $\vec{AM} = a\vec{AB}$ et $\vec{CN} = b\vec{CD}$. On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\vec{MN}$ sont $(2 - 2b; 2 - 2a; -\frac{1}{2}a)$.
2. a. Démontrer que $MN^2 = (2 - 2b)^2 + \frac{17}{4}(a - \frac{16}{17})^2 + \frac{4}{17}$.
 - b. En déduire les valeurs de a et de b tels que MN est minimale.
 - c. Démontrer dans que lorsque MN est minimale, (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).

179 Approfondissement du programme

Plan sécant à une sphère

Partie A

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre un point Ω et de rayon R , où R est un réel strictement positif. On considère un plan $\mathcal{P}$ et on note d la distance de Ω à $\mathcal{P}$.

On suppose que le plan $\mathcal{P}$ est sécant à la sphère $\mathcal{S}$.

Démontrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ est un cercle du plan $\mathcal{P}$ que l'on caractérisera par son centre et son rayon.

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + 2z - 50 = 0$ et de la sphère de centre $\Omega(-2; 5; 3)$ et de rayon $R = 13$.

180 Un ensemble de points

Partie A

Soit A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives : $3x + 4y + z - 1 = 0$ et $x - 2y - z + 5 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1; 0; 4)$ et $(3; -4; 2)$.

1. Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.
- On nomme (Δ) la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.
2. a. Montrer que le point A appartient à la droite (Δ) .
 - b. Montrer que $\vec{u}(1; -2; 5)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = AB^2.$$

Déterminer l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{E}$ et de la droite (Δ) . On précisera les coordonnées de ces points.

Piste B. 3. : On peut soit utiliser la question A.2. soit traduire analytiquement l'ensemble $\mathcal{E}$.

181 Approfondissement du programme**Plan tangent à une sphère**

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre un point Ω et de rayon R où R est un réel strictement positif.

On considère un point A de $\mathcal{S}$.

On appelle plan tangent à la sphère $\mathcal{S}$ en A , le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$ et passant par le point A .

1. a. Que représente le point A pour le centre Ω ?
- b. Démontrer que A est l'unique point commun de $\mathcal{S}$ et de son plan tangent en A .
2. Dans cette question, l'espace est rapporté à un repère ortho-normé. On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(2; 1; 3)$ et de rayon 9 et le point A de coordonnées $(10; 5; 4)$.
- a. Vérifier que A appartient à $\mathcal{S}$.
- b. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ tangent à $\mathcal{S}$ en A .
- c. Démontrer que le plan $\mathcal{R}$ d'équation : $3x + 6y + 6z - 29 = 0$ est tangent à $\mathcal{S}$ en un point que l'on déterminera.

182 Approfondissement du programme**Fonction scalaire de Leibniz**

On considère A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $ABCD$ est un carré de côté 4. Soit O le centre du carré $ABCD$.

Partie A

À tout point M de l'espace on associe le nombre $f(M)$ défini par $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

1. a. Démontrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 5\overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
- b. Démontrer que pour tout point M :

$$MA^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2.$$
- c. En déduire que pour tout point M , $f(M) = f(G) + 8MG^2$.
2. a. Montrer que G est le milieu de $[OD]$.
- b. En déduire que : $GD = \sqrt{2}$, $GA = GC = \sqrt{10}$ et $GB = 3\sqrt{2}$.
- c. Calculer alors $f(G)$.
3. À l'aide de ce qui précède, déterminer les ensembles suivants :

- a. $\mathcal{E}_1$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + 5MD^2 = 56$.
- b. $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + 5MD^2 = 32$.

Partie B

À tout point M de l'espace on associe le nombre $g(M)$ défini par $g(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2$.

1. a. Montrer que pour tout point N de l'espace,

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} - 3\overrightarrow{ND} = 4\overrightarrow{DO}.$$
- b. En déduire que pour tout point N de l'espace,

$$g(M) = g(N) + 8\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DO}.$$
2. a. Calculer $g(O)$.
- b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_3$ des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = 0$.
3. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_4$ des points M de l'espace tel que $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = 32$.
- a. Montrer que M appartient à $\mathcal{E}_4$ si et seulement si $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{DO} = 4$.
- b. Déterminer le point H de la droite (OD) appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_4$.
- c. En déduire que $\mathcal{E}_4$ est un plan que l'on déterminera.

Piste A.1.a. : voir chapitre 2, p. 46

TRAVAIL EN GROUPE

183 Dans un tétraèdre on appelle hauteur toute droite perpendiculaire au plan d'une face et passant par le sommet opposé. Les hauteurs d'un tétraèdre ne sont pas nécessairement concourantes. Lorsqu'elles le sont, on dit que le tétraèdre est orthocentrique. Faire un exposé sur l'existence et les propriétés des tétraèdres orthocentriques.

184 Un octaèdre régulier est un octaèdre dont les huit faces sont des triangles équilatéraux. Faire un exposé sur ce polyèdre en présentant quelques une de ses propriétés géométriques.

Prise d'initiatives

185 Déterminer l'ensemble des points de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ avec k réel quelconque.

186 Déterminer l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient la relation $(x + 2y - z)^2 + (x - y + 2z + 6)^2 = 0$.

187 Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et M un point intérieur à ce tétraèdre.

Démontrer que la somme des distances de M à chacune des faces du tétraèdre est égale à la hauteur de ce tétraèdre.

188 Soit A et B deux points de l'espace.

Déterminer l'ensemble des couples de points $(P; Q)$ qui vérifient simultanément les deux conditions $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$.

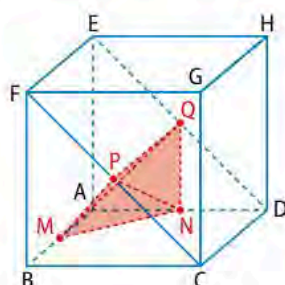
TP Un tétraèdre dans un cube


Soit ABCDEFGH est un cube de côté 6.

Pour tout réel a de l'intervalle $[0; 1]$ on définit les points M, N, P et Q par les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AN} = a\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{GP} = a\overrightarrow{GB} \text{ et } \overrightarrow{DQ} = a\overrightarrow{DE}.$$

On cherche à déterminer les valeurs du réel a pour lesquelles le tétraèdre MNPQ existe, et la valeur de a pour laquelle le volume de ce tétraèdre est maximal.


A Construction et conjectures avec un logiciel

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique dans l'espace :

- Construire le cube ABCDEFGH de côté 6.
- Créer un curseur a variant entre 0 et 1.
- Construire alors les points M, N, P et Q.
- Construire le tétraèdre MNPQ.

2. a. Justifier que le tétraèdre n'est pas constructible pour $a = 0$ et $a = 1$.

b. Que peut-on conjecturer pour le tétraèdre MNPQ lorsque $a = \frac{1}{4}$?

c. À quelle configuration des points M, N, P et Q semble correspondre cette valeur ?

3. a. Faire afficher la valeur de l'angle $\widehat{MNP}$.

b. Conjecturer la nature du triangle MNP.

4. Conjecturer la valeur de a pour laquelle le volume du tétraèdre est maximal.

B Optimisation du volume

On pose $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$.

Les conjectures précédentes nous amènent à restreindre l'étude pour a appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

1. a. Justifier que le point M a pour coordonnées $(6a; 0; 0)$ dans le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

b. Calculer les coordonnées des points N, P et Q dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

b. En déduire la nature du triangle MNP.

3. a. Démontrer que le plan (MNP) a pour équation $x + y - 2z - 6a = 0$.

b. Pour quelle valeur du réel a , le point Q appartient-il au plan (MNP) ?

c. Ce résultat est-il conforme à la conjecture faite à la question A.2.b ?

4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point Q et perpendiculaire au plan (MNP).

b. En déduire que le projeté orthogonal H du point Q sur le plan (MNP) a pour coordonnées $(4a - 1; 5 - 2a; 2 - 2a)$.

5. a. Démontrer que l'aire du triangle MNP est égale à $18\sqrt{6}(1 - a)a$.

b. Démontrer que la longueur QH est donnée par la formule $QH = \sqrt{6}(4a - 1)$.

6. On note V la fonction qui à tout réel a de l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ associe le volume éventuellement nul du tétraèdre MNPQ.

a. Démontrer que $V(a) = 36(-4a^3 + 5a^2 - a)$.

b. Calculer la fonction dérivée de la fonction V .

c. En déduire les variations de la fonction V .

d. Déterminer alors la valeur de a pour laquelle le volume du tétraèdre MNPQ est maximal.

Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 135, 183, 184

Question

Comment fait-on pour résoudre les très grands systèmes linéaires que l'on rencontre dans la modélisation de certains phénomènes ?

Enjeu de la question

De nombreux problèmes issus des mathématiques, de la physique, de la biologie ou de l'économie conduisent à la résolution de systèmes d'équations linéaires avec parfois un très grand nombre d'équations et de variables.



Plan possible

1. Exemples de problèmes conduisant à un système linéaire
2. Résolution par substitution – limite de la méthode
3. Résolution par combinaison linéaire – Pivot de Gauss
4. Déterminants – Méthode de Cramer
5. Problématique des systèmes de grandes dimensions – Programmation

Les mots-clés

Systèmes d'équations • Déterminant • Méthode par combinaison • Méthode par substitution • Matrice • Pivot de Gauss

Support de présentation possible

• Exemples de problèmes

- Positionnement par GPS
- Cryptographie multivariées
- Première loi de Kirchhoff (loi des mailles)
- Modèle entrée-sortie de Léontief

• Les méthodes de résolution

- **substitution** : on exprime une variable en fonction des autres ;
- **combinaisons linéaires (dont pivot de Gauss)** : on remplace la ligne L_i par $aL_i + bL_j$ (a non nul) pour éliminer une inconnue dans L_i ;
- **déterminant** :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$
 (cas de la dimension 2) ;
- **calcul matriciel**.

Questions d'approfondissement possibles

À l'aide d'une interprétation géométrique, décrire les cas de figures que l'on rencontre pour un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Soit les points $A(3 ; 4 ; 5)$ et $B(4 ; 7 ; 6)$. Étudier l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y + 4z - 8 = 0$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues ?

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 4x + 11y + 3z = 15 \end{cases}$$

Poursuite d'études et projet professionnel

• Pourquoi étudier les systèmes linéaires ?

De nombreuses modélisations de phénomènes physiques, économiques ou biologiques conduisent à la résolution de ces systèmes.

• Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude des systèmes linéaires est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : classes préparatoires, écoles d'ingénieur, licences scientifiques ou d'économie gestion, IUT, BTS, etc.

• Un exemple de métier ?

Le (la) **cryptologue** met en place des codes réalisés à partir d'algorithmes complexes afin de sécuriser des données sensibles telles que les mots de passe, les identifiants de compte en banque, etc. Il (elle) doit également tester sans cesse la fiabilité de son travail afin d'avoir un temps d'avance sur les pirates informatiques.

THÈMES

- Équation cartésienne d'un plan
- Projeté orthogonal d'un point sur un plan
- Volume d'une pyramide

ÉNONCÉ

CALCULER



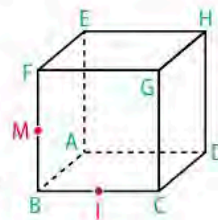
RAISONNER

ABCDEFGH est un cube.

Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC].

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On a donc $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$ et $G(1; 1; 1)$.



1. a. Justifier que $\vec{n}(1; 2; 2)$ est un vecteur normal au plan (MED).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (MED).

2. Démontrer que I appartient au plan (MED).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par G et orthogonale à (MED).

4. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal K du point G sur le plan (MED).
En déduire la distance GK.

5. On admet que l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère MED I est $\frac{9}{8}$ unité d'aire.
Calculer le volume V de la pyramide GMEDI.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ ET CHOISIR LES MÉTHODES

SOLUTION COMMENTÉE

1. a. Pour démontrer qu'un vecteur non nul est normal à un plan, on montre que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de ce plan. **Capacité 7, p. 95**

b. Pour déterminer une équation d'un plan, on utilise un point et un vecteur normal à ce plan. **Capacité 9, p. 97**

2. Pour démontrer qu'un point appartient à un plan, on peut utiliser les coordonnées de ce point et une équation du plan.

3. Pour déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ , on utilise un point et un vecteur directeur.

4. Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan, on détermine l'intersection d'une droite avec ce plan. **Capacité 13, p. 99**

5. On utilise la formule :
 $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$. **Capacité 14, p. 99**

1. a. M est le milieu de [BF] donc $x_M = \frac{x_B + x_F}{2}$, $y_M = \frac{y_B + y_F}{2}$ et $z_M = \frac{z_B + z_F}{2}$
donc $M(1; 0; \frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{EM}(1; 0; -\frac{1}{2})$. De plus, $\overrightarrow{ED}(0; 1; -1)$.

$\overrightarrow{EM} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 0 \times 2 + (-\frac{1}{2}) \times 2 = 0$ et $\overrightarrow{ED} \cdot \vec{n} = 0 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times 2 = 0$.
 $\vec{n}$ est donc un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan (MED), $\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (MED).

b. Comme $\vec{n}(1; 2; 2)$ est un vecteur normal au plan (MED), ce plan a une équation de la forme $x + 2y + 2z + d = 0$. E appartient à (MED) donc $x_E + 2y_E + 2z_E + d = 0$ soit $0 + 2 \times 0 + 2 \times 1 + d = 0$ d'où $2 + d = 0$ et $d = -2$.
(MED) a donc pour équation $x + 2y + 2z - 2 = 0$.

2. I est le milieu [BC] donc $x_I = \frac{x_B + x_C}{2}$, $y_I = \frac{y_B + y_C}{2}$ et $z_I = \frac{z_B + z_C}{2}$ d'où
 $I(1; \frac{1}{2}; 0)$. $x_I + 2y_I + 2z_I - 2 = 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 0 - 2 = 0$ donc I appartient à (MED).

3. Δ est orthogonale au plan (MED), $\vec{n}(1; 2; 2)$ est un vecteur directeur de Δ . Donc
une représentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ où t est un réel quelconque.

4. K est le point d'intersection de (MED) avec la droite Δ . Pour déterminer les coordonnées de K, on résout le système : $\begin{cases} x + 2y + 2z - 2 = 0 \\ x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

En substituant les expressions de x , y et z dans la première équation on obtient :
 $(1 + t) + 2(1 + 2t) + 2(1 + 2t) - 2 = 0$ soit $9t + 3 = 0$ soit $t = -\frac{1}{3}$.

On déduit donc $K(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. $GK = \sqrt{(\frac{2}{3} - 1)^2 + (\frac{1}{3} - 1)^2 + (\frac{1}{3} - 1)^2} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$.

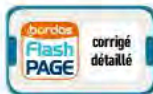
5. La hauteur de la pyramide GMEDI relativement à la base MED I est le segment [GK] donc le volume de la pyramide GMEDI est $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times GK$ soit $V = \frac{1}{3} \times \frac{9}{8} \times 1 = \frac{3}{8}$.

Sujet A 40 min

CALCULER

RAISONNER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Calcul d'un angle • Équations de plans
• Intersection d'une droite et d'un plan

• CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- Question 1. a. ► Capacité 2 p. 89
Question 1. b. ► Capacité 4 p. 91
Question 2. ► Capacité 10 p. 97
Question 4. ► Capacité 9 p. 97
Question 5. ► Capacité 12 p. 98

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(10; 0; 1)$, $B(1; 7; 1)$ et $C(0; 0; 5)$.

1. a. Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

b. Déterminer la mesure, en degrés, de l'angle AOB, arrondi au dixième.

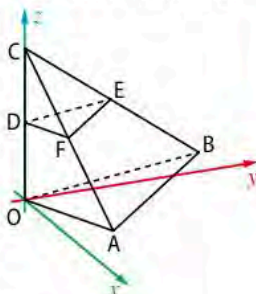
2. Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation du plan (OAB).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CA).

4. Soit D le milieu du segment [OC]. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (OAB) passant par D.

5. Le plan $\mathcal{P}$ coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F. Déterminer les coordonnées du point F.

6. On admet que le point E a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 3)$. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).



Sujet B 45 min

CALCULER

CHERCHER

THÈMES • Équations de plans
• Projeté orthogonal d'un point sur un plan
• Calculs de volumes et d'aires

• CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- Question 2. a. ► Capacité 7 p. 95
Question 2. b. ► Capacité 9 p. 97
Question 3. a. ► Capacité 14 p. 99
Questions 3. b. et c. ► Capacité 13 p. 99
Question 3. d. ► Capacité 8 p. 95

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.

On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB]. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

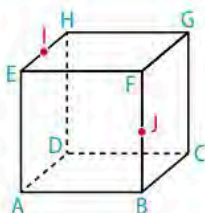
1. Donner les coordonnées de I et J.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; -2; 2)$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

3. On note K le milieu du segment [HJ].

Le point K appartient-il au plan (BGI)?



4. On souhaite calculer l'aire du triangle BGI.

a. En utilisant le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à 16.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

c. En déduire que le projeté orthogonal F' de F sur le plan (BGI) a pour coordonnées $(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{5}{9})$.

5. Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.

Sujet C 40 min

PYTHON

MODÉLISER

CHERCHER

THÈMES • Vecteur normal à un plan • Équations de plans
• Projeté orthogonal d'un point sur une droite
• Programmation Python

• CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- Question 2. a. ► Capacité 7 p. 95
Question 2. b. ► Capacité 9 p. 97
Question 3. a. ► Capacité 11 p. 98
Question 3. b. ► Capacité 8 p. 95
Question 4. b. ► Capacité 3 p. 91

Partie A

On considère le script Python de la fonction f donnée ci-dessous. On rappelle qu'en langage Python la fonction sqrt désigne la fonction racine carrée.

```
1 from math import *
2 def f(C1,C2):
3     d=0
4     for i in range(3):
5         d= d+(C2[i]-C1[i])**2
6     d=sqrt(d)
7     return d
```

1. Que renvoie l'appel $f([1,7,3],[3,13,6])$?

2. Quelle peut-être l'utilité de cette fonction f en géométrie repérée de l'espace ?

Partie B

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.

I est le milieu du segment [BF].

J est le milieu du segment [BC].

K est le milieu du segment [CD].

L'espace est rapporté au repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A, G,

I, J et K dans ce repère.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{AG}$ est normal au plan (IJK).

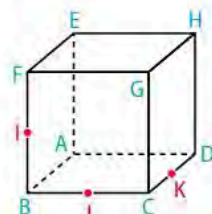
b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. a. Démontrer que le point $N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ est le projeté orthogonal du point I sur la droite (AG).

b. En déduire la distance minimale du point I à un point de la droite (AG).

4. a. Démontrer que N appartient au plan (IJK).

b. Démontrer que la droite (IN) est perpendiculaire à la droite (BF).



Sujet D 45 min COMMUNIQUER RAISONNER

THÈMES • Orthogonalité dans l'espace
• Équations de plans

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions A. 1. et 2. ► Capacité 6 p. 93

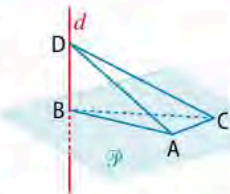
Question B. 1. ► Capacité 9 p. 97

Question B. 2. ► Capacité 12 p. 98

Questions B. 3. et 4. ► Capacité 4 p. 91

Partie A

Dans un plan $\mathcal{P}$, soit un triangle ABC rectangle en A. Soit d la perpendiculaire $\mathcal{P}$ passant par B. On considère un point D de cette droite distinct du point B.



1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD). On appelle bicoïn un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.

2. Montrer que le tétraèdre ABCD est un bicoïn.

3. a. Justifier que [CD] est la plus longue arête de ABCD.

b. On note I le milieu de l'arête [CD]. Montrer que le point I est équidistant des quatre sommets du bicoïn ABCD.

Partie B

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A(3 ; 1 ; -5) et la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 9 \text{ où } t \in \mathbb{R}. \\ z = t - 3 \end{cases}$$

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à la droite d et passant par le point A.

2. Montrer que le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d est le point B(5 ; 5 ; -1).

3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; -9) appartient à $\mathcal{P}$, puis montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d .

a. Justifier que le triangle ABM est rectangle.

b. Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.

c. En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Sujet E 30 min

CHERCHER CALCULER
SOLUTION EN FIN DE MANUEL

THÈMES • Orthogonalité d'une droite et d'un plan
• Équations de plans
• Projeté orthogonal d'un point sur un plan
• Volume d'une pyramide

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. b. ► Capacité 1 p. 89

Question 1. c. ► Capacité 3 p. 91

Question 2. a. ► Capacité 9 p. 97

Question 2. b. ► Capacité 13 p. 99

Question 2. c. ► Capacité 14 p. 99

On considère un cube ABCDEFGH.

1. a. Simplifier le vecteur : $\vec{AC} + \vec{AE}$.

b. En déduire que : $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$.

c. On admet que : $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$.

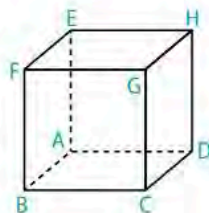
Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. L'espace est muni du repère orthonormé : (A ; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$).

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b. Soit K le projeté orthogonal du point G sur plan(BDE). Déterminer les coordonnées de K.

c. On admet que l'aire, en unités d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer le volume de la pyramide BDEG.



Sujet F 55 min CALCULER RAISONNER

THÈMES • Intersection d'une droite et d'un plan

• Calcul d'un produit scalaire

• Calcul de longueurs dans un repère orthonormé

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacités 5 et 12 pp. 93-98

Question 2. ► Capacité 9 p. 97

Question 3. ► Capacités 8 et 14 pp. 95-99

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$ et la droite d dont une représentation

$$\text{paramétrique est : } \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 2 \text{ avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = -t + 9 \end{cases}$$

a. L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d est réduite au point de coordonnées (3 ; 2 ; 9).

b. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont orthogonaux.

c. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont parallèles.

d. L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d est réduite au point de coordonnées (-353 ; 91 ; 98).

2. On considère la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2 \\ z = 5t - 6 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ et le point A}(-2 ; 1 ; 0).$$

Soit M un point variable de la droite d .

a. La plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.

b. La plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.

c. La plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées (-2 ; 1 ; 0).

d. La plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées (2 ; 2 ; -6).

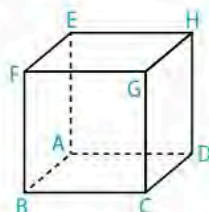
3. Soit ABCDEFGH un cube de côté 1.

a. $\vec{AF} \cdot \vec{BG} = -1$.

b. $\vec{AF} \cdot \vec{BG} = 0$.

c. $\vec{AF} \cdot \vec{BG} = 2$.

d. $\vec{AF} \cdot \vec{BG} = 1$.



► Utiliser des exposants

1 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. $3^n - 3^{n+2}$ est égal à :
 a. $3^n(3^0 - 3^2)$ b. -8×3^n c. $\frac{3^n}{3^{n+2}}$ d. $3^{\frac{n}{n+2}}$
 2. $6^n - 3 \times 2^n$ est égal à :
 a. 2×6^n b. $2^n(3^n - 3)$ c. 12^n d. $3 \times 2^n(3^{n-1} - 1)$

2 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $\frac{1 - (\frac{1}{5})^n}{(\frac{1}{5})^n} = 5^n - 1$ pour tout entier naturel n . 2. $\frac{5 \times 3^{n+1}}{15^{n+1}} = 1$ pour tout entier naturel n .

► Calculer des termes d'une suite et déterminer son sens de variation

3 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}n^2.$$

- a. Calculer u_1 . b. Montrer que (u_n) est une suite croissante.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$v_n = -5n^2 - n + 3.$$

- a. Exprimer v_{n+1} en fonction de n . b. Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

4 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = (-1)^n$. Alors :

- a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq 0$; b. (w_n) est une suite décroissante.

► Travailler avec des suites arithmétiques et géométriques

5 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2, alors $u_n \geq 10$ pour $n \geq 3$.
 2. Si (t_n) est une suite telle que $t_1 = 6$, $t_2 = 12$ et $t_3 = 30$ alors la suite (t_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

6 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 7.

- a. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_n > 1\,000$ pour tout entier n tel que $n \geq n_0$.
 b. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

7 Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{3}$.

- a. Donner l'expression de v_n en fonction de n .
 b. Conjecturer la limite de la suite (v_n) .
 c. On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
 Exprimer S_n en fonction de n .



Le 26 janvier 2017, Francis Joyon a battu le record du tour du monde en équipage à bord de son maxi-trimarane IDEC Sport conçu pour la chasse aux records. Le parcours a été accompli en 40 jours 23 heures 30 minutes et 30 secondes battant ainsi le précédent record détenu par Loïck Peyron en 45 jours 13 heures 42 minutes et 53 secondes. La suite formée des records du monde successifs est décroissante et aucun de ses termes ne peut être inférieur à zéro. Ces deux caractéristiques permettent d'établir que cette suite de nombres tend vers une valeur limite. Quelle est-elle ?

LES NOTIONS DU CHAPITRE

Voir exercice 90 page 145



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 129, 131, 133, 135, 136, 137
Animation	p. 128
Corrigés détaillés	pp. 148, 149, 160

- Limite finie ou infinie d'une suite
- Théorèmes généraux sur les limites
- D'autres théorèmes sur les limites
- Limite d'une suite géométrique
- Suites majorées et minorées

Activité 1

Objectif

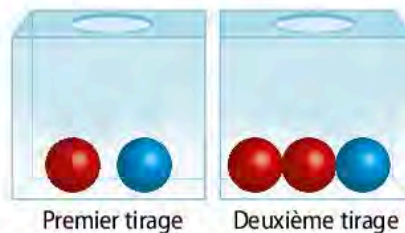
Observer le comportement de certaines suites en $+\infty$.

Cours 1

Limite finie ou infinie d'une suite

La chance s'en va !

Sophia tire une boule au hasard dans une urne qui contient au départ une boule bleue et une boule rouge. Puis, elle la remet dans l'urne. Après chaque tirage, elle rajoute une boule rouge supplémentaire. On appelle p_n , pour tout entier naturel n non nul, la probabilité de tirer la boule rouge au n -ième tirage.



- 1 a. Déterminer la probabilité p_1 d'obtenir une boule bleue au premier tirage.
b. Déterminer la probabilité p_2 d'obtenir une boule bleue au deuxième tirage.
c. Justifier que $p_3 = \frac{1}{4}$.
- 2 Exprimer p_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.
- 3 a. Déterminer le nombre N de tirages à partir duquel la probabilité de tirer la boule bleue est strictement inférieure à 0,1.
b. Montrer que pour tout $n \geq N$, $p_n < 0,1$.
- 4 Déterminer un nombre de tirages N' tel que $p_n < 10^{-3}$ pour tout $n \geq N'$.
- 5 Soit a un nombre positif donné.
Démontrer qu'à partir d'un certain nombre de tirages n , $-a < p_n < a$.

Ainsi, tout intervalle de la forme $]-a ; a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite (p_n) a pour limite 0, ou converge vers 0.

Activité 2

Objectif

Observer le comportement de certaines suites en $+\infty$.

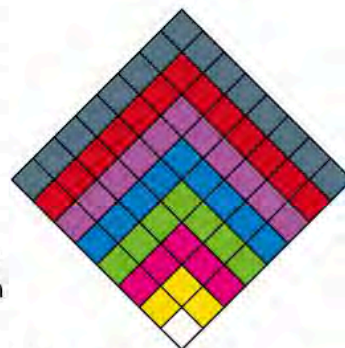
Cours 1

Limite finie ou infinie d'une suite

Le logo arc-en-ciel

Adam a choisi ce motif comme logo de son entreprise.

On part du carré blanc à l'étape 1 et on rajoute une bordure de carreaux colorés à chaque étape. Soit n un entier naturel non nul, on appelle c_n le nombre de carreaux rajoutés à l'étape n et s_n le nombre total de carreaux à l'étape n . On a donc $c_1 = s_1 = 1$.



- 1 Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n pour tout entier naturel n non nul. En déduire la nature de la suite (c_n) et une expression explicite de c_n en fonction de n .
- 2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $s_n = n^2$.
- 3 À partir de quelle étape, le nombre total de carreaux sera-t-il strictement supérieur à 1 000 ? On appelle N ce nombre d'étapes.
Montrer que pour tout $n \geq N$, $s_n > 1\,000$.
- 4 Déterminer une étape N' tel que $s_n > 10^{12}$ pour tout $n \geq N'$.
- 5 Soit A un nombre strictement positif.
Démontrer qu'à partir d'une certaine étape, $s_n > A$.

Ainsi, tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite (s_n) a pour limite $+\infty$.

Activité 3

Objectif

Visualiser le théorème des gendarmes.

Cours 3

Autres théorèmes sur les limites

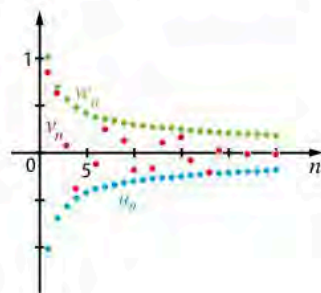
On l'embarque !

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad v_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- 1 Peut-on établir la limite de la suite (v_n) en utilisant les limites des suites usuelles et les opérations sur les limites ?
- 2 En utilisant l'éditeur de suites de votre calculatrice, déterminer la liste des 10 premiers termes de la suite (v_n) .
- 3 Conjecturer la limite de la suite (v_n) .
- 4 a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$
 b. Déterminer les limites des suites (u_n) et (w_n) .
 c. Le graphique ci-contre réalisé avec un tableur et représentant les trois suites est-il cohérent avec la conjecture faite sur la limite de la suite (v_n) ?



Activité 4

Objectif

Découvrir le théorème de convergence monotone.

Cours 4

Théorèmes de comparaison et croissances comparées

Une suite convergente... mais quelle est sa limite ?

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 0,2$; $u_2 = 0,23$; $u_3 = 0,235 \dots$

Pour tout entier naturel n non nul, u_n s'écrit avec 0 comme partie entière et les n premiers nombres premiers dans l'ordre comme partie décimale.

- 1 Écrire la liste des termes de la suite (u_n) pour n allant de 1 à 10.
- 2 Peut-on majorer cette suite ? Si oui, proposer un entier naturel k tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_n \leq k$.
- 3 Que peut-on dire de la monotonie de la suite (u_n) ?
- 4 En choisissant sur chacun des axes une unité convenable, placer dans un repère les points de coordonnées $(n ; u_n)$ pour n allant de 1 à 10.
- 5 Que peut-on conjecturer concernant la convergence de la suite (u_n) ?

Le théorème de convergence monotone (admis) énonce que si (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente. Sa limite n'est pas connue mais on peut en calculer autant de décimales que l'on souhaite pour peu qu'on connaisse la liste de tous les nombres premiers.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$.

- 1 Écrire les valeurs exactes des termes v_1 , v_2 et v_3 .
- 2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 2$.
- 3 a. Que peut-on dire du sens de variations de la suite (v_n) ?
 b. Donner un majorant de la suite (v_n) .
- 4 Avec le théorème de convergence monotone, on peut déduire que la suite (v_n) est convergente. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de cette suite (v_n) .

Point Histoire

La limite de cette suite est appelée constante de Copeland-Erdős du nom des mathématiciens Arthur Herbert Copeland (1898-1970) et Paul Erdős (1913-1996) qui ont notamment démontré que ce nombre est irrationnel.

1. Limite finie ou infinie d'une suite

Suites convergentes et suites divergentes

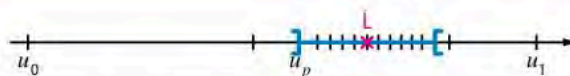
À noter

On peut prendre un intervalle ouvert I centré en L : $I =]L - a ; L + a[$ avec $a > 0$.

DÉFINITION Une suite (u_n) converge vers le réel L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

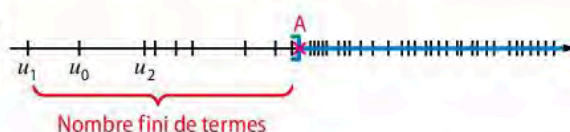
À partir d'un certain rang, les termes de la suite « s'accumulent » autour de L .

On admet que si la suite (u_n) converge, alors sa limite est unique.



DÉFINITION Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle du type $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Pour n'importe quel réel A , à partir d'un certain rang les termes de la suite dépassent ce réel.



DÉFINITION Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty ; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

DÉFINITION Une suite est dite **divergente** si elle ne converge pas.

Une suite qui diverge peut avoir $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite ou ne pas avoir de limite, comme par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.

PROPRIÉTÉS (1) Les suites de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^p}$ avec p un entier naturel non nul sont convergentes et leur limite est 0.

(2) Les suites de terme général $\sqrt{n}, n, n^2, \dots, n^p$ avec p un entier naturel non nul sont divergentes et leur limite est $+\infty$.

(3) Toute suite constante converge vers la valeur de la constante.

DÉMONSTRATION Convergence de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$

Soit $I =]-a ; a[$ un intervalle ouvert centré en 0 ($a > 0$) et n_0 un entier naturel tel que $n_0 > \frac{1}{a}$. Pour tout entier naturel n tel que $n > n_0$, on a $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < a$ donc $-a < \frac{1}{n} < a$ soit $u_n \in]-a ; a[$. Donc (u_n) converge vers 0.

À noter

Si (u_n) admet une limite (finie ou infinie) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}.$$

Animation
Définition de la
limite d'une suite



À noter

La boucle « while » (tant que) permet de répéter le calcul des termes jusqu'à en trouver un supérieur à A . La boucle s'arrête alors et c'est l'indice de ce terme qui est retourné par la fonction.

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

Algorithme de détermination d'un seuil

EXEMPLE : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n^3 - 7$ pour tout entier naturel n .

On peut démontrer que (u_n) a pour limite $+\infty$.

L'algorithme ci-contre implémenté en Python permet de déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que u_n est strictement supérieur à A .

Avec $A = 1\,000$, le programme retourne l'entier naturel 8.

```
1 def seuil_1(A):
2     u = -7
3     n = 0
4     while u <= A:
5         n = n + 1
6         u = 2 * n ** 3 - 7
7     return n
```


CAPACITÉ

1

Utiliser la définition de la limite d'une suite

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = n^3$.

- 1 À partir de quel rang a-t-on, $v_n > 1\,000$?
- 2 À l'aide de la définition, montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Conseil

Quand on utilise la définition de la limite on doit résoudre une inéquation.

Voir exercices

50 Pour s'entraîner

101 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- 1 $v_n > 1\,000$ équivaut à $n^3 > 1\,000$ qui équivaut à $n > \sqrt[3]{1\,000}$ qui équivaut à $n > 10$.
Donc à partir du rang $n = 11$, on a $v_n > 1\,000$.
- 2 Soit A un réel.
Il faut montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geq N$, alors $n^3 \in]A; +\infty[$, c'est-à-dire $n^3 > A$.
Si $A < 0$ alors $N = 0$ convient car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 \geq 0 > A$.
Si $A \geq 0$. L'inégalité $n^3 > A$ équivaut à $n > \sqrt[3]{A}$, donc en notant N le plus petit entier naturel strictement supérieur à $\sqrt[3]{A}$, on a : si $n \geq N$, alors $n^3 > A$.
Donc (v_n) diverge vers $+\infty$.

CAPACITÉ

2

Déterminer un seuil avec un algorithme

PYTHON

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout entier naturel n .

- 1 Compléter l'algorithme ci-contre pour que la variable n contienne après son exécution le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} est strictement supérieur à A .
- 2 Programmer cet algorithme sous forme d'une fonction Python et le tester avec $A = 200$ puis $A = 5\,000$.

```

u ← ...
n ← ...
Tant que ...
    u ← ...
    n ← ...
Fin Tant que
  
```

Solution commentée

- 1 À chaque étape, la variable u contient la valeur d'un terme de la suite (u_n) et la variable n contient la valeur de l'indice de ce terme.
Comme le premier terme de la suite (u_n) est $u_0 = 1$, on initialise la variable u à 1 et la variable n à 0.
À l'aide de la boucle « Tant que » dont la condition d'entrée est $u \leq A$, on répète le calcul des termes de la suite jusqu'à en trouver un strictement supérieur à A .
À chaque passage dans la boucle, on calcule le terme suivant et on augmente l'indice de 1 avec les instructions $u \leftarrow u + n + 1$ et $n \leftarrow n + 1$.

L'indice du premier terme qui est strictement supérieur à A est contenu dans la variable n après l'exécution de l'algorithme.

- 2 Avec $A = 200$, on obtient $n = 20$, puis avec $A = 5\,000$, on obtient $n = 100$.

```

u ← 1
n ← 0
Tant que u ≤ A
    u ← u + n + 1
    n ← n + 1
Fin Tant que
  
```

```

1 def seuil_2(A):
2     u=1
3     n=0
4     while u<=A:
5         u=u+n+1
6         n=n+1
7     return n
  
```

Vidéo 05:12
Déterminer un seuil
pour une suite



Vidéo 06:03
Déterminer un
seuil pour une suite
(Numworks)



Fichier Python
Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

Méthode

Pour comprendre le rôle des variables, on peut dérouler l'algorithme dans un cas particulier avant de le compléter.

Voir exercices

53 Pour s'entraîner

102 Pour travailler en autonomie

2. Opérations sur les limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) .

On veut déterminer, sans revenir aux définitions, les limites de $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ à partir des limites de (u_n) et (v_n) .

Pour cela, on va disposer de théorèmes généraux sur la somme, le produit et le quotient de suites. Parfois, on ne peut pas déterminer la limite éventuelle. Ces cas sont appelés des formes indéterminées.

À noter

L et L' sont des réels. Lorsqu'il y a une forme indéterminée, on la note F. I.

À noter

Pour k réel, la limite de la suite $(k \times u_n)$ s'obtient en considérant la suite (v_n) constante égale à k .

Limite d'une somme de suites

• Règles sur la somme

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I.

EXEMPLES : • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 5 = +\infty$.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + n = +\infty$.

Limite d'un produit de suites

• Règles sur le produit

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F. I.

EXEMPLES : • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n}n^2 = -\infty$.

Limite d'un quotient de suites

• Règles sur le quotient

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F. I.	F. I.

EXEMPLE : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{2}{n} = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{n^3} = 0$.

REMARQUE : On a quatre cas d'indétermination qu'on peut noter, en utilisant un abus d'écriture : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ».

Pour lever une indétermination, on transforme l'expression pour se ramener aux théorèmes généraux.

Vidéo 10-04

Calculer la limite d'une suite à l'aide des formules d'opération



CAPACITÉ

3

Déterminer la limite d'une suite par opérations

Déterminer les limites des suites définies par :

$$1 \quad u_n = n^2 + 5n + 3 \quad 2 \quad v_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2 \right) (-n^3 + 1) \quad 3 \quad i_n = \frac{2}{u_n}$$

Solution commentée

- 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n + 3) = +\infty$. D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2 \right) = 2$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty$. Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 1) = -\infty$.
D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.
- 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc d'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} i_n = 0$.

Conseil

Pour calculer la limite d'une suite, on essaie d'abord d'utiliser les règles relatives aux opérations sur les limites de suites.

Voir exercices

58 Pour s'entraîner

103 Pour travailler en autonomie

Vidéo 27-53

Calculer la limite d'une suite avec une forme indéterminée (1) (2)(3)(4)



CAPACITÉ

4

Lever une indétermination

Déterminer les limites des suites définies par :

$$1 \quad u_n = 3n - n^2 \quad 2 \quad v_n = \frac{n^3 + 2n}{5n^3 + 1} \quad 3 \quad w_n = \frac{1}{n^2} (1 + 2n^3) \quad 4 \quad z_n = \frac{\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Solution commentée

- 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$: on est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On factorise par n^2 pour n entier naturel non nul car c'est le terme prépondérant : $u_n = n^2 \left(\frac{3n}{n^2} - 1 \right)$. On a $\frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$, d'où $u_n = n^2 \left(\frac{3}{n} - 1 \right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n} - 1 \right) = -1$, donc d'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 + 2n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n^3 + 1) = +\infty$: on est en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise le numérateur et le dénominateur par n^3 pour n entier naturel non nul car c'est le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur : $v_n = \frac{n^3 \left(1 + \frac{2n}{n^3} \right)}{n^3 \left(5 + \frac{1}{n^3} \right)} = \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^3}}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{n^3} \right) = 5$, donc d'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{5}$.
- 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 2n^3) = +\infty$, on est en présence de la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ». Pour tout entier naturel n non nul, on développe : $w_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2n^3}{n^2} = \frac{1}{n^2} + 2n$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$, donc d'après la règle sur la limite d'une somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.
- 4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. On est en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». On a pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \frac{\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\frac{2\sqrt{n} + n}{n\sqrt{n}}} = \frac{2}{n\sqrt{n}} \times \frac{n\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + n} = \frac{2}{2\sqrt{n} + n}$.
Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n} + n) = +\infty$, donc d'après la règle sur la limite d'un quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2\sqrt{n} + n} = 0$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

Méthode

Pour lever une indétermination du type « $\infty - \infty$ », on peut chercher à factoriser par le terme prépondérant.

Voir exercices

61 Pour s'entraîner

105 Pour travailler en autonomie

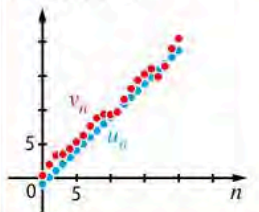
3. Autres théorèmes sur les limites

Limites et comparaison

THÉORÈME Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

À noter

La suite (u_n) représentée en bleu qui tend vers $+\infty$ « oblige » la suite (v_n) représentée en rouge à tendre vers $+\infty$.



DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Soit $I =]A; +\infty[$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout entier naturel n : si $n \geq n_1$ alors $u_n \in I$ donc $u_n > A$.

De plus, il existe un entier naturel n_2 tel que pour tout entier naturel n : si $n \geq n_2$ alors $u_n \leq v_n$. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à n_1 et à n_2 . Donc, pour tout entier naturel n : si $n \geq N$ alors $u_n > A$ et $u_n \leq v_n$. D'où pour tout entier naturel n : si $n \geq N$ alors $v_n > A$, c'est-à-dire $v_n \in I$. Donc par définition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

THÉORÈME Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes

THÉORÈME Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers le réel L , alors (v_n) converge vers L .

Les suites (u_n) et (w_n) représentées en bleu et vert convergent vers le même réel et « obligent » la suite (v_n) représentée en rouge à converger vers ce réel.



À noter

Le théorème des « gendarmes » est aussi appelé théorème de « l'encadrement » ou du « sandwich ». Le nom du théorème vient de u_n et v_n (les gendarmes) encadrant w_n (le voleur) obligé de les suivre jusqu'à L (la gendarmerie).

Comportement à l'infini de la suite géométrique (q^n)

PROPRIÉTÉS Soit q un réel.

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$		0	1	$+\infty$

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Prérequis : Pour tout entier naturel n et pour tout $x > 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$ (voir le **cours 1** du chapitre 1, p. 12).

• Si $q > 1$, on pose $q = 1+x$ avec $x > 0$. On a alors $q^n = (1+x)^n$. D'après le prérequis, $(1+x)^n \geq 1+nx$ donc $q^n \geq 1+nx$. Or $x > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+nx = +\infty$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

• Si $0 < q < 1$, on pose $a = \frac{1}{q}$. On a alors $a > 1$. Donc d'après le résultat précédent :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$. Or pour tout entier naturel n : $q^n = \frac{1}{a^n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

• Si $-1 < q < 0$, on pose $a = -q$. On a alors $0 < a < 1$. Donc d'après le résultat précédent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$. Or pour tout entier naturel n : $q^n = (-a)^n$.

Donc $-a^n < q^n < a^n$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Pour $q = 0$ ou $q = 1$, la suite (q^n) est constante, elle converge donc vers cette constante.

À noter

Dans le cas $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite. Par exemple la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

CAPACITÉ

5

Déterminer une limite par comparaison

Étudier la convergence des suites définies ci-dessous :

- 1 $u_n = \frac{4 + (-1)^n}{n^2}$ pour $n \geq 1$
- 2 $v_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)}$ pour $n \geq 1$
- 3 $w_n = n^3 + (-1)^n$

Solution commentée

- 1 Comme $(-1)^n$ est égal à -1 ou 1 on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Donc pour tout entier naturel n non nul : $3 \leq 4 + (-1)^n \leq 5$, en divisant par n^2 qui est strictement positif on conserve l'ordre donc $\frac{3}{n^2} \leq \frac{4 + (-1)^n}{n^2} \leq \frac{5}{n^2}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (u_n) converge vers 0.
- 2 On a pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 : $-1 \leq -\cos(n) \leq 1$, donc $\sqrt{n} - 1 \leq \sqrt{n} - \cos(n) \leq \sqrt{n} + 1$. Les trois membres de l'inégalité sont strictement positifs puisque $n > 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{n} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1} = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} = 0$. Donc, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (v_n) converge vers 0.
- 3 Pour tout entier naturel n , on a $(-1)^n \geq -1$ car $(-1)^n$ est égal à -1 ou 1 . Donc pour tout entier naturel n , $n^3 + (-1)^n \geq n^3 - 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 1 = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$. Donc la suite (w_n) ne converge pas. Elle diverge et sa limite est $+\infty$.

Vidéo 04:50

Calculer la limite d'une suite à l'aide du théorème de comparaison



Vidéo 06:00

Calculer la limite d'une suite à l'aide du théorème d'encadrement



Conseil

Lorsque l'expression d'une suite contient un sinus, un cosinus ou $(-1)^n$, on peut encadrer le terme général de la suite.

Voir exercices

64 Pour s'entraîner

107 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

6

Utiliser la limite d'une suite géométrique

- 1 Étudier la convergence des suites définies pour tout entier naturel n par :
 - a. $u_n = \frac{3}{5^n}$
 - b. $v_n = -4(\sqrt{3})^n$
 - c. $w_n = (-2)^n$
- 2 Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = 3^n - 5^n$.

Solution commentée

- 1 Les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont des suites géométriques.
 - a. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3}{5^n} = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Comme, $-1 < \frac{1}{5} < 1$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) converge vers 0.
 - b. $(\sqrt{3})^n$ est de la forme q^n avec $q > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$. Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 = -4$. Donc d'après la règle sur le produit de limites (v_n) diverge vers $-\infty$.
 - c. $(-2)^n$ est de la forme q^n avec $q < -1$. Donc (w_n) n'a pas de limite, cette suite diverge.
- 2 $3 > 1$ et $5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$. On est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On peut écrire pour tout entier naturel n , $u_n = 5^n \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1 \right]$. Or $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1 \right] = -1$. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$, d'où, d'après la règle sur le produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Vidéo 11:55

Calculer la limite d'une suite géométrique



Méthode

Pour étudier la limite d'une suite géométrique, on situe d'abord la raison q par rapport à l'intervalle $] -1; 1[$.

Conseil

Factoriser permet souvent de lever une indétermination.

Voir exercices

70 Pour s'entraîner

111 Pour travailler en autonomie

4. Théorèmes de comparaison et croissances comparées

Vocabulaire

Tous les réels supérieurs à M sont aussi des majorants de (u_n) .
Tous les réels inférieurs à m sont aussi des minorants de (u_n) .

À noter

Ce théorème permet d'affirmer qu'une suite converge mais ne fournit pas la valeur de la limite.

DÉFINITIONS

- (1) La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite, donc tel que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq M$.
- (2) La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite, donc tel que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq m$.
- (3) La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

DÉFINITIONS

- (1) Si la suite (u_n) est majorée par M , alors on dit que M est un **majorant** de la suite (u_n) .
- (2) Si la suite (u_n) est minorée par m , alors on dit que m est un **minorant** de la suite (u_n) .

EXEMPLES : • Les suites de terme général $\sin(n)$, $\cos(n)$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par -1 , donc elles sont bornées.

• Les suites de terme général $\sqrt{n}$, n , n^2 , $n^3 \dots$ sont minorées par 0.

Elles ne sont pas majorées donc elles ne sont pas bornées.

• Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

En effet, dans ce cas, $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n$.

• Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

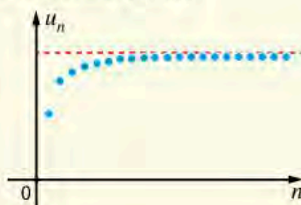
En effet, dans ce cas, $u_0 \geq u_1 \geq \dots \geq u_n$.

PROPRIÉTÉ

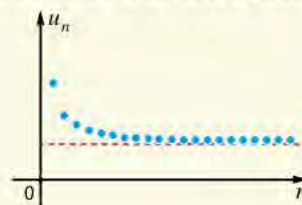
Si une suite est croissante et admet pour limite L , alors la suite est majorée par L .

THÉORÈME DE LA CONVERGENCE MONOTONE (ADMIS)

(1) Si une suite **croissante** est **majorée**, alors elle est **convergente**.



(2) Si une suite **décroissante** est **minorée**, alors elle est **convergente**.



PROPRIÉTÉ

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit A un réel quelconque.

Puisque (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier naturel p tel que u_p est strictement supérieur à A . En effet, sinon tous les termes de la suite seraient inférieurs ou égaux à A et A serait donc un majorant de la suite.

La suite (u_n) étant croissante, on a donc pour tout entier naturel n : si n est supérieur ou égal à p alors u_n est supérieur ou égal à u_p .

Donc pour tout pour tout entier naturel n : si n est supérieur ou égal à p alors u_n est strictement supérieur à A .

Donc à partir d'un certain rang p tous les termes de la suite appartiennent à $]A ; +\infty[$.

Par définition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

- 1 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par $u_n = \frac{4n+1}{1-5n}$. Démontrer que (u_n) est minorée par $-\frac{5}{4}$.
- 2 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$ et $u_0 = 1$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 4$.

Solution commentée

- 1 $u_n - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{4(4n+1) + 5(1-5n)}{4(1-5n)} = \frac{-9n+9}{4(1-5n)}$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $-9n+9 \leq 0$ et $4(1-5n) < 0$. D'où pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $u_n - \left(-\frac{5}{4}\right) \geq 0$ et donc $u_n \geq -\frac{5}{4}$. Donc (u_n) est minorée par $-\frac{5}{4}$.

- 2 Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$: « $u_n \leq 4$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $1 \leq 4$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \leq 4$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq 4$.

On a : $u_n \leq 4$ donc $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3} \times 4$ puis $\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq \frac{2}{3} \times 4 + \frac{4}{3}$.

Or $\frac{2}{3} \times 4 + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$. Donc on a : $\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq 4$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 4$.

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a $u_n \leq 4$ pour tout entier naturel n .

Vidéo 06:03

Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée



Méthode

Pour montrer que la suite (u_n) est minorée par un réel m , on peut étudier le signe de la différence $u_n - m$.

Voir exercices

82 Pour s'entraîner

113 Pour travailler en autonomie

Étudier la convergence d'une suite monotone

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$ et $u_0 = 1$.

- 1 a. Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 7.
b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
- 2 Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

Solution commentée

- 1 a. Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$: « $u_n \leq 7$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $1 < 7$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \leq 7$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq 7$.

On a : $u_n \leq 7$ donc $\frac{1}{3}u_n \leq \frac{1}{3} \times 7$ puis $\frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \leq \frac{1}{3} \times 7 + \frac{14}{3}$. Or $\frac{1}{3} \times 7 + \frac{14}{3} = \frac{21}{3} = 7$.

Donc on a : $\frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \leq 7$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 7$.

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a $u_n \leq 7$ pour tout entier naturel n .

b. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3}$.

Or pour tout entier naturel n , $u_n \leq 7$. Donc pour tout entier naturel n , $-\frac{2}{3}u_n \geq -\frac{14}{3}$.

D'où pour tout entier naturel n , $-\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3} \geq 0$. Donc pour tout entier naturel n ,

$u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

- 2 La suite (u_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

Vidéo 08:50

Appliquer le théorème de convergence monotone



Conseil

Quand on connaît le sens de variation d'une suite et qu'on étudie sa convergence, on peut penser au théorème de convergence des suites monotones.

Voir exercices

88 Pour s'entraîner

114 Pour travailler en autonomie

Raisonnement par récurrence pour établir une propriété d'une suite

Vidéo 05:42

Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite



Vidéo 06:35

Démontrer par récurrence la monotonie d'une suite



Méthode

Pour démarrer un raisonnement par récurrence, on commence par énoncer la propriété à démontrer.

Conseil

Le théorème de convergence monotone assure l'existence d'une limite mais ne donne pas sa valeur.

On considère la suite (u_n) définie par $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_n.$$

- 1 a. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $0 \leq u_n \leq 1$.
b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- 2 En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 3 Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$.
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution commentée

- 1 a. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, soit la propriété $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation : $u_2 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$, donc $0 \leq u_2 \leq 1$. $P(2)$ est donc vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2 tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $0 \leq u_n \leq 1$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2}$.

Or pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $n^2 - 1 > 0$.

Donc $0(n^2 - 1) \leq u_n(n^2 - 1) \leq 1(n^2 - 1)$ c'est-à-dire $0 \leq u_n(n^2 - 1) \leq n^2 - 1$.

Puis pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $n^2 > 0$.

Donc $\frac{0}{n^2} \leq u_n \frac{n^2 - 1}{n^2} \leq \frac{n^2 - 1}{n^2}$.

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

- b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - u_n = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2} - 1\right) = -\frac{u_n}{n^2}.$$

Or pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $0 \leq u_n$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

- 2 La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone cette suite est convergente.

- 3 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, soit la propriété $P(n)$: « $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$ ».

Initialisation : $u_2 = 1$ et $\frac{2}{2(2-1)} = 1$, donc $u_2 = \frac{2}{2(2-1)}$. $P(2)$ est donc vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2 tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \frac{n+1}{2((n+1)-1)}$.

$$\text{On a : } u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{2(n-1)} \times \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{1}{2(n-1)} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

Donc $u_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1-1)}$. $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire que $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Un calcul direct de la limite aboutit à la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $u_n = \frac{n}{2(n-1)} = \frac{n}{2n-2} = \frac{n}{n(2 - \frac{2}{n})} = \frac{1}{2 - \frac{2}{n}}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{2}{n} = 2$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Voir exercices

94 Pour s'entraîner

114 Pour travailler en autonomie

Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite PYTHON

Vidéo 09:32

Exprimer une suite arithmético-géométrique en fonction de n 

Vidéo 06:39

Déterminer la variation d'une suite arithmético-géométrique



Fichier Python

Disponible sur lycee.editions-bordas.fr

Conseil

Un arbre pondéré permet de bien comprendre la situation.

Au casino, une machine à sous est réglée de la façon suivante :

- si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est $\frac{1}{4}$;
- si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel non nul, on note G_n l'événement « la n -ième partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$ donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

- 1 Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$ et que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
- 2 Programmer une fonction Python retournant la liste des 10 premiers termes de la suite (p_n) . Quelle conjecture peut-on émettre ?
- 3 On définit pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
 - c. La suite (p_n) est-elle convergente ? Interpréter ce résultat.

Solution commentée

- 1 On construit un arbre pondéré traduisant la situation. On utilise la formule des probabilités totales avec la partition $(G_1, \overline{G_1})$:

$$\begin{aligned} p_2 &= P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) \\ &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

De même avec la partition $(G_n, \overline{G_n})$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ &= P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{donc } p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

- 2 suite_C10(10) renvoie :

[0.25, 0.4375, 0.390625, 0.4023437, 0.3994140625, 0.4001464, 0.3999633, 0.4000091, 0.3999977, 0.4000005].

On conjecture donc que p_n converge vers 0,4.

- 3 a. Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n.$$

 (u_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

- b. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = u_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

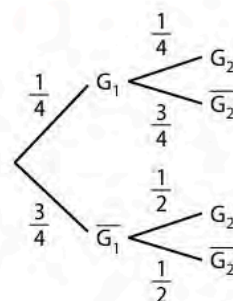
$$\text{Or } u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}. \text{ Donc } u_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

$$\text{D'où pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } p_n = u_n + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

- c. On a $-\frac{1}{4} \in]-1; 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2}{5} = 0,4$$

La conjecture faite en 2. est donc démontrée. La probabilité de victoire du joueur tend vers 0,4 au fur et à mesure que les parties s'enchaînent.



```
def suite_C10(n):
    P=1/4
    L=[P]
    for i in range(2,n+1):
        P=-0.25*P+0.5
        L.append(P)
    return(L)
```

Voir exercices

96 Pour s'entraîner

115 Pour travailler en autonomie

Étudier une démonstration

On souhaite de démontrer la propriété suivante du **cours 3**, page 132.

THÉORÈME DES « GENDARMES »

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si (u_n) et (w_n) convergent vers L , alors (v_n) converge vers L .

RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

Soit $a > 0$ et $I =]L - a; L + a[$ un intervalle ouvert centré en L .

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ donc il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout entier n vérifiant $n \geq n_1$, $u_n \in I$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ donc il existe un entier naturel n_2 tel que pour tout entier n vérifiant $n \geq n_2$, $w_n \in I$.

L'énoncé du théorème suppose qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$ donc il existe un entier naturel n_3 tel que pour tout entier n vérifiant $n \geq n_3$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Soit n_4 le plus grand des entiers naturels n_1 , n_2 et n_3 .

Donc, pour tout entier naturel n , si $n \geq n_4$ alors : $u_n \in I$, $w_n \in I$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Or, si $u_n \in I$ alors $L - a < u_n$ et si $w_n \in I$ alors $w_n < L + a$.

Donc si $n \geq n_4$ alors $L - a < u_n \leq v_n \leq w_n < L + a$.

D'où $L - a < v_n < L + a$ soit $v_n \in I$.

On a montré que, quel que soit l'intervalle ouvert I centré sur L , il existe un rang n_4 à partir duquel tous les termes de la suite (v_n) appartiennent à I : la suite (v_n) converge vers le réel L .

QUESTIONS

1. Expliquer l'existence de l'entier naturel n_1 (ligne 2).
2. Pourquoi peut-on affirmer que si $n \geq n_4$ alors $u_n \in I$ (ligne 10) ?
3. Quel est l'intérêt de considérer cet entier n_4 ?

Bon à savoir !

Cette proposition permet de calculer la limite d'une somme de suites. En adaptant la démonstration on peut aussi déterminer la limite de la somme de deux suites tendent vers $-\infty$ ou vers des limites finies.

Bon à savoir !

Il s'agit de la propriété du **cours 4**, p.134. On raisonne par l'absurde en supposant que la suite (u_n) est non majorée.

Faire une démonstration

D1 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

Piste : Traduire en termes d'intervalles, ce que l'on sait sur les deux suites (u_n) et (v_n) et la conclusion à laquelle on veut arriver, voir **cours 1** p. 128.

D2 Si une suite est croissante et admet pour limite L , alors la suite est majorée par L .

Piste : Voir les pages Vocabulaire ensembliste et logique, p. 448.

Calcul mental

1 Calculer et simplifier :

a. $3 + \frac{1}{5}$

b. $\frac{7}{6} - 1$

c. $\frac{4}{9} \times \frac{3}{10}$

d. $\frac{1}{6} - \frac{1}{3}$

e. $\frac{1}{14} + \frac{4}{7}$

f. $16 \div \frac{4}{5}$

2 Simplifier :

a. $\sqrt{64} \times 2^2$

b. $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$

c. $e^{-2} \times \frac{e^{-3}}{e^{-5}}$

3 Factoriser les expressions suivantes.

a. $-x^3 + 2x^2$

b. $16 - 81x^2$

4 Développer les expressions suivantes.

a. $(1 - 3x)^2$

b. $(2x - 3)(2x + 3)$

c. $-x(3x - 4)$

d. $7x + (-5x + 8)$

5 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. Augmenter une quantité de 50 % revient à la multiplier par 2.

b. Diminuer une quantité de 75 % revient à la diviser par 4.

c. Diminuer une quantité de 50 % revient à la diviser par 2.

6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

a. $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$ avec $I = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ avec $I =]0; +\infty[$.

c. $h(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3$ avec $I =]0; +\infty[$.

d. $-4e^x + 5x^2$ avec $I = \mathbb{R}$.

Automatismes

Calculs numériques
et algébriques
Fonctions

7 Calculer le taux de variation entre 2 et 5 pour chacune des fonctions suivantes.

a. $g(x) = x^2$

b. $k(h) = e^h$

c. $f(t) = \frac{1}{1+t}$

8 Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 3.9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a. $3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \geq 0$

b. $(e^t - 1)(3 - 4t) = 0$

Géométrie

10 On se place dans un repère du plan. Soit les points A(-2; 3), B(7; 0), C(4; 5) et D(2; -1). Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

11 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit d la droite du plan repéré dont une équation cartésienne est : $5x - 7y - 2 = 0$.a. Il existe un point de d d'abscisse nulle.b. Le vecteur $\vec{u}(14; 10)$ est un vecteur directeur de toutes les droites parallèles à d .c. Si la droite d' est parallèle à d , alors son équation réduite peut être $y = \frac{7}{5}x + \frac{1}{5}$.

12 Questions de méthodes

On se place dans un repère orthonormé du plan.

a. Comment montrer que deux vecteurs sont colinéaires en utilisant leurs coordonnées ?

b. Comment déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points ?

Statistiques et probabilités

13 1. Écrire $P(A \cap B)$ sous forme de fraction irréductible sachant que $P(A) = \frac{4}{15}$; $P(B) = \frac{5}{8}$ et $P(A \cup B) = \frac{29}{40}$.

2. A et B sont-ils indépendants ?

14 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Alors A et B ne sont pas indépendants.

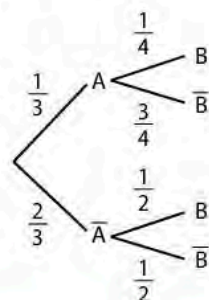
15 Questions de méthodes

On considère deux événements A et B d'une expérience aléatoire.

L'arbre pondéré ci-contre donne des informations sur ces événements.

a. Sur quelle branche de l'arbre peut-on lire la probabilité notée $P_A(B)$?

b. Comment peut-on calculer la probabilité de l'événement B ?



Limites de suites

Questions flash

16 ORAL a. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^5$ pour tout entier naturel n . Préciser la limite de (u_n) .

b. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{n^{10}}$ pour tout entier naturel n non nul. Préciser la limite de (v_n) .

17 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$. Justifier sans calcul qu'il existe un entier naturel N tel que $u_n > 100$ pour tout $n \geq N$.

18 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = -n^2.$$

Justifier sans calcul qu'il existe un entier naturel N tel que $v_n < -10\,000$ pour tout $n \geq N$.

19 Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{1}{n^7}.$$

Justifier sans calcul qu'il existe un entier naturel N tel que $-0,001 < w_n < 0,001$ pour tout $n \geq N$.

20 PYTHON Compléter un programme

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 4.

```
1 def demarrer_1():
2     u=2;n=0
3     while ... :
4         u=(2/3)*u+(1/3)*n+1
5         n=n+1
6     return ...
```

Opérations sur les limites

Questions flash

21 ORAL Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \times w_n$.

Pour les exercices **22** à **28**, déterminer la limite des suites (u_n) .

22 1. $u_n = n^2 + 5$ 2. $u_n = -2n^2$

23 1. $u_n = n^2 + 3n$ 2. $u_n = -n^3 + 5$

24 1. $u_n = 5n^2 + 2\sqrt{n} + 1$ 2. $u_n = -n^2 - 2n + 150$

140

25 1. $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n^2}$

2. $u_n = 2n^2 + \frac{5}{n^3}$

26 1. $u_n = (-n^3)(3n^2 + 4)$ 2. $u_n = \left(-7 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)(n+1)$

27 1. $u_n = \frac{1}{n^2 + 5}$ 2. $u_n = -\frac{6}{\sqrt{n} + 1}$

28 1. $u_n = \frac{3}{3 - 4n^2}$ 2. $u_n = \frac{7}{n^2 + 2n + 3}$

29 1. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ et $v_n = -7 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$w_n = \frac{2 - \frac{1}{n}}{-7 + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

30 Dans chacun des cas, déterminer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = \frac{n^2}{-3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$ 2. $u_n = \frac{\frac{5}{n} + 9}{-3 + \frac{2}{n^2}}$

Limites et comparaisons

Questions flash

31 ORAL On rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Dans chacun des cas, déterminer la limite de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n :

a. $u_n \geq \sqrt{n}$ b. $u_n < -n^3$

32 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$, alors w_n converge vers 2.

33 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 4n^2 + (-1)^n.$$

1. a. Que vaut $(-1)^n$ suivant les valeurs de n ?

b. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 4n^2 - 1$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

34 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = -3n - (-1)^n.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , $v_n \leq -3n + 1$.

2. En déduire la limite de la suite (v_n) .

35 Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = -n^2 + 6 \cos n.$$

1. a. Donner un encadrement de $\cos(n)$.

b. En déduire que, pour tout entier n , $w_n \leq -n^2 + 6$

2. En déduire la limite de la suite (w_n) .

36 1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

2. En utilisant le théorème des gendarmes, établir la convergence de la suite de terme général $\frac{\sin(n)}{n}$.

Limites de suites géométriques

Questions flash

37 **ORAL** Déterminer la limite des suites suivantes définies pour tout entier naturel n en justifiant :

1. $u_n = 3^n$

2. $v_n = 0,99^n$

3. $w_n = (-0,1)^n$

4. $z_n = e^n$

38 **PYTHON** Compléter un programme

Soit q un réel et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$ pour tout entier naturel n non nul.

Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne un message indiquant si (u_n) est convergente ou divergente.

```
1 def conv(q):
2     if -1 < q <= 1:
3         return "... "
4     else :
5         return "... "
```

39 Déterminer la limite, si elle existe, de chaque suite (u_n) définie par :

a. $u_n = -25\left(\frac{5}{6}\right)^n$ b. $u_n = -7(\sqrt{3})^n$ c. $u_n = -2\left(\frac{10}{7}\right)^n$

d. $u_n = (-\pi)^n$ e. $u_n = 3^{n+1}$

40 On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{6^n}{7^n}$. En écrivant u_n sous la forme q^n , avec q un réel à déterminer, étudier la convergence de la suite.

41 **LOGIQUE** On considère la proposition :
« Si $0 < q < 1$, alors la suite de terme général (q^n) a pour limite 0. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?

2. a. Énoncer sa contraposée et sa réciproque.

b. Dire si elles sont vraies ou fausses, en justifiant.

Suites majorées et minorées

Questions flash

42 **VRAI/FAUX**

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Si une suite est majorée par 6, alors tous les termes sont supérieurs ou égaux à 6.

2. Si une suite est minorée par 2 alors elle est minorée par 1.

3. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$ et si (u_n) est croissante, alors (u_n) converge.

43 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n + 1$. Justifier que (u_n) est minorée.

44 On considère la suite de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle majorée par 1 ? Par 2 ?

45 Démontrer que chacune des suites (u_n) ci-dessous est bornée.

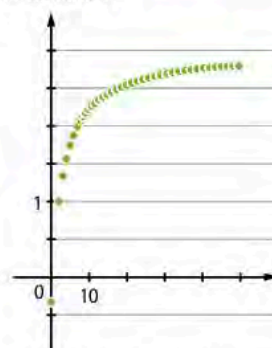
1. $u_n = 7 + \sin n$

2. $u_n = 5 \cos n$

46 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{3n-1}{n+3}.$$

1. La représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n) est donnée ci-dessous :



Émettre une conjecture sur un majorant possible de cette suite.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n - 3 = \frac{10}{n+3}$.

b. En déduire le signe de $u_n - 3$. Conclure.

47 **CALC** Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 4$.

1. a. À l'aide d'une calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n) .

b. -1 peut-il être un minorant de (u_n) ?

c. 20 peut-il être un majorant de (u_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n + 5 = (n-3)^2$.

3. En déduire un minorant de (u_n) .

48 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 3$.

b. On admet que la suite (u_n) est croissante. Est-ce que la suite (u_n) est convergente ?

49 **CALC** Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$.

1. a. À l'aide de la calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. Conjecturer le sens de variation de (u_n) et une majoration de (u_n) .

2. Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 9.

3. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. Justifier que la suite (u_n) converge.

Limites et suites

50 Capacité 1, p. 129

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 3n - 5$.

- À partir de quel rang a-t-on $v_n > 1\,000$? $v_n > 10^6$?
- En utilisant la définition, montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

51 Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 2 - 5n$.

- À partir de quel rang a-t-on $u_n < -1\,000$?
- En utilisant la définition, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

52 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par $v_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

- À partir de quel rang a-t-on $v_n \in]1,99 ; 2,01[$?
- En utilisant la définition, montrer que (v_n) converge vers 2.

53 ALGO PYTHON Capacité 2, p. 129

Compléter un algorithme

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- Compléter l'algorithme ci-contre pour que la variable n contienne, en fin d'algorithme, le plus petit entier naturel n tel que u_n est strictement supérieur à A .

- Programmer cet algorithme sous forme d'une fonction Python et le tester avec $A = 200$ puis $A = 5\,000$.

```

u ← 1
n ← ...
Tant que ...
    u ← ...
    n ← ...
Fin Tant que
  
```

54 ALGO Capacité 2, p. 129

Comprendre un algorithme

Le propriétaire d'une parcelle boisée comptant 10 000 arbres en 2020 gère son exploitation en suivant le modèle suivant : pour tout entier naturel n , u_n est le nombre d'arbres en 2020 + n et $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 600$.

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

Il souhaite conserver au moins 4 000 arbres sur sa parcelle.



Parmi les algorithmes suivants, un seul est tel qu'après exécution, la variable N contient le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'arbres devienne inférieur ou égal à 4 000. Indiquer lequel en justifiant.

a. $U \leftarrow 10\,000$
 $N \leftarrow 0$
Tant que $U \leq 4\,000$
 $N \leftarrow N + 1$
 $U \leftarrow 0,8 \times U + 600$
Fin Tant que

b. $U \leftarrow 10\,000$
 $N \leftarrow 0$
Tant que $U > 4\,000$
 $N \leftarrow N + 1$
 $U \leftarrow 0,8 \times U + 600$
Fin Tant que

c. $U \leftarrow 10\,000$
 $N \leftarrow 0$
Tant que $U > 4\,000$
 $N \leftarrow N + 1$
 $U \leftarrow 0,8 \times N + 600$
Fin Tant que

55 ALGO PYTHON Écrire et programmer un algorithme

Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = \frac{4n+1}{n+1}.$$

- Écrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel les termes u_n appartiennent à $]4 - a ; 4 + a[$ où a est un réel strictement positif fixé.

- a. Programmer cet algorithme en Python.

- b. Que renvoie-t-il pour $a = 0,1$? et pour $a = 10^{-6}$?

56 LOGIQUE Voici une proposition :

« Si la suite (u_n) converge vers l , alors à partir d'un certain rang, tous les termes u_n appartiennent à $]l - 0,2 ; l + 0,2[$. »

- Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.

- a. Énoncer la réciproque de cette proposition.

- b. Cette proposition réciproque est-elle vraie ? Justifier.

57 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Une suite divergente a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si la suite (u_n) converge vers 0 alors la suite (v_n) telle que $v_n = |u_n|$ converge vers 0.

Opérations sur les limites

Dans les exercices 58 et 59, déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul en utilisant les règles sur les opérations portant sur les limites.

58 Capacité 3, p. 131

$$1. u_n = 3n^2 + 5n - 11$$

$$2. u_n = -n^3 - 3n + \frac{1}{n^2}$$

$$3. u_n = (2 - 3n)(n^2 + 5)$$

$$4. u_n = \frac{5}{5 + 3n}$$

$$59 \quad 1. u_n = 5n^2 + \frac{4}{n^4} - 7$$

$$2. u_n = n^5 + \frac{\sqrt{n}}{8} + \frac{1}{n}$$

$$3. u_n = (2n^2 - 5)(-3n^2 - 8)$$

$$4. u_n = \frac{1}{n} \times \frac{4}{4 - 5n}$$

60 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Soit (w_n) une suite convergente. Si à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.
2. Une suite (u_n) arithmétique de raison r est toujours divergente.

Dans les exercices 61 à 63, déterminer la limite de (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul en levant éventuellement une indétermination et en utilisant les règles sur les opérations portant sur les limites.

61 Capacité 4, p. 131

1. $u_n = n^2 - 2n$
2. $u_n = -3n^2 + 6n + 7$
3. $u_n = n^3 - 3n^2 + 2n - 5$
4. Pour $n > 2$, $u_n = \frac{3n+5}{n^2-4}$
5. $u_n = \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n}$
6. $u_n = \frac{5+n+n^2}{n}$

62 1. $u_n = -n^2 + \sqrt{n}$

2. $u_n = \frac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n}$

3. $u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n}}$

4. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3}$

63 1. $u_n = 5n^3 - 3n^2 + 2\sqrt{n}$

2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(-3n+5)$
3. $u_n = \frac{5n^3-3n^2+2\sqrt{n}}{n}$

Limites et comparaisons

Pour les exercices 64 et 65, déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, en utilisant les théorèmes de comparaison.

64 Capacité 5, p. 131

1. $u_n = n - \sin n$
2. $u_n = -n^2 + \cos n$
3. $u_n = \frac{n}{2 + \cos n}$
4. $u_n = \frac{n - \sin n}{n^2 + 1}$

65 1. $u_n = \frac{4n + (-1)^n}{n+2}$

2. $u_n = 5n^3 + (-1)^n$
3. $u_n = \frac{-n + (-1)^n}{2n - (-1)^n}$
4. $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$

66 1. Soit (u_n) une suite qui vérifie $u_n \geq 3n^2 - 1$ pour tout entier naturel n . Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \leq -5n$ pour tout entier naturel n .

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3. Soit (u_n) une suite telle que $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

67 VRAI/FAUX

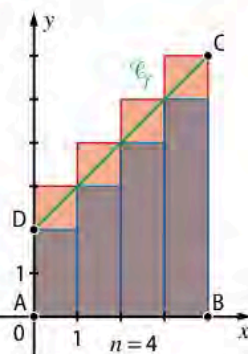
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

On considère une suite (v_n) . Si, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $-1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ alors la suite (v_n) converge.

68 Histoire des mathématiques
Méthode d'approximation de Riemann

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(x) = x + 2$.

On divise l'intervalle $[0; 4]$ en 4 segments de largeur 1 et on construit quatre rectangles « inférieurs » en bleu et quatre rectangles « supérieurs » en rouge. On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du trapèze ABCD.



1. Calculer l'aire totale des rectangles inférieurs et l'aire totale des rectangles supérieurs.

2. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

3. Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 1.

On partage maintenant l'intervalle $[0; 4]$ en n segments de largeur $\frac{4}{n}$ et on construit de la même manière n rectangles « inférieurs » et n rectangles « supérieurs ».

On note u_n l'aire totale des rectangles « inférieurs » et v_n l'aire totale des rectangles « supérieurs ».

a. Donner u_4 et v_4 .

On peut montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 8\left(\frac{n-1}{n} + 1\right) \text{ et } v_n = 8\left(\frac{n+1}{n} + 1\right).$$

b. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$u_n < \mathcal{A} < v_n.$$

4. En considérant la suite (v_n) constante égale à $\mathcal{A}$, en déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Point Histoire

Cette méthode d'approximation de l'aire sous une courbe a été introduite par Riemann (1826-1866) et Simpson (1710-1761). Voir Chapitre 10, p. 326.


69 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit (u_n) une suite.

1. Si $u_n \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout entier naturel n non nul, alors :

- a. la suite (u_n) converge vers 0.
- b. il existe un rang à partir duquel tous les termes sont positifs.
- c. on ne peut pas déterminer si la suite est convergente ou divergente.

2. Si pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2 - 3n$, alors :

- a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- b. la suite (u_n) converge.
- c. il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont négatifs.

Limites de suites géométriques

Pour les exercices 70 à 72, déterminer la limite éventuelle de (u_n) définie pour tout entier naturel n en utilisant la limite d'une suite géométrique.

70 Capacité 6, p. 133

$$1. u_n = \frac{4}{7^n} \quad 2. u_n = \frac{2 \times 12^n}{6 \times 4^n} \quad 3. u_n = \frac{(-1)^n 3^n}{(-0,1)^n} \quad 4. u_n = \frac{(-4)^{n+1}}{5^n}$$

$$71 \quad 1. u_n = 4^n + 7^n \quad 2. u_n = -2 \times 12^n + 3^n - 5$$

$$3. u_n = 9^n - 3^n \quad 4. u_n = 1 + 0,5 + \dots + 0,5^n$$

$$5. u_n = 4^n + (-2)^n + 4 \quad 6. u_n = \sum_{k=0}^n 2^k$$

$$72 \quad 1. u_n = \frac{2^n - 3^n}{5^n + 4^n} \quad 2. u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n - 1} \quad 3. u_n = \frac{5^n + (-3)^n}{2^n + 3(-1)^n}$$

73 Déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$a. u_n = 0,5^n \cos n \quad b. u_n = 3^n + \sin n \quad c. u_n = \frac{1}{n} \sin(2^n)$$

Piste : Utiliser un encadrement du sinus ou du cosinus d'un réel.

74 **LOGIQUE** Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-2)^n}{7}$ n'admet pas de limite.

Piste : Raisonner par l'absurde.

75 **LOGIQUE** Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2 \left(-\frac{15}{7} \right)^n$ n'admet pas de limite.

76 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

2. Déterminer le terme général de (u_n) .

3. La suite (u_n) converge-t-elle ?

77 **VRAI/FAUX**

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Si q est un nombre réel tel que $-1 < q < 1$, alors la suite de terme général $\sum_{k=0}^n q^k$ converge.

78 Une question ouverte

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Montrer l'égalité suivante :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right).$$

2. La suite (v_n) est définie par $v_n = 1,27\dots$ avec n décimales consécutives égales à 7. Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$. Démontrer que la suite (v_n) converge vers un nombre rationnel r .

Piste → Voir p. 466

79 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\frac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n.$$

2. Étudier la convergence de la suite (v_n) .

80 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n

$$\text{par : } u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , u_n est supérieur ou égal à 0.

2. On peut alors introduire alors la suite auxiliaire (t_n) définie

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ par } t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}.$$

a. Montrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b. Expliciter t_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

3. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

4. En déduire la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

81 On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2^n - n.$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

3. En remarquant qu'on peut alors écrire pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \frac{u_{n-1} - 1}{2^{n-2}} + \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{u_{n-1} - 1}{2^{n-2}} = \frac{u_{n-2} - 1}{2^{n-3}} + \frac{n-2}{2^{n-2}}$$

$$\frac{u_2 - 1}{2^1} = \frac{u_1 - 1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{u_1 - 1}{2^0} = \frac{u_0 - 1}{2^{0-1}} + \frac{0}{2^0}.$$

En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}.$$

Suites majorées et minorées

82 Capacité 7, p. 135

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2 - 2n + 3.$$

Démontrer que (u_n) est minorée par 2.

83 Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,75v_n + 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (v_n) est majorée par 8.

84 Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{5n}{n+1}$ est majorée par 5.

85 Étudier si les suites suivantes, définies pour tout entier naturel n , sont bornées.

1. $u_n = 4 - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 2. $u_n = 3 \cos(2n+5) - 1$ 3. $u_n = \frac{n^2+3}{n^2+4}$

86 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 75$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,6u_n + 50$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 125.

87 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $u_n = u_{n-1} + \frac{n}{2^n}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

2. En déduire que la suite (u_n) est majorée.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $n+2 \leq 2^n$.

4. La suite (u_n) est-elle minorée ?

88 Capacité 8, p. 135

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est majorée par 2.

2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

MÉTHODE À L'ORAL

89 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

On va étudier la convergence de la suite (u_n) .

1. a. Énoncer le théorème qui permet de démontrer qu'une suite récurrente est convergente.

b. Quelles sont les deux hypothèses du théorème qu'il faut valider ?

c. Proposer oralement une méthode de démonstration de ces deux hypothèses.

2. Ce théorème permet-il de déterminer la limite éventuelle de la suite ? Si non, comment la conjecturer ?

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

90 On considère (u_n) la suite des records du tour du monde à la voile en équipage.

1. Donner le plus petit majorant connu de la suite (u_n) exprimée uniquement en jours.

2. Donner un minorant évident de la suite (u_n) .

3. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on en conclure sur la suite (u_n) ?

5. Êtes-vous d'accord avec l'affirmation suivante ?

À long terme, les bateaux finiront par atteindre un « record limite » qui ne pourra jamais être battu.



LE SAVIEZ-VOUS

Les matériaux ou innovations utilisés en ingénierie navale (fibres de carbone ou foils permettant de réduire le contact avec l'eau...) ont de nombreuses applications industrielles. Cet exercice montre que la course au record atteindra (ou approchera de plus en plus) une limite infranchissable malgré les améliorations techniques...

91 CALC Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2020$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est minorée par 1.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

4. Conjecturer avec une calculatrice la limite de la suite (u_n) .

Piste : Utiliser le fait que la fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

92 CALC Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est bornée par 1 et 2.

2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

4. Conjecturer avec une calculatrice la limite de la suite (u_n) .

Piste 1. et 2. : Étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{2}{3-x} \text{ sur l'intervalle } [0; 3].$$

93 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Toute suite convergente est décroissante ou croissante.

2. Toute suite croissante qui converge vers 0 est majorée par 0.

3. Une suite qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

94 Capacité 9, p. 136

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels positifs par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 < u_n < 1$.

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ et en déduire la limite de la suite (u_n) .

95 Une question ouverte

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + \sqrt{n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Piste → Voir p. 466

MATHS & PHYSIQUE

96 PYTHON  Capacité 10, p. 137

Écrire et exécuter un programme

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.



Une tasse de café est servie à une température initiale de $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ dans un milieu dont la température, exprimée en degrés Celsius, supposée constante, est égale à $10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant un modèle d'évolution discret utilisant une suite.

Pour tout entier naturel n , on note T_n la température du café à l'instant n , avec T_n exprimé en degrés Celsius et n en minutes. On a ainsi : $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10).$$

1. Utiliser le contexte physique pour conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) .

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.

3. a. Programmer une fonction Python retournant la liste des dix premiers termes de la suite (T_n) .

b. Cette liste est-elle cohérente avec la conjecture émise à la question 1 ?

4. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = T_n - 10$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0 .

b. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$T_n = 70 \times 0,8^n + 10.$$

c. La suite (T_n) est-elle convergente ? Interpréter ce résultat.

Point Histoire

Il s'agit ici d'un modèle discret du refroidissement. Il en existe une version continue développée dans l'exercice 156 du Chapitre 9 p. 316 portant sur les équations différentielles. Isaac Newton a été très prolifique. Cette loi est notamment utile en météorologie et a l'avantage de ne pas tenir compte de l'unité dans laquelle est exprimée la température.

97  CALC  ALGO Compléter un algorithme

Dans une ville de 20 000 habitants, à 7 heures du matin, 100 personnes apprennent une rumeur. Une heure plus tard, 350 personnes en tout la connaissent.

Soit u_n le nombre de personnes « au courant » au bout de n heures. On adopte l'hypothèse suivante : le nombre de personnes touchées par la rumeur dans l'intervalle $[n; n+1]$ est proportionnel à u_n .

1. a. Montrer qu'il existe un réel a tel que $u_{n+1} = (1+a)u_n$ pour tout entier naturel n .

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

c. Préciser u_0 et u_1 . En déduire le réel a .

d. En déduire que $u_n = 100 \times 3,5^n$.

2. a. Étudier le sens de variation de cette suite et déterminer sa limite.

b. Compléter l'algorithme ci-contre pour qu'après son exécution la variable N contienne le nombre minimal d'heures au bout duquel toute la ville sera au courant.

```

U ← ...
N ← ...
Tant que ...
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
  
```

MATHS & SES

98  CALC  TABLEUR  PYTHON

Écrire et exécuter un programme

Un groupe d'économistes étudie le taux de disponibilité des ressources alimentaires nécessaires pour le développement de la population d'un pays émergent.



Ce taux dépend notamment du nombre d'habitants, de la quantité de nourriture, de l'espace agricole disponible et de l'état sanitaire de la population. Une étude menée en 2019 a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles. Pour tout entier naturel n , on appelle R_n le taux de disponibilité des ressources pour l'année $2019 + n$. On a ainsi $R_0 = 0,9$. On choisit le modèle de Verhulst pour définir la suite (R_n) . Pour tout entier naturel n , on a :

$$R_{n+1} = R_n - 0,1R_n^2.$$

1. Une partie des économistes estiment qu'en 2024, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,6.

Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Justifier en utilisant votre calculatrice.

2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$. Ainsi, la suite (R_n) vérifie pour tout entier naturel n la relation $R_{n+1} = f(R_n)$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq R_{n+1} \leq R_n \leq 1$.

c. La suite (R_n) est-elle convergente ?

3. Le groupe d'économistes affirme que selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,6 au cours des 20 premières années qui suivent l'année 2024 et qu'il est capable de déterminer en quelle année ce seuil sera atteint pour la première fois.

Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Justifier en utilisant le tableur ou un programme.

Point Histoire

Le modèle de croissance proposé par Pierre-François Verhulst (1804-1849) en réponse à celui de Malthus énonce que plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente. Ce modèle conduit, en temps continu, à une fonction logistique et en temps discret à une suite logistique.

MATHS & GÉOGRAPHIE

99 ALGO

Écrire et compléter un algorithme

Un urbaniste souhaite étudier l'évolution de la population d'un quartier en expansion. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2020. Les contraintes en termes d'équipements publics (écoles, services publics, etc.) font que la population ne peut dépasser 60 000 individus.

Partie A : modèle n° 1

L'urbaniste commence par supposer que la population va augmenter de 5 % par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimés en milliers, en 2020 + n .

- Déterminer v_0 et v_1 .
- Déterminer la nature de la suite (v_n) .
- Donner l'expression de v_n en fonction de n .
- Ce modèle répond-il aux contraintes en termes d'équipements ? Sinon proposer un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle année ce ne sera plus le cas.

Partie B : modèle n° 2

L'urbaniste modélise maintenant l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour

tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$
 - Justifier que g est croissante sur $[0 ; 60]$.
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.
- On remarque que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} près de u_1 . Interpréter le résultat.
 - Démontrer que $0 \leq u_n \leq 55$ pour tout n .
 - Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - En déduire la convergence de la suite (u_n) .
 - On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $g(l) = l$. En déduire sa valeur et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. L'urbaniste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant.

Compléter cet algorithme afin que la variable N contienne après son exécution le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

```
U ← 12
N ← ...
Tant que ...
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
```

Problème de synthèse

MATHS & SVT

100 TABLEUR PYTHON
MODÉLISER COMMUNIQUER

Compléter et exécuter un algorithme

Au large de Cape Town en Afrique du Sud, l'organisme de protection de la vie marine a recensé 3 000 baleines au 1^{er} juin 2019.



L'espèce sera déclarée en danger dans la zone si le nombre d'individus devient inférieur à 2 000. Les observations permettent d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la zone ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la zone subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre.

On modélise l'évolution du nombre de baleines par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2019 + n . On a donc $u_0 = 3 000$.

- Montrer que $u_1 = 2 926$ et que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
- À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n) . Le format des cellules est configuré pour n'afficher que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554

Quelle formule faut-il saisir dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1 520$.
- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1 520$.
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0 .
 - En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 480 \times 0,95^n + 1 520.$$
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

5. Compléter la fonction Python suivante pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de baleines présentes dans la zone de Cape Town sera inférieur à 2 000.

```
def baleines():
    u = ...
    n = ...
    while ...:
        u = ...
        n = ...
    return(...)
```

6. L'espèce sera-t-elle déclarée en danger dans la zone un jour ? Si oui déterminer en quelle année.

LE SAVIEZ-VOUS

La chasse à la baleine a provoqué un déclin des espèces de cétacés dans les années 1960. En 40 ans et grâce à des programmes de protection rigoureux, différentes sortes de baleines ont pu repeupler les eaux sud-africaines.

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).

En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

Théorèmes de comparaison

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

• Théorème des gendarmes

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers le réel L , alors (v_n) converge vers L .

Suites géométriques à l'infini

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$		0	1	$+\infty$

Théorème de convergence monotone

(1) Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.

(2) Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.

Limite d'une suite

Exemples

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1 :

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$$

Règles sur la somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Règles sur le produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Règles sur le quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Faire le point avec des exercices corrigés

Utiliser la définition de la limite d'une suite

* 101 10 min Capacité 1, p. 129

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $v_n = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Conjecturer la limite de (v_n) .

* 102 10 min ALGO Capacité 2, p. 129

Soit A un réel et (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$ pour tout entier naturel n .

Écrire un algorithme retournant le plus petit entier naturel n tel que u_n est strictement supérieur à A .

Déterminer une limite à l'aide des règles sur les opérations

* 103 20 min Capacité 3, p. 131

Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n .

a. $u_n = 3 - 2n - 5\sqrt{n}$ b. $u_n = -3n^3 - n^2 - n + 5$
c. $u_n = 3n^2 + 2n - \frac{1}{n}$

* 104 10 min Capacité 3, p. 131

Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n non nul.

a. $u_n = (1 - n^2)(1 + \sqrt{n})$ b. $u_n = (n^3 - 1)\left(\frac{1}{n} - 1\right)$

* 105 10 min Capacité 4, p. 131

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

On considère les suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = -3n^2 + 8n + 1$. Alors la suite (u_n) converge vers 1.
2. $u_n = 3n^3 - 2n^2 + 3$. Alors la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

* 106 10 min Capacité 4, p. 131

Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n non nul.

a. $u_n = \frac{1}{n} \left(-5n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ b. $u_n = (n - 1) \frac{1}{\sqrt{n}}$

Utiliser les théorèmes de comparaison

* 107 15 min Capacité 5, p. 133

Déterminer la limite de (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 en utilisant les théorèmes de comparaisons.

a. $u_n = n - \sin(n)$ b. $u_n = \frac{n - \cos(n)}{n^2 - 1}$
c. $u_n = -\sqrt{n} + \cos(n^2)$

* 108 15 min Capacité 5, p. 133

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

a. $u_n = \frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 - 1}$ b. $u_n = 2n^3 - (-1)^n$
c. $u_n = \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}$

* 109 15 min Capacités 5 et 9, p. 133-136

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 2^n$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

* 110 20 min Capacités 5 et 6, p. 133

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Toutes les suites arithmétiques sont divergentes.
2. La suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$u_n = \frac{\cos(n) - n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0.

Utiliser la limite d'une suite géométrique

* 111 30 min Capacité 6, p. 133

Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = \frac{4 \times 2^n}{12 \times 7^n}$ 2. $u_n = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^n$ 3. $u_n = \sum_{k=0}^n 3^k$

4. $u_n = -3 \times 15^n + 5^n - 1$ 5. $u_n = \frac{3^n - 4^n}{2^n + 5^n}$

* 112 30 min Capacités 5 et 6, p. 133

Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) .

a. $u_n = \left(\frac{99}{100} \right)^n \sin(n)$ b. $u_n = 4^n - (-1)^n$

c. La suite (u_n) vérifie pour tout entier naturel n ,
 $4 - 0,9^n \leq u_n \leq 4 + 0,1^n$.

Étudier la convergence d'une suite majorée ou minorée

* 113 10 min Capacité 7, p. 135

1. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 + 4n - 3$ est minorée par -5 .

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}v_n^2 + 8}$ est majorée par 8.

* 114 30 min Capacités 7, 8 et 9 pp. 135-136

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \cos(n) + \sin(n)$ est :

- a. bornée par -2 et 1 .
- b. bornée par -1 et 1 .
- c. minorée par -2 et majorée par 2 .
- d. minorée par -3 et majorée par 2 .

* 115 30 min Capacités 9 et 10 pp. 136-137

Fin 2020, un club de rugby comptait 7 000 abonnés. À la fin de chaque année, le club constate que 20 % des abonnés ne se réabonnent pas et que 4 000 nouveaux abonnés arrivent. On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2020 + n .

1. Préciser a_0 et expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,80a_n + 4 000$.
2. Démontrer que la suite (a_n) est majorée par 20 000.
3. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
4. En déduire la convergence de la suite (a_n) .

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Déterminer la limite d'une suite

■ **Un exemple :** Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{-7n^2 - 12n + 2}{3n^2 + n + 4}$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Comment identifier le théorème à utiliser ?	J'identifie la forme de l'expression. ► En déduire la règle utilisée.
Comment déterminer la limite ?	Je détermine la limite du numérateur et du dénominateur à l'aide des règles du cours et je vois si je peux conclure directement. ► Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-7n^2 - 12n + 2)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^2 + n + 4)$. Pourquoi obtient-on une forme indéterminée ?
Comment lever l'indétermination ?	Je factorise le numérateur et le dénominateur par le terme prépondérant. ► Montrer que pour tout entier naturel n , le numérateur s'écrit $n^2 \left(-7 - \frac{12}{n} + \frac{2}{n^2} \right)$ et le dénominateur $n^2 \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} \right)$.
Comment conclure ?	Je simplifie la nouvelle expression de u_n . ► Conclure en utilisant la règle sur la limite d'un quotient.

116 Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^2 - 9n + 5)$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3n^3 - 5n}{-2n + 1} \right)$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n - 5}{-2n^2 - 3n + 7}$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sqrt{n} + 3)$

117 Déterminer les limites suivantes.

a. $u_n = -5e^n + 0,01^n - 5$

b. $u_n = \frac{7^n - 4^n}{3^n + 5^n}$

c. $u_n = 7^n - 21^n$

d. $u_n = 3^n + (-0,5)^n + 4$

PARCOURS 2 Déterminer qu'une suite est minorée

■ **Un exemple :** Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{2n+5}{3n+6}$.

Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > \frac{2}{3}$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Comment démontrer l'inégalité demandée ?	Je peux me ramener à une étude de signe. ► Écrire une inégalité équivalente ayant un second membre nul.
Comment poursuivre ?	Je dois étudier le signe du premier membre de l'inégalité obtenue. ► À l'aide d'une réduction au même dénominateur, transformer le premier membre en un quotient.
Comment étudier le signe du quotient obtenu ?	Je détermine le signe du numérateur et du dénominateur. ► Justifier que le quotient est positif pour tout entier naturel n .
Comment terminer ?	J'utilise l'équivalence montrée à la première étape. ► Conclure.

118 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = -2n^2 + 14n - 17$.
Démontrer que pour tout entier naturel n , $v_n \leq 7$.

119 Soit (u_n) la suite définie par, $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 5$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 3$.

PARCOURS 3 Aller plus loin avec les suites adjacentes

On va étudier des exemples de suites adjacentes, c'est-à-dire des suites (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

120 Chercher en autonomie

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que $v_n \geq u_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante.
3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement majorée et minorée.
4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent puis justifier qu'elles ont la même limite.

Piste 3. : Pour tout entier naturel n ,
 $u_n \leq v_n \leq v_0$.

On peut démontrer le théorème suivant : « Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers le même réel L . »

121 Application

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Déterminer leur limite commune.

Piste 1. : Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est géométrique.

PARCOURS 4 Aller plus loin avec des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Les suites arithmétiques et géométriques sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 1.

On va étudier les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où a et b sont des nombres réels.

122 Chercher en autonomie

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$.

1. On cherche deux réels α et β distincts tels que les suites (v_n) et (w_n) , définies par $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$ soient des suites géométriques de raisons respectives β et α .
 - a. Montrer que α et β sont les solutions de l'équation $X^2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$.
 - b. En déduire les valeurs de α et β . On prendra $\alpha < \beta$.
2. a. Démontrer que $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n .
 - b. Déterminer l'expression du terme général de la suite (w_n) .
3. En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n) .

Piste 1. : Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+2} et u_{n+1} puis en fonction de u_{n+1} et u_n .
2. a. : Démontrer que (v_n) et (w_n) sont géométriques.
3. : Soustraire w_n et v_n .

123 Application

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} + 0,24u_n$.

1. Déterminer les solutions α et β de l'équation $X^2 = X + 0,24$.
2. Soit les suites (v_n) et (w_n) , définies par $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$.
 - a. Déterminer l'expression de v_n et w_n en fonction de n .
 - b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

124 **RAISONNER** **CHERCHER**

Convergence d'une somme

On définit pour tout entier naturel n strictement positif, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout $n > 0 : v_n > \frac{1}{2}$.

c. Trouver le plus petit entier N tel que si $n > N$, alors $v_n < \frac{3}{4}$.

d. En déduire que si $n \geq N$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

2. On pose pour tout $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 5 : u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b. Montrer que, pour tout $n \geq 5$:

$$S_n \leq \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante, puis qu'elle converge.

125 **TABLEUR** **MODÉLISER** **RAISONNER**

Récurrence double

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$. Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie A : Étude avec un tableur

On veut calculer les premiers termes de la suite avec un tableur. On a reproduit ci-contre une partie d'une feuille de calcul où figurent les valeurs de u_0 et u_1 .

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Donner les valeurs approchées à 10^{-3} des valeurs de la suite (u_n) pour n allant de 2 à 10.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \text{ et } w_n = u_n - 7.$$

1. a. Démontrer que la suite (v_n) est constante.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. a. En utilisant le résultat de la question 1.b. montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n) .

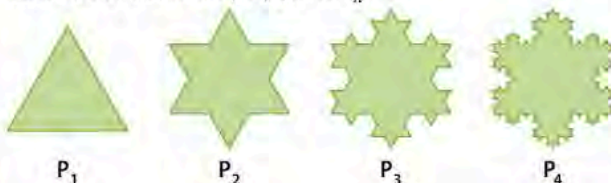
	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	

126 **COMMUNIQUER** **CHERCHER**

Histoire des mathématiques

Une fractale : le flocon de von Koch

On considère un triangle équilatéral P_1 de côté 1. Chaque côté est ensuite divisé en trois parties égales et on construit à partir du segment situé au milieu de chacun des côtés un nouveau triangle équilatéral à l'extérieur de P_1 . On obtient ainsi un polygone P_2 . En procédant de la même façon avec le polygone P_2 , on obtient le polygone P_3 , puis en réitérant le processus on construit une suite de polygones P_n .



Partie A : Étude des côtés

On considère la suite (C_n) donnant le nombre de côtés du polygone P_n pour tout entier naturel n non nul.

1. Déterminer une expression de C_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

3. Justifier que pour tout entier naturel n non nul tous les côtés de P_n sont égaux.

Partie B : Étude du périmètre

On considère la suite (u_n) donnant la longueur du côté du polygone P_n pour tout entier naturel n non nul.

1. Déterminer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

On considère la suite (p_n) donnant le périmètre du polygone P_n pour tout entier naturel n non nul.

2. Déterminer une expression de p_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

3. Montrer que la limite de la suite (p_n) est égale à $+\infty$.

Partie C : Étude de l'aire

On considère la suite (A_n) donnant l'aire du polygone P_n pour tout entier naturel n non nul.

1. Calculer la hauteur du triangle P_1 et en déduire son aire $\mathcal{A}_1$.

2. Exprimer $\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n$ en fonction de C_n et u_{n+1} pour tout entier naturel n non nul.

3. En déduire une expression de $\mathcal{A}_n$ en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

4. Montrer que la limite de la suite $(\mathcal{A}_n)$ est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Point Histoire

Le flocon de von Koch a un périmètre qui tend vers l'infini et une aire qui converge vers une limite finie. C'est une structure fractale car il ne varie pas en changeant d'échelle.

C'est une des premières courbes fractales à avoir été décrites bien avant l'invention du terme « fractal » par

Benoît Mandelbrot en 1974. Le tracé des côtes maritimes, le système sanguin ou la répartition de la matière dans l'univers constituent des structures fractales.



127 PYTHON REPRÉSENTER CALCULER

Compléter et exécuter un programme. Étude d'un modèle discret d'évolution

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C. À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel. On note a_n la probabilité de l'événement A_n : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'événement B_n : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'événement C_n : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ». À l'étape $n=0$, le lapin est dans la galerie A. Puis pour tout entier naturel n , il réagit de la manière suivante pour passer à l'étape $n+1$:

- s'il se trouve dans la galerie A, la probabilité qu'il reste dans la galerie A est égale à $\frac{1}{3}$ sinon il passe dans la galerie B ;

- s'il se trouve dans la galerie B la probabilité qu'il reste dans la galerie B est égale à $\frac{1}{2}$ sinon les probabilités qu'il passe dans les galeries A ou C sont égales ;

- s'il se trouve dans la galerie C la probabilité qu'il reste dans la galerie C est égale à $\frac{1}{3}$ sinon il passe dans la galerie B.

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A : Étude algorithmique

1. À l'aide d'un arbre de probabilités, montrer que, pour tout entier naturel n , le système suivant permet de modéliser les déplacements du lapin :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

2. Compléter la fonction Python ci-contre pour que l'appel `lapin(n)` renvoie la liste des trois probabilités pour le lapin de se trouver respectivement dans la galerie A, B ou C à l'étape n .

```
def lapin(n):
    l = ...
    for i in range(...):
        a = ...; b = ...; c = ...
        l[i] = ...
    l[1] = ...
    l[2] = ...
    return l
```

3. Quelle conjecture peut-on émettre à propos de la position du lapin à long terme ?

Partie B : Étude mathématique

On définit la suite (u_n) , pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = a_n - c_n$$

1.a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison et son premier terme.

b. Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .

2. On définit la suite (v_n) , pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = b_n - \frac{4}{7}$$

a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_n + b_n + c_n = 1$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.

c. Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

3. En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \text{ et}$$

$$c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

Piste B. 1. a. : Exprimer u_{n+1} en fonction de a_{n+1} et b_{n+1} puis en fonction de a_n et b_n .

B. 2. b. : Exprimer v_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n puis isoler la quantité $a_n + c_n$.

TRAVAIL EN GROUPE

128 Les suites arithmético-géométriques

Soit (u_n) une suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b étant deux réels non nuls tels que $a \neq 1$).

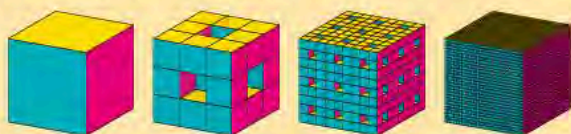
Montrer que si a appartient à l'intervalle $] -1; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$ et détailler votre démarche dans un exposé.

Prise d'initiatives

129 Éponges de Menger

On considère un cube d'arête 1. À chaque étape, on évide chaque cube de sept petits cubes.

À quelle étape le volume de l'éponge devient-il inférieur à la moitié du volume du cube initial ?



Étape 1

Étape 2

Étape 3

Étape 4

130 1. Vérifier que pour tout entier naturel non nul,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

Cette suite est-elle convergente ?

TP1 Approximation du nombre e



CHERCHER



MODÉLISER

A Factorielle d'un entier naturel

1. Compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle retourne $n!$ c'est-à-dire le nombre « factorielle n » défini pour tout entier naturel n non nul par $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ et $0! = 1$.

2. Que renvoient les appels `facto(1)`, `facto(2)` et `facto(3)` ?

```
def facto(n):
    P=...
    for i in range(...):
        P=...
    return(P)
```

B Étude mathématique

On considère la suite (e_n) définie pour tout entier naturel n par $e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

1. Exprimer, pour tout entier naturel n , e_{n+1} en fonction de e_n .

2. En utilisant la fonction `facto` précédente, compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle retourne la liste des $n+1$ premiers termes de la suite (e_n) .

3. a. Que renvoie l'appel `serie(20)` ?

b. Émettre une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite (e_n) .

4. Montrer que la suite (e_n) est croissante.

5. a. Montrer que pour tout entier naturel k : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

b. Soit n un entier naturel.

Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k-1}}$. En déduire que la suite (e_n) est majorée.

c. Que peut-on déduire pour la convergence de la suite (e_n) ?

On note e la limite de la suite (e_n) .

```
def serie(n):
    L=[...]
    for i in range(...):
        ...
    return (L)
```

Point Histoire



C'est Léonard Euler (mathématicien suisse, 1707-1783) qui, en 1731 introduisit la notation e pour cette constante. Il s'agit du même nombre e qui définit la fonction exponentielle vue en Première.

C Utilisation d'un tableur et encadrement de e

On définit, pour tout entier naturel non nul n , la suite (u_n) par $u_n = e_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $n \times n! \geq n$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge également vers e .

2. a. Déterminer une relation entre $(n+1)!$ et $n!$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $e_n < e \leq u_n$.

c. Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3, C3 et D3 de la feuille de calcul ci-dessous pour obtenir, par recopie vers les bas, les termes des suites (e_n) , (u_n) et $(u_n - e_n)$?

Indication : Pour calculer $n!$, utiliser la fonction **FACT** du tableur.

	A	B	C	D
1	n	e_n	u_n	$u_n - e_n$
2	0	1		
3	1	2	3	1
4	2	2,5	2,75	0,25

d. Combien faut-il calculer, au minimum, de termes de la suite (u_n) pour obtenir une valeur approchée de e à 10^{-5} près ? et à 10^{-9} près ?

LE SAVIEZ-VOUS

La suite (e_n) s'exprime sous la forme d'une somme finie de termes.

On appelle ce type de suite une **série** et lorsqu'elle converge on appelle sa limite la **somme** de la série.

Comme pour les suites, il existe des séries convergentes et des séries divergentes. Le fait qu'il existe des séries convergentes peut paraître paradoxal car cela revient à dire qu'une **somme infinie** de termes peut tendre vers une **limite finie**.

La notion mathématique de série est très riche et a de multiples applications en probabilités, calcul intégral, etc.

TP2 Approximation du nombre d'or φ



Le nombre d'or est source à la fois de fantasmes et de mystère depuis l'Antiquité. Il se retrouve bien sûr de manière volontaire dans de nombreuses œuvres d'art (peinture, sculpture et même musique) ou pièces d'architecture comme ci-contre avec la façade du Parthénon d'Athènes.

Mais on peut aussi observer sa manifestation dans la croissance de certains animaux et végétaux (coquilles d'escargot, fleur de tournesol, ...) et surtout partout où on veut bien le trouver.



A Étude algébrique

1. Montrer que si x vérifie les égalités $x = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ alors x vérifie l'égalité $x^2 - x - 1 = 0$.
2. a. Résoudre cette équation. On appelle « nombre d'or » et on note φ la solution positive.
b. En donner un encadrement à 10^{-3} près à l'aide de la calculatrice.
3. Vérifier que $\varphi > 1$, $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ et $\varphi = \sqrt{1 + \varphi}$.

B Étude avec un tableur et étude mathématique

On considère la suite définie par $\varphi_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $\varphi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\varphi_n}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\varphi_n > 0$.
2. À l'aide d'un tableur, calculer les 20 premiers termes de la suite.
3. Émettre une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite (φ_n) .
4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{3}{2} \leq \varphi_n \leq 2$.
5. a. En utilisant la question A.3., montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\varphi_{n+1} - \varphi = \frac{\varphi - \varphi_n}{\varphi_n \varphi} \text{ puis que } |\varphi_{n+1} - \varphi| = \frac{|\varphi_n - \varphi|}{\varphi_n \varphi}.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $|\varphi_{n+1} - \varphi| \leq \frac{|\varphi_n - \varphi|}{\varphi_n}$.
 - c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $|\varphi_{n+1} - \varphi| \leq \frac{2}{3} |\varphi_n - \varphi|$.
6. En déduire, par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $|\varphi_n - \varphi| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |\varphi_1 - \varphi|$.
 7. Montrer que la suite (φ_n) converge et déterminer sa limite.

C Valeurs approchées de φ

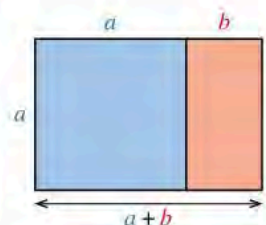
1. Compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle retourne une valeur approchée de φ à une précision p donnée et le nombre minimum d'itérations nécessaires pour l'obtenir.
2. Justifier que le programme complété se termine.
3. a. Donner une valeur approchée de φ à 10^{-3} et à 10^{-9} près.
b. La première valeur approchée obtenue est-elle cohérente avec l'encadrement donné par la calculatrice en A.2. ?

```
gold_1.py 003/010
def gold(p):
    phi = ...; n = ...
    while ... > p:
        ...
    return (phi, n)
```

Point Histoire



Euclide (III^e siècle avant J.-C.) définit dans ses célèbres *Éléments*, le nombre d'or comme étant l'unique rapport entre deux longueurs telles que le rapport de la somme des deux longueurs sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite.



Question

Comment les mathématiques peuvent-elles aider à modéliser le refroidissement d'un corps ?

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 89, 128

Enjeu de la question

Le problème de l'évolution de la température d'un corps est un problème physique important. Les applications en météorologie, résistance des matériaux, astrophysique sont nombreuses. La loi de Newton fournit une modélisation mathématique de ce problème.



Plan possible

1. Les modèles d'évolution, discrets ou continus
2. Le modèle de Newton discret
3. Le modèle de Newton continu
4. Ouverture : comment modifier les modèles précédents lorsque la température du milieu environnant évolue dans le temps ?
5. Conclusion (limites des modèles et avantages)

Les mots-clés

Modèle continu • Modèle discret • Suites
• Limites • Fonction exponentielle • Équations différentielles

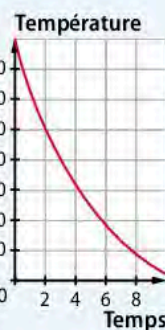
Support de présentation possible

- Dans le cas **discret**, Newton suppose que le **taux d'évolution** de la température d'un corps est **proportionnel** à la différence de température de ce corps et de celle du milieu environnant. La suite (T_n) telle que :

$$T_0 = 80 \text{ et } T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$$

pour tout entier naturel n , modélise la température relevée chaque minute d'un corps dont la température initiale est de 80°C et que l'on plonge dans un milieu dont la température est égale à 10°C .

- Dans le cas **continu**, c'est la **vitesse de refroidissement** qui est **proportionnelle** à la différence de température de ce corps et celle du milieu environnant. Pour le problème ci-dessus, si $\theta(t)$ est la température du corps à l'instant t exprimé en minutes, alors la fonction θ vérifie l'équation différentielle $\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - 10)$.



Questions d'approfondissement possibles

Présenter ce que vous savez sur les suites géométriques.

Déterminer la suite (T_n) définie par $T_0 = 80$ et la relation : $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$ pour tout entier naturel n .

Comment résout-on une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$?

Quelle est la différence entre un modèle continu et un modèle discret ?

Poursuite d'études et projet professionnel

• Pourquoi étudier les suites ?

De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou socio-économiques sont modélisables par des suites.

• Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude des suites est approfondie dans quasiment toutes les formations de l'enseignement supérieur : DUT ou BTS à dominante économique ou scientifique, licences d'économie-gestion, licences scientifiques, CPGE, écoles d'ingénieur, écoles de commerces.

• Un exemple de métier ?

Un(e) **géotechnicien(ne)** teste la résistance des sols et des sous-sols avant la construction d'un bâtiment pour prévenir les risques d'écroulement dus aux glissements de sol. Sur le terrain, il(elle) creuse le sol pour mesurer la quantité d'eau dans la terre ou sa résistance à l'écrasement.

Cette page fait le point sur les capacités relatives au tableur, liées à ce chapitre, qui peuvent être demandées au Bac.

UN EXEMPLE

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4} \right) u_n.$$

On définit pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = (n+1)u_n$.

La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n) , arrondies au cent-millième.

D'après Bac S, Asie, 2017.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,00000	1,00000
3	1	0,25000	0,50000
4	2	0,08333	0,25000
5	3	0,03125	0,12500
6	4	0,01250	0,06250
7	5	0,00521	0,03125
8	6	0,00223	0,01563
9	7	0,00098	0,00781
10	8	0,00043	0,00391
11	9	0,00020	0,00195

Fichier Tableur

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

LES QUESTIONS QUI PEUVENT ÊTRE POSÉES LE JOUR DU BAC

RÉPONSES

Déterminer une formule obtenue par recopie

1. Quelle formule, recopiée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de la suite (u_n) ?

1. Dans B3, on veut $u_1 = u_{0+1} = \left(\frac{0+1}{2 \times 0 + 4} \right) u_0$.

On identifie les cellules de référence : la colonne A contient les entiers naturels à partir de la cellule A2 et la cellule B2 contient le terme u_0 . On écrit donc dans la cellule B3 la formule suivante :

`= (A2+1)/(2*A2+4)*B2`.

Choisir une formule parmi plusieurs formules

2. Parmi les formules suivantes, quelle(s) formule(s), recopiée(s) ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule C2 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (v_n) ?

- a. `= (A2+1)*B2`
- b. `= ($A2+1)*B2`
- c. `= ($A$2+1)*$B2`
- d. `= (n+1)*B2`

2. Dans la cellule C2 on calcule le nombre v_0 et $v_0 = (0+1)u_0$. La cellule A2 contient l'entier 0 et u_0 est contenu dans la cellule B2. La formule `= (A2+1)*B2` convient puisqu'elle se recopie en `= (A3+1)*B3`, puis en `= (A4+1)*B4`...

La recopie se faisant vers le bas, la référence absolue indiquée par le symbole \$ placé avant le numéro d'une colonne n'a aucune incidence. La formule `= ($A2+1)*B2` convient donc également.

La formule `= ($A$2+1)*$B2` ne convient pas. Cette formule se recopie en `= ($A$2+1)*$B3` ce qui permet de calculer dans C3 le nombre $(0+1)u_1$ qui n'est pas égal à v_1 .

Enfin, `= (n+1)*B2` ne convient pas car « n » n'est pas reconnu.

Déterminer un résultat donné par le tableur

3. On saisit la formule `=SI(C2<0,001;A9;" ")` dans la cellule D2, puis on recopie cette formule vers le bas. Quelle valeur est alors affichée dans la cellule D9 ?

3. La formule est recopiée dans la cellule D9 en `=SI(C9<0,001;A9;" ")`.

La valeur affichée dans la cellule C9 est 0,000 98. Cette valeur est inférieure à 0,001, donc le test de la formule est vrai : c'est donc le contenu de la cellule A9 qui est affichée dans la cellule D9, c'est-à-dire 7.

Cette page fait le point sur les capacités relatives à l'algorithmique et à la programmation, liées à ce chapitre, qui peuvent être demandées au Bac.

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

UN EXEMPLE

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}$.

On admet que, pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

On donne les trois fonctions Python ci-dessous.

```
def algo_1(n):
    U=[]
    for i in range(...):
        ...
    return U
```

```
def algo_2(n):
    U=[1/2]
    i=0
    while len(U)!=n:
        U.append(2*U[i]/(1+U[i]))
        i=i+1
    return(U)
```

```
def algo_3(n):
    u=1/2
    L=[u]
    for i in range(n):
        u=2*u/(1+u)
        L.append(u)
    return L
```

D'après Bac S, Antilles-Guyane, 2019.

LES QUESTIONS QUI PEUVENT
ÊTRE POSÉES LE JOUR DU BAC

RÉPONSES

Compléter un programme

1. Compléter la fonction `algo_1` pour que la liste retournée contienne les n premiers termes de la suite (u_n) .

1. La liste `U` est vide au départ. Pour construire la liste des n premiers termes de la suite (u_n) on complète donc la ligne 3 par `range(n)` qui permet d'effectuer n itérations.
On ne peut pas utiliser l'expression par récurrence de la suite pour construire la liste par ajouts successifs car la liste `U` n'est pas initialisée. On utilise donc la formule explicite du terme u_n et on écrit l'instruction `U.append(2**i/(1+2**i))` à la ligne 4.

Justifier qu'un programme se termine

2. a. Pourquoi est-on certain que le programme de la fonction `algo_2` va s'arrêter ?

2. a. `len(U)` désigne la longueur de la liste `U`. La condition `len(U) != n` de la boucle `while` signifie que cette boucle est parcourue tant que la longueur de `U` est différente de n . Comme à chaque étape de la boucle on ajoute un élément à la liste `U`, on est sûr que le test deviendra faux après un nombre fini d'étapes. Le programme s'arrêtera alors.

Comprendre un programme

b. Quel est le rôle de la fonction `algo_2` ?

b. Avant la boucle, la liste `U` contient uniquement l'élément $u_0 = \frac{1}{2}$ et la variable `i` est initialisée à 0.

À chaque étape de la boucle, on ajoute à la liste `U`, le terme d'indice $i+1$ que l'on calcule avec la formule de récurrence. La variable `i` est incrémentée de 1, sa valeur est donc celle de l'indice du terme calculé à la ligne 5.

La boucle `while` est parcourue tant que la longueur de la liste `U` est différente de n : la fonction `algo_2` retourne donc la liste des n premiers termes de la suite (u_n) .

Exécuter un programme

3. Quelle liste est retournée lors de l'appel `algo_3(3)` ?

3. L'appel `algo_3(3)` renvoie la liste des quatre premiers termes de la suite (u_n) car il y aura 3 itérations dans la boucle et la liste est initialisée à 0,5 qui est la valeur de u_0 . Le deuxième terme est obtenu en calculant $\frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$ qui est égal à $\frac{2}{3}$, le troisième en calculant $\frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}}$ qui est égal à $\frac{4}{5}$ et le quatrième en calculant $\frac{2 \times \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}$ qui est égal à $\frac{8}{9}$. La liste retournée est donc la liste suivante :

[0.5, 0.6666666666666666, 0.8, 0.8888888888888889]

THÈMES

- Limites de suites usuelles et géométriques
- Définitions de la limite d'une suite et recherche de seuil
- Théorème des gendarmes

ÉNONCÉ ALGO RAISONNER CALCULER

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

- la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
- la suite (v_n) est définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2^n$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3. Expliquer pourquoi le programme Python ci-contre se termine et ce que renvoie l'appel `algo(6)`.

4. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

```
1 def algo(p):
2     u=1
3     n=0
4     while u<=10**p:
5         u=2*u-n+3
6         n=n+1
7     return n
```

D'après Bac S, Pondichéry, Avril 2017

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ
ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. On fait un raisonnement par récurrence en utilisant la définition par récurrence de la suite (u_n) .

Capacité 9, p. 136

2. On utilise la règle sur la limite d'une somme pour déterminer la limite de (u_n) .

Capacité 3, p. 131

Pour déterminer la limite de q^n , on compare q à 1.

Capacité 6, p. 133

3. On utilise la définition de la limite d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Capacité 1, p. 129

On reconnaît un algorithme de recherche de seuil.

Capacité 2, p. 129

4. On écrit le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ sous forme d'une somme. Pour déterminer la limite d'un des termes de cette somme on utilise le théorème des gendarmes.

Capacités 3, 5 et 6, pp. 131-133

SOLUTION COMMENTÉE

1. Soit un entier naturel n et la propriété $P(n)$: $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + (n+1) - 2$.

On a : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$ donc $u_{n+1} = 2(3 \times 2^n + n - 2) - n + 3$.

$u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 = 3 \times 2^{n+1} + n - 1$

Donc $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + (n+1) - 2$ et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ pour tout entier naturel n .

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 2^n = +\infty$ car il s'agit du terme général d'une suite géométrique de raison $q=2$ avec $q > 1$. Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 2 = +\infty$.

D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Donc tout intervalle du type $]A; +\infty[$ contient tous les

termes de la suite à partir d'un certain rang. On est donc certain de la réalisation de la condition d'arrêt de la boucle « while ».

L'appel `algo(6)` renvoie donc le rang du premier terme strictement supérieur à un million. Ce rang est égal à 19.

4. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4,

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

D'autre part d'après le théorème des gendarmes et l'inégalité admise on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0 \text{ puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ De plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Donc d'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3$.

Sujet A ⌚ 40 min



MODÉLISER



RAISONNER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Probabilités conditionnelles

- Suites
- Limites de suites

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacité 10 p. 137

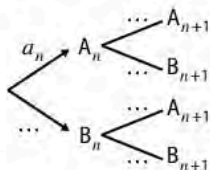
Question 4. ► Capacité 6 p. 133

Stream est une plateforme informatique qui propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B. Dès que le joueur achève une partie, Stream lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- s'il vient de terminer une partie de type A, elle lui propose une nouvelle partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
 - s'il vient de terminer une partie de type B, elle lui propose une nouvelle partie de type B avec une probabilité de 0,7.
- Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements « la n -ième partie est de type A » et « la n -ième partie est de type B ».

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on appelle a_n la probabilité de l'événement A_n et b_n , la probabilité de l'événement B_n .

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

On note a la probabilité que le joueur choisisse une partie de type A lors de la première partie, où a est un réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = a_n - 0,6$ est géométrique.

3. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $a_n = (a - 0,6)0,5^{n-1} + 0,6$.

4. Déterminer la limite de la suite (a_n) . Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?

Sujet B ⌚ 50 min



PYTHON



REPRÉSENTER



CHERCHER

THÈMES • Suites auxiliaires

- Théorème de comparaison
- Suites bornées et théorème de convergence monotone.

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 2. c. ► Capacité 7 p. 135

Question 4. b. ► Capacité 5 p. 133

Le but de ce problème est d'étudier les suites à termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel n strictement positif, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc les propriétés suivantes :

- $u_0 > 1$;
- pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$;
- pour tout $n \geq 0$, $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$

1. On choisit $u_0 = 3$. Calculer u_1 et u_2 .

2. Pour tout entier $n > 0$, on note :

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$$

On a en particulier : $s_1 = u_0$.

- a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

- b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$.

- c. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 1$.

3. La fonction Python ci-dessous doit retourner le terme u_n pour une valeur de n donnée.

```
def algo(n,u):
    u=3
    s=u
    for i in range(...):
        u=...
        s=...
    return (u)
```

- a. Compléter le programme.

- b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millièm de u_n pour différentes valeurs de l'entier n .

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Justifier que pour tout entier n strictement positif $s_n > n$.

- b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .

Sujet C ⌚ 35 min

PYTHON

CALCULER

COMMUNIQUER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Suites géométriques

- Monotonie
- Limites de suites usuelles
- Théorème des gendarmes

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 3. ► Capacité 2 p. 129

Question 4. ► Capacités 3 et 5 pp. 131-133

Question 5. ► Capacités 3 et 6 pp. 131-133

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. On considère une suite (u_n) convergente.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est croissante et majorée ou la suite (u_n) est décroissante et minorée.

2. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n , par : $p_n = n^2 - 42n + 4$.

Affirmation 2 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $0,8^n$.

Affirmation 3 : Pour obtenir le premier entier n_0 tel que $0,8^n < 0,01$ on complète la ligne 3 du programme ci-dessous par $0,8**n \geq 0,01$.

```
def seuil():
    n=0
    while...:
        n=n+1
    return(n)
```

4. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n : $n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n$.

Affirmation 4 : La suite (w_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + n^2}$.

Affirmation 5 : La suite (u_n) n'a pas de limite.

Sujet D 40 min

TABLEUR CALCULER REPRÉSENTER

THÈMES • Raisonnement par récurrence

- Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$
- Théorème de convergence monotone

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 4. ► Capacité 9 p. 136

Question 5. ► Capacité 8 p. 135

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer u_1 .

2. On a calculé avec un tableur les premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	3,00000
3	1	1,57143
4	2	1,20513
5	3	1,07882
6	4	1,03104
7	5	1,01234
8	6	1,00492
9	7	1,00197
10	8	1,00079
11	9	1,00031

a. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour obtenir par recopie vers le bas les termes de la suite (u_n) ?

b. Conjecturer la nature de la suite (u_n) et la valeur de son éventuelle limite.

3. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3,$$

5. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Sujet E 40 min

ALGO MODÉLISER CALCULER

THÈMES • Suites auxiliaires

• Utiliser des suites géométriques

• Théorème de convergence monotone

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 2b. ► Capacité 7 p. 135

Question 2c. ► Capacité 8 p. 135

Question 3. ► Capacité 6 p. 133

Soit deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A : modélisation algorithmique

On considère l'algorithme ci-dessous.

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.

Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

```
K ← 0
U ← 2
V ← 10
Tant que K < N
    K ← K + 1
    W ← U
    U ← (2U + V) / 3
    V ← (W + 3V) / 4
Fin Tant que
```

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B : étude mathématique

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n :

$$w_n = 8 \left(\frac{5}{12} \right)^n.$$

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b. Dédire des résultats des questions 1.b. et 2.a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.

c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. a. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

b. En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

► Déterminer la limite d'une suite

1 Dans chaque cas, calculer la limite de la suite de terme général u_n .

a. $u_n = n^2 + 2n + 6$

b. $u_n = 2 - n^2 - n^3$

c. $u_n = (1 - n)(2 + n)$

d. $u_n = \frac{1}{n+1}$

2 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) = 0$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

3 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier n supérieur à 1, $u_n \geq n - \frac{1}{n}$. La limite de (u_n) est égale à :

a. $+\infty$

b. $-\infty$

c. 0

2. Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n+1}$. La limite de (v_n) est égale à :

a. $+\infty$

b. $-\infty$

c. 0

► Comparer des expressions

4 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Soit, pour tout réel x différent de -1 , $A(x) = \frac{x}{x+1}$.

Pour tout réel x différent de -1 et de 0 , $A(x)$ est égal à :

a. $1 - \frac{1}{x+1}$

b. $1 + x$

c. $\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

2. Soit, pour tout réel x , $B(x) = e^{2x} - e^x$. Pour tout réel x , $B(x)$ est égal à :

a. $e^x (e^2 - 1)$

b. $e^x (e^x - 1)$

c. $e^{2x} (1 - e^{-x})$

5 Montrer que pour tout réel x positif, $\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$.

6 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. Il existe un réel x tel que $x \leq x^2$.

b. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

c. Pour tout réel x positif, $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+2}$.

c. Pour tout réel x négatif, $3x \geq 2x$.

► Dériver une fonction

7 Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f définie sur I . Calculer $f'(x)$.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ et $I = \mathbb{R}$

b. $f(x) = 3 + \frac{2}{x}$ et $I =]0 ; +\infty[$

c. $f(x) = 3 + 3\sqrt{x}$ et $I = [1 ; +\infty[$

d. $f(x) = 2 - 5e^x$ et $I = \mathbb{R}$

e. $f(x) = (5x + 1)^2$ et $I = \mathbb{R}$

f. $f(x) = e^{3x-1}$ et $I = \mathbb{R}$

8 Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$.

Montrer que pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$.

9 Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x .

LIMITES ET DÉRIVATION

CHAPITRE

5



Comme tout objet en chute libre dans l'atmosphère, les gouttes de pluie sont soumises à trois forces : la gravité qui les attire vers le sol, la résistance de l'air qui freine leur chute et la poussée d'Archimède qui est négligeable devant leur poids. Lors de la chute, la vitesse augmente d'abord fortement, puis de plus en plus faiblement pour se rapprocher d'une valeur limite.

LES NOTIONS DU CHAPITRE

- Limites d'une fonction
- Théorèmes généraux sur les limites
- Théorèmes de comparaison et croissances comparées
- Composée de deux fonctions et dérivée de la composée

Voir exercice 178 page 191



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 169, 171, 173, 175
Animation	p. 172
Corrigés détaillés	pp. 186, 187, 196, 197

Activité 1

Objectif

Introduire la notion de limite.

Cours 1

Limites d'une fonction et asymptotes

Point Histoire



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

L'extrait vient de *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, tome 4, publiées sous la direction de l'Académie des sciences (1882-1974).

Émergence de la notion de limite

Au début du xvi^e siècle, des techniques utilisant les quantités infiniment petites sont mises au point pour résoudre des problèmes de vitesse instantanée, de tangente, de longueur d'une courbe, de *maxima* et de *minima*... Mais il faut attendre le xix^e siècle pour que les bases rigoureuses de l'analyse soient posées, notamment par **Augustin-Louis Cauchy**.

Voici un extrait de ses cours pour les élèves de l'École royale polytechnique.

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus, etc. [...]

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'*infini positif*, indiqué par le signe ∞ , s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif* indiqué par la notation $-\infty$, s'il s'agit d'une variable négative.

- 1 a. Que définit Cauchy dans le premier paragraphe ?
b. Que signifie la citation suivante : « s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra... » ?
- 2 a. Que définit Cauchy dans le second paragraphe ?
b. Que signifie la citation suivante : « croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné... » ?
- 3 Associer les définitions de Cauchy aux définitions données dans le cours et les comparer.

Activité 2

Objectif

Introduire les notions de limite en un point et de limite en $+\infty$.

Cours 1

Limites d'une fonction et asymptotes

Fichier GeoGebra/ Cabri

Disponible sur lycee.editions-bordas.fr

GÉOMÉTRIE Un triangle animé

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ})$, on considère les points $A(1 ; 2)$ et $H(0 ; 2)$. M est un point de l'axe des abscisses, d'abscisse x strictement supérieure à 1 et P est le point d'intersection de la droite (AM) et de l'axe des ordonnées.

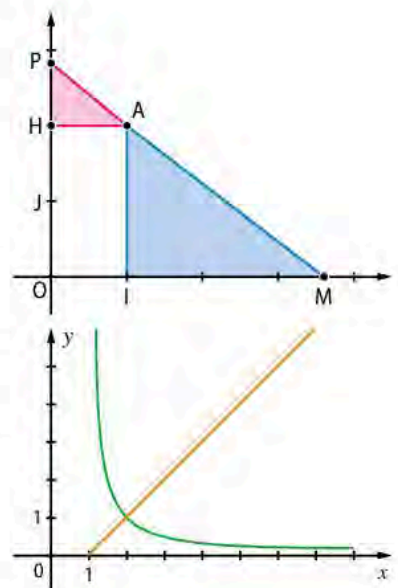
On considère les fonctions f et g qui, à tout réel x de l'intervalle $]1 ; +\infty[$, associent respectivement l'aire du triangle AIM et l'aire du triangle HAP .

À l'aide d'un logiciel de géométrie, en déplaçant le point M , on construit les courbes représentatives des fonctions f et g .

- 1 a. En observant l'évolution de l'aire du triangle HAP lorsque le point M s'approche du point I , reconnaître parmi les deux courbes, celle qui représente la fonction g .
b. On déplace maintenant le point M de sorte que son abscisse prenne des valeurs de plus en plus grandes. Comment évolue l'aire du triangle HAP lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2 On admet que, pour tout réel x de $]1 ; +\infty[$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

- a. Construire un tableau de valeurs pour la fonction g , en partant de $x = 1,1$ avec un pas de $-0,01$.
- b. Que peut-on dire de $g(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 1 ?
- c. Construire un tableau de valeurs pour la fonction g , en partant de $x = 10$ avec un pas de 10.
- d. Que peut-on dire de $g(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?



Activité 3

Limites en 0 des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Objectif

Introduire les limites en 0 des fonctions de référence.

Cours 2

Limites : somme et produit

Soit f et g les fonctions définies sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

1 a. On se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Dans le tableau de valeurs de $f(x)$ ci-dessous, x prend des valeurs de plus en plus proches de 0, en étant supérieures à 0.

Recopier et compléter ce tableau.

x	0,1	0,01	0,001	0,000 1	0,000 01
$f(x)$					

b. Comment évolue alors $f(x)$?

c. En utilisant le tableau, déterminer comment choisir x pour que $f(x) > 10\,000$.

d. En résolvant une inéquation, déterminer comment choisir x pour que $f(x) > 10^7$.

2 Soit A un réel strictement positif.

a. Comment doit-on choisir x pour que $f(x) > A$?

b. Que peut-on en déduire quant à la limite de f lorsque x tend vers 0, en étant strictement supérieur à 0 ?

3 a. Construire un tableau de valeurs de $g(x)$ analogue à celui de la question 1.

b. Faire une conjecture sur la limite de g lorsque x tend vers 0, en étant strictement supérieur à 0.

4 En utilisant la calculatrice, faire une conjecture sur la limite : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x)$.

Activité 4

Enchaîner des fonctions

Partie A

On considère les fonctions u et f définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 - 0,5x$ et $f(x) = (1 - 0,5x)^2$.

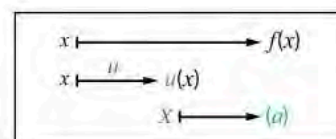
1 Calculer $u(1)$ et en déduire $f(1)$.

2 a. Comment calcule-t-on $f(x)$ à partir de $u(x)$?

b. On note $X = u(x)$. Exprimer $f(x)$ en fonction de X .

c. Reproduire le schéma ci-contre et remplacer (a) par une expression en fonction de X .

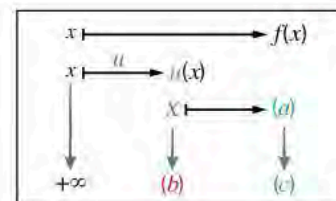
On dit que f est la **fonction composée** de u suivie de la fonction carré.



3 a. On veut déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Compléter le schéma comme ci-contre avec les limites (b) et (c) .

b. Que peut-on dire de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

4 Déterminer de la même façon la limite de la fonction f en $-\infty$.



Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{3-x}$.

1 g est la fonction composée d'une fonction k suivie de la fonction exponentielle. Donner l'expression de la fonction k .

2 a. Expliquer, en vous aidant éventuellement d'un schéma analogue à celui de la partie A, pourquoi la limite de la fonction g en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

b. Déterminer de même la limite de la fonction g en $+\infty$.

Objectif

Introduire la notion de fonction composée et sa limite.

Cours 3

Limites : quotient et composée

1. Limites d'une fonction et asymptotes

Dans ce chapitre, L, A, B, a, α et β sont des réels ; f, g, h, u et v sont des fonctions.

Limite finie ou infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

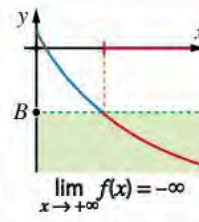
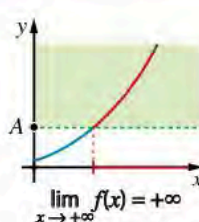
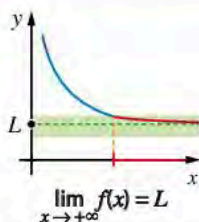
DÉFINITIONS Soit f étudiée sur un intervalle de la forme $[\alpha ; +\infty[$.

(1) On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à L si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.

On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

(2) On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(3) On dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty ; B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



On peut énoncer des définitions similaires pour les limites en $-\infty$: « dès que x est assez grand » est alors remplacé par « dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue ».

DÉFINITION On dit que la droite d'équation $y = L$ est une **asymptote** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$).

À noter

Ces définitions sont analogues à celles données pour les limites d'une suite numérique, « dès que x est assez grand » remplaçant « à partir d'un certain rang ».

À noter

On dit que cette droite est une asymptote « horizontale ».

Limite finie ou infinie en un réel a

DÉFINITIONS Soit f étudiée sur $[a - r ; a[$ ou sur $]a ; a + r]$, avec r un réel positif non nul.

(4) On dit que la limite de f en a est égale à L si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .

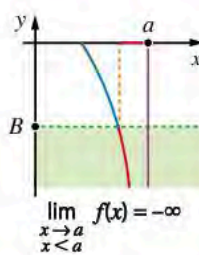
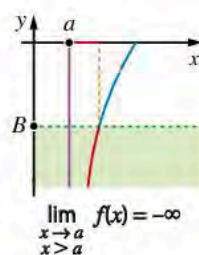
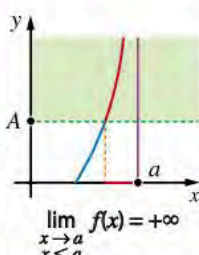
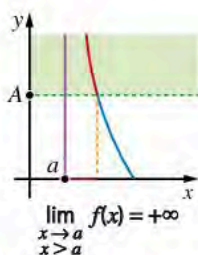
On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

(5) On dit que la limite de f en a est égale à $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

(6) On dit que la limite de f en a est égale à $-\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty ; B[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.



Notation

Lorsque x tend vers a par valeurs inférieures à a , on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$$

et on parle de limite à gauche en a .

Lorsque x tend vers a par valeurs supérieures à a , on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$$

et on parle de limite à droite en a .

À noter

On dit que cette droite est une asymptote « verticale ».

DÉFINITION On dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote** à la courbe représentative de f si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Interpréter des limites en l'infini

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Le tableau de variation de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	2	4	$+\infty$

- 1 Lire dans le tableau de variation les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2 Dédire de la question précédente l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- 3 Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x) > 100$ pour tout réel $x > x_0$?

Méthode

Pour déduire des limites d'une fonction l'existence d'asymptotes horizontales, on examine s'il y a des limites finies en l'infini.

Voir exercices

51 Pour s'entraîner

150 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- 1 On lit dans le tableau que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
- 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, et en particulier l'intervalle $]100; +\infty[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand. Cela signifie qu'il existe un réel x_0 tel que tous les nombres strictement supérieurs à x_0 ont une image par f strictement supérieure à 100.

Interpréter graphiquement des limites en un réel α

Soit f une fonction définie sur $] -1; 3[\cup] 3; 7]$ telle que :

- f est décroissante sur $] -1; 3[$ et sur $] 3; 7]$;
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ et $f(7) = 1$.

On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

- 1 Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 2 a. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, en donner une équation.
b. Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

Solution commentée

- 1

x	-1	3	7
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	1

- 2 a. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ donc la droite d_1 d'équation $x = -1$ est une asymptote

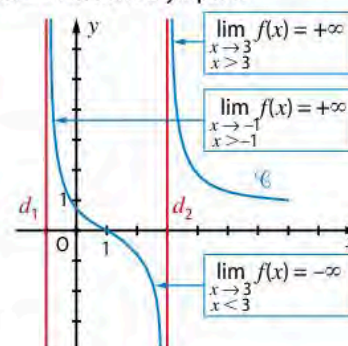
« verticale » à $\mathcal{C}_f$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ donc la

droite d_2 d'équation $x = 3$ est une asymptote

« verticale » à $\mathcal{C}_f$.

- b. On commence par tracer les deux asymptotes d_1 et d_2 . Puis, on peut tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ en prenant en compte les variations de la fonction f et ses limites en -1 et en 3 .



Méthode

Pour déduire des limites d'une fonction l'existence d'asymptotes verticales, on examine s'il y a des limites infinies en un réel.

Voir exercices

52 Pour s'entraîner

149 Pour travailler en autonomie

2. Limites : somme et produit

Limites des fonctions de référence

À noter

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$
 $x < 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$
 $x > 0$

À noter

- $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq 0$,
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ pour $a \geq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$

Fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$

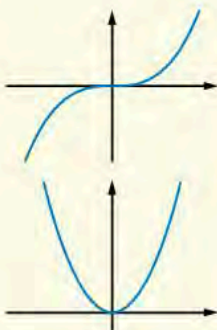
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

• Si n est impair :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

• Si n est pair :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$



Fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$

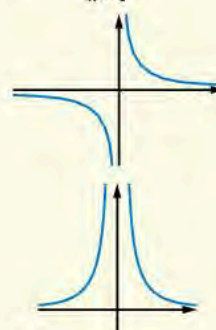
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

• Si n est impair :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

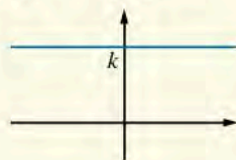
• Si n est pair :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$



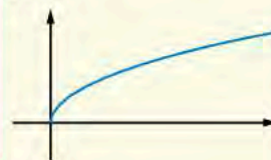
Fonction $x \mapsto k$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k = k; \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$$



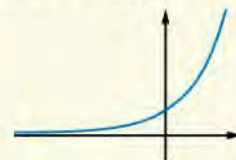
Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$



Fonction $x \mapsto e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



DÉMONSTRATION AU PROGRAMME Limite de la fonction exponentielle en $+\infty$

Puisque $e > 1$, la suite géométrique (e^n) a pour limite $+\infty$ (voir chapitre 4 page 124).
Donc, pour tout réel $A > 0$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$: $e^n > A$.
Pour x assez grand, $x \geq n_0$, d'où $e^x \geq e^{n_0}$ par croissance de la fonction exponentielle, et par suite $e^x > A$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Théorèmes généraux pour la somme et le produit

L et L' sont des réels et le réel a peut-être remplacé par $+\infty$ ou par $-\infty$.

À noter

Les théorèmes sont similaires à ceux énoncés pour les suites.

Vocabulaire

« Forme indéterminée » (F.I. dans les tableaux) signifie que l'on ne peut pas conclure directement.

RÈGLES POUR LA SOMME

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	L'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} (u(x) + v(x)) =$	$L + L'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

RÈGLES POUR LE PRODUIT

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	L	$L (L \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
alors $\lim_{x \rightarrow a} (u(x) \times v(x)) =$	$L \times L'$	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

(*) Le choix entre $+\infty$ ou $-\infty$ est déterminé par le signe de $u(x)$ et celui de $v(x)$.

EXEMPLE : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3) = -3$ donc par règle pour la somme
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3) = +\infty$; et par règle pour le produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2) = -\infty$.

Déterminer la limite d'une somme ou d'un produit

Calculer les limites suivantes.

- 1 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 9x^2 + 2)$ b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3 \right)$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 7x + 1)$
- 2 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (2 - x)$ b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 3) \left(2 - \frac{1}{x} \right)$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$

Méthode

Pour calculer une limite, on essaie d'abord d'utiliser les théorèmes généraux.

Solution commentée

1 On calcule la limite de chaque terme, puis on utilise les règles pour la somme.

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 = 7$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ donc par règle pour le produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-9) = -9$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ donc par règle pour le produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-9x^2) = -\infty$.
 Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 9x^2) = -\infty$.

Et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 9x^2 + 2) = -\infty$.

- b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (2x + 3) = 3$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3 \right) = -\infty$.

- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 7x + 1) = +\infty$.

2 On calcule la limite de chaque facteur, puis on utilise les règles pour le produit.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (2 - x) = -\infty$.

- b. $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 3) = -3$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$ } donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 3) \left(2 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$.

- c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x) = 2$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x) = 6$.

Voir exercices

56 Pour s'entraîner

145 Pour travailler en autonomie

Vidéo 09:25

Calculer la limite d'une fonction avec une forme indéterminée (1)



Déterminer les limites d'une fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x + 2$.Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution commentée

- Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x + 2) = +\infty$

donc par règle pour la somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x + 2) = -\infty$.

On est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » : on ne peut pas conclure.Pour calculer cette limite, il faut donc utiliser une autre expression de f .On factorise le polynôme $x^2 + 5x + 2$ par son terme de plus haut degré.Pour tout réel x non nul, $f(x) = x^2 + 5x + 2 = x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{2}{x^2} \right) = x^2 \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 = 5$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 \times \frac{1}{x} \right) = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 0$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 \times \frac{1}{x^2} \right) = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$.On en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 1$ } donc par règle pour le produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Voir exercices

64 Pour s'entraîner

147 Pour travailler en autonomie

3. Limites : quotient et composée

Théorèmes généraux pour le quotient

L et L' sont des réels et le réel a peut-être remplacé par $+\infty$ ou par $-\infty$.

À noter

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{u(x)} = \pm\infty.$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \pm\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{u(x)} = 0.$$

RÈGLES POUR LE QUOTIENT

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) =$	L	$L (L \neq 0)$	L	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} v(x) =$	L' ($L' \neq 0$)	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	0	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	F.I	

(*) : Le choix entre « $+\infty$ » et « $-\infty$ » est déterminé par le signe de $u(x)$ et celui de $v(x)$.

Pour déterminer les limites de l'inverse d'une fonction, on utilise les premières colonnes du tableau ci-dessus avec $u(x) = 1$ et donc $L = 1$.

EXEMPLE : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ et $g(x) = \frac{2 + e^x}{e^x}$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \text{ (car } e^x > 0) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + e^x}{e^x} = +\infty.$$

Notation

Comme $e^x > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

est aussi notée :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+.$$

Fonction composée

Certaines fonctions ne peuvent pas être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles. Une autre opération sur les fonctions existe : la **composition**.

EXEMPLE : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x}$.

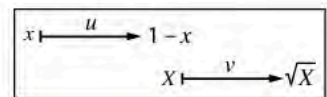
Pour calculer $f(x)$, on calcule d'abord $1 - x$, puis la racine carrée de ce réel.

f est l'enchaînement de deux fonctions :

u définie sur $]-\infty; 1]$ par $u(x) = 1 - x$

suivie de v définie sur $[0; +\infty[$ par $v(X) = \sqrt{X}$.

On a $f(x) = \sqrt{1 - x} = v(1 - x) = v(u(x))$.



DÉFINITION Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout réel x de I , $u(x)$ appartient à J .

La **fonction composée** u suivie de v est la fonction, notée $v \circ u$, définie sur I par :

$$v \circ u(x) = v(u(x)).$$

EXEMPLE : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x}$.

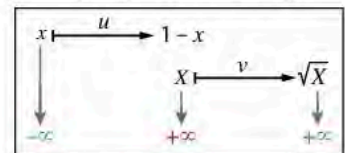
$f = v \circ u$ avec u définie sur $]-\infty; 1]$ par $u(x) = 1 - x$ et v définie sur $[0; +\infty[$ par $v(X) = \sqrt{X}$.

Limites d'une fonction composée

Pour calculer la limite en $-\infty$ de la fonction de l'exemple précédent, on procède de la façon suivante.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$



DÉMONSTRATION AU PROGRAMME Limite de la fonction exponentielle en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} \text{ (car } e^x = \frac{1}{e^{-x}}).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

$$\text{Par règle pour le quotient, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0, \text{ soit } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

CAPACITÉ

5

Déterminer la limite d'un quotient

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]4; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{-x+4} \text{ et } g(x) = \frac{3x}{-x+4}.$$

Calculer les limites des fonctions f et g en 4 et en $+\infty$.

Solution commentée

• **Limite de f en 4 :** $\lim_{x \rightarrow 4} (-x+4) = 0$. La limite de l'inverse sera donc infinie.Pour déterminer s'il s'agit de $-\infty$ ou de $+\infty$, on doit étudier le signe de $-x+4$ selon les valeurs de x .

x	$-\infty$	4	$+\infty$	
$-x + 4$		+	0	-

 $\lim_{x \rightarrow 4} (-x+4) = 0$ et pour $x > 4$, $-x+4 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 4} (-x+4) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$.

 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$ et pour $x < 4$, $-x+4 > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$.
• **Limite de g en 4 :**
 $\lim_{x \rightarrow 4} (3x) = 12$
 $\lim_{x \rightarrow 4} (-x+4) = 0^-$ donc par règle pour le quotient $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\infty$.

Limite de g en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+4) = -\infty$.
On est en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » : on ne peut pas conclure.On doit donc modifier l'expression de g . On peut factoriser le dénominateur par x , puis simplifier.

$$\text{Pour tout réel } x \text{ de }]4; +\infty[, g(x) = \frac{3x}{-x+4} = \frac{3x}{x(-1+\frac{4}{x})} = \frac{3}{-1+\frac{4}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{4}{x}\right) = -1$$
 donc par règle du quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3$.

Vidéo 08:40

Calculer la limite d'une fonction avec une forme indéterminée (2)



Conseil

Pour lever une indétermination de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ », on peut factoriser le numérateur par une expression bien choisie, ainsi que le dénominateur.

Voir exercices

73 Pour s'entraîner

151 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

6

Déterminer la limite d'une fonction composée

Soit g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2-3x}$ et $h(x) = (2-3x)^4$.1 Écrire la fonction g comme composée de deux fonctions puis déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.2 Calculer les limites de la fonction h en $-\infty$ et en $+\infty$.

Solution commentée

1 $g = v \circ u$ avec $u(x) = 2-3x$ et $v(X) = e^X$ • Limite de g en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

• Limite de g en $+\infty$:

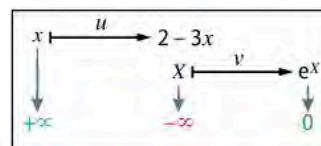
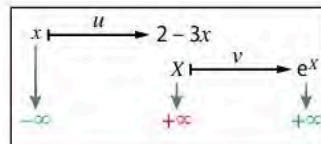
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-3x) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

2 $h(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = 2-3x$.Ainsi : $h = w \circ u$, avec $w(X) = X^4$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3x) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} X^4 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-3x) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} X^4 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$



Conseil

Pour déterminer la limite d'une fonction composée, on peut faire apparaître le schéma de l'enchaînement de deux fonctions.

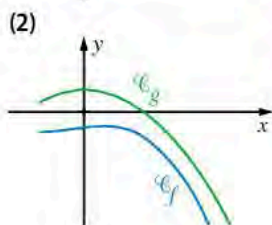
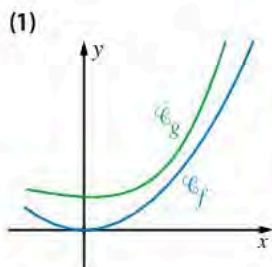
Voir exercices

91 Pour s'entraîner

152 Pour travailler en autonomie

4. Théorèmes de comparaison et croissances comparées

Théorèmes de comparaison



Les théorèmes sont énoncés avec les limites en $+\infty$, on pourrait également les énoncer quand x tend vers $-\infty$ (on remplacera $[\alpha; +\infty[$ par $]-\infty; \beta]$) ou quand x tend vers un réel a (on remplacera $[\alpha; +\infty[$ par $[a - r; a[$ ou $]a; a + r]$ où $r > 0$).

THÉORÈMES f, g et h sont définies sur un intervalle $I = [\alpha; +\infty[$.

(1) Si, pour tout réel x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

(2) Si, pour tout réel x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

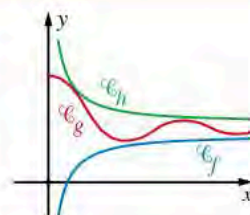
(3) **Théorème des gendarmes**

Si pour tout réel x de I , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$.

EXEMPLE : Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $2 - \frac{3}{x} \leq g(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{x}\right) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$.



Animation

Croissances comparées exp et x^n



À noter

On dit que l'exponentielle l'emporte sur les puissances entières.

À noter

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Croissances comparées

PROPRIÉTÉS Soit n un entier naturel non nul.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME Propriété (1)

• Pour $n = 1$

On commence par démontrer que pour tout réel x strictement positif : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $x \geq 0$, $g'(x) = e^x - x$.

La fonction g' est dérivable sur $[0; +\infty[$. On note g'' sa fonction dérivée.

Pour tout réel x positif, $g''(x) = e^x - 1$. Sur $[0; +\infty[$, $g''(x) \geq 0$ (car $e^x \geq 1$).

Donc g' est croissante sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel x de $[0; +\infty[$, $g'(x) \geq g'(0)$,

soit $g'(x) \geq 1$ et par suite $g'(x) > 0$. Donc la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, pour tout réel $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0)$, soit $g(x) \geq 1$ (car $g(0) = 1$), et par suite $g(x) > 0$.

On en déduit que, pour tout réel $x > 0$, $e^x > \frac{x^2}{2}$ et $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ (car $x > 0$).

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

• Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2

$$\text{Pour tout réel } x \text{ non nul, } \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)^n}{\left(\frac{x}{x}\right)^n} = \frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)^n}{\left(\frac{x}{n} \times \frac{n}{x}\right)^n} \text{ donc } \frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^x}{x}\right)^n.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et comme $\frac{1}{n} > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^x}{x}\right)^n = +\infty. \text{ De plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^x}{x}\right)^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Vidéo 05:42

Calculer une limite à l'aide d'un théorème de comparaison



Méthode

Lorsque l'on connaît l'encadrement d'une fonction par des fonctions dont les limites sont infinies, on commence par choisir l'inégalité qui permet d'appliquer les théorèmes de comparaison.

Voir exercices

104 Pour s'entraîner

153 Pour travailler en autonomie

Vidéo 07:32

Calculer une limite par croissance comparée



Méthode

En présence d'une forme indéterminée, on peut chercher à transformer l'expression de la fonction pour utiliser une limite connue.

Voir exercices

110 Pour s'entraîner

156 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

7

Utiliser les théorèmes de comparaison

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos(x)$.

1 Montrer que pour tout réel x , $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

2 a. Calculer la limite de f en $+\infty$. b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Solution commentée

1 Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $x - 1 \leq x + \cos(x) \leq x + 1$, soit $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

2 a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$.

L'inégalité $f(x) \leq x + 1$ ne permet pas de déterminer la limite de f en $+\infty$.

On peut en effet trouver des fonctions vérifiant cette inégalité et de limites différentes.

Par contre, l'inégalité $x - 1 \leq f(x)$ permet d'appliquer l'un des théorèmes de comparaison :

$x - 1 \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. On sait que pour tout réel x , $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

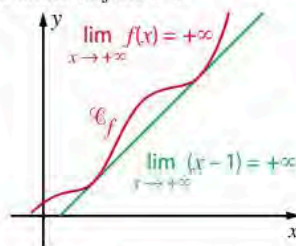
On doit diviser chaque membre de cet encadrement par x et donc se placer dans un intervalle où on connaît le signe de x .

Comme on cherche la limite en $+\infty$, on se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $\frac{x-1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x+1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.



CAPACITÉ

8

Utiliser les croissances comparées de x^n et e^x

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - xe^x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$

Solution commentée

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (par croissances comparées) donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - xe^x) = 2$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$: on est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On transforme l'expression $e^x - x$ en factorisant par x .

Pour $x \neq 0$, $e^x - x = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (par croissances comparées) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: on est en présence de la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». On transforme l'expression $(-x^2 + 1)e^x$ en la développant.

Pour tout réel x , $(-x^2 + 1)e^x = -x^2e^x + e^x$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2e^x + e^x) = 0$. D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x = 0$.

d. Pour $x \neq 0$, $\frac{e^{3x}}{x} = 3 \times \frac{e^{3x}}{3x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{3x} = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{3x} = +\infty$

et par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \times \frac{e^{3x}}{3x} \right) = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty$.

5. Compléments de dérivation

Dérivée de la composée

À noter

On peut écrire :
pour tout réel x de I ,
 $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

À noter

$v'(u(x))$ est l'image de $u(x)$ par la fonction v' .

Démonstration de cette propriété
Voir page 176

PROPRIÉTÉ (ADMISE) Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel x appartenant à I , $u(x)$ appartient à J . La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

PROPRIÉTÉ Soit n un entier non nul.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , et si lorsque n est strictement négatif, u ne s'annule pas sur I , alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

DÉMONSTRATION

La fonction u^n est la composée de la fonction u suivie de la fonction $v : X \mapsto X^n$.
Pour tout réel x de I , $(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ avec $v'(X) = nX^{n-1}$.
Donc $(v \circ u)'(x) = n(u(x))^{n-1}u'(x)$.

EXEMPLE : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 + x + 1)^3$.

$f = u^3$ avec $u(x) = 2x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 4x + 1$.

$f' = 3u'u^2$ donc pour tout réel x , $f'(x) = 3(4x + 1)(2x^2 + x + 1)^2$.

PROPRIÉTÉ Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

DÉMONSTRATION

La fonction $\sqrt{u}$ est la composée de la fonction u suivie de la fonction $v : X \mapsto \sqrt{X}$.
Pour tout réel x de I , $(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ avec $v'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$.
Donc $(v \circ u)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$.

EXEMPLE : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$.

$f = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 2x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 4x + 1$.

Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4x + 1}{2\sqrt{2x^2 + x + 1}}$.

PROPRIÉTÉ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

DÉMONSTRATION

La fonction e^u est la composée de la fonction u suivie de la fonction $v : X \mapsto e^X$.
Pour tout réel x de I , $(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ avec $v'(X) = e^X$.
Donc $(v \circ u)'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.

EXEMPLE : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x^2 + x + 1}$.

$f = e^u$ avec $u(x) = 2x^2 + x + 1$. Pour tout réel x , $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (4x + 1)e^{2x^2 + x + 1}$.

Dérivée seconde d'une fonction

À noter

En physique, lorsque $f(t)$ modélise la position d'un objet en fonction du temps, $f'(t)$ est la vitesse instantanée de cet objet à l'instant t , et $f''(t)$ est son accélération à l'instant t .

DÉFINITION Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' est dérivable sur I .

On appelle **dérivée seconde** de f sur I la fonction dérivée de f' , que l'on note f'' .

EXEMPLE : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f''(x) = 12x^2 - 18x + 2$.

Vidéo 04:41

Calculer la dérivée
d'une fonction
composée

CAPACITÉ

9

Calculer la dérivée d'une fonction

Calculer la dérivée des fonctions f , g , h et k dérivables sur $\mathbb{R}$ dont on donne l'expression :

$$\text{a. } f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5} \quad \text{b. } g(x) = (2x - 1)^4 \quad \text{c. } h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{d. } k(x) = e^{3x^2 + 1}$$

Solution commentée

a. $f = \sqrt{u}$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 3x + 5$.

$$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ avec } u'(x) = 2x + 3. \text{ Donc } f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 5}}.$$

b. $g = u^4$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 1$.

$$g' = 4u^3 u' \text{ avec } u'(x) = 2. \text{ Donc } g'(x) = 4 \times 2 (2x - 1)^3 = 8(2x - 1)^3.$$

c. $h = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$.

$$h' = -2u^{-3} u' = -2u' u^{-3} = \frac{-2u'}{u^3} \text{ avec } u'(x) = 2x.$$

$$\text{Donc } h'(x) = \frac{-2 \times 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^3}.$$

d. k est de la forme e^u où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 + 1$.

$$\text{Pour tout réel } x, k'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 6x e^{3x^2 + 1}.$$

Méthode

Pour calculer la dérivée d'une fonction de la forme $\frac{1}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on peut l'écrire sous la forme u^{-n} .

Voir exercices

123 Pour s'entraîner

158 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

10

Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- 1 Calculer pour tout réel x , $f'(x)$.
- 2 Calculer la limite de f en $-\infty$.
- 3 Calculer la limite de f en $+\infty$.
Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
- 4 Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Solution commentée

1 f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-2x}$.

$$\text{On a donc } f' = u'v + uv'.$$

$$\text{Ainsi, pour tout réel } x, f'(x) = e^{-2x} + x(-2e^{-2x}) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}.$$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \text{ donc par produit } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3 Pour tout réel x , $f(x) = xe^{-2x} = -\frac{1}{2}(-2xe^{-2x})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} Xe^X = 0 \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2xe^{-2x}) = 0.$$

$$\text{Par suite, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.4 On étudie le signe de $f'(x)$.

$$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (1 - 2x)e^{-2x}.$$

$$\text{Pour tout réel } x, e^{-2x} > 0 \text{ donc } f'(x)$$

$$\text{a le même signe que } 1 - 2x.$$

$$1 - 2x \geq 0 \text{ équivaut à } -2x \geq -1$$

$$\text{et donc à } x \leq \frac{-1}{-2}, \text{ soit } x \leq 0,5.$$

On en déduit le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	$0,5e^{-1}$	0

Conseil

Penser à faire apparaître la forme Xe^X pour une limite en $-\infty$.

Conseil

On peut vérifier le tableau à l'aide de la calculatrice.

Voir exercices

135 Pour s'entraîner

162 Pour travailler en autonomie

Étudier une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante sans utiliser la propriété du cours (admise) relative à la dérivée d'une fonction composée.

PROPRIÉTÉ DU COURS 5 PAGE 174 Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

Bon à savoir !

L'utilisation de la quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ peut permettre de simplifier un calcul où intervient une racine carrée.

On calcule la limite quand h tend vers 0 du taux de variation de la fonction $\sqrt{u}$ entre a et $a+h$ avec a un réel de I et h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I .

Ce taux de variation $t(h)$ est : $t(h) = \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h}$

$$t(h) = \frac{(\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}) \times (\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})}{h \times (\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})}$$

$$5 \quad \text{donc } t(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h \times (\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)})}$$

$$\text{soit } t(h) = \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

On calcule la limite de chaque facteur :

- $\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$ est le taux de variation de u entre a et $a+h$.

Sa limite quand h tend vers 0 est égale au nombre dérivé de u en a , soit $u'(a)$.

- 10 • Comme u est dérivable sur I , elle est continue sur I (voir chapitre 6 page 198),

donc $\lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) = u(a)$. On en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{u(a+h)} = \sqrt{u(a)}$.

$$\text{Et par suite, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} = \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}.$$

$$\text{Par conséquent } \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{u(a)}} \times u'(a).$$

Donc la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable en a et $(\sqrt{u})'(a) = \frac{1}{2\sqrt{u(a)}} \times u'(a)$.

- 15 Ceci étant vrai pour tout réel a de I , la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

QUESTIONS

1. Pourquoi doit-on modifier l'expression de $t(h)$ à la ligne 3 ?
2. Expliquer le résultat obtenu ligne 5.
3. Que cherche-t-on à faire apparaître ligne 6 ?
4. Expliquer la conclusion de la ligne 14.

Faire une démonstration

D1 Démontrer la propriété du cours 4 page 172 suivante.

« Pour tout entier naturel non nul n , on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$. »

Piste : On a calculé page 170 la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.

Procéder de façon similaire : faire apparaître $-x$ dans l'expression $x^n e^x$, puis utiliser une limite connue.

Calcul mental

1 Mettre sous forme de fraction irréductible.

1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ 2. $1 + 0,2$ 3. $0,1 \times 0,2$

2 Mettre sous forme décimale.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ 2. $\frac{3}{5} + 0,1$ 3. $10 \times \frac{1}{25}$

3 Simplifier.

1. $2\sqrt{3} + \sqrt{27}$ 2. $(2\sqrt{2})^2$ 3. $e \times (e^{-1})^2$ 4. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4 Calculer l'image de -1 par chacune des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x+1}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3)^3$.

5 Calculer la dérivée de chacune des fonctions f et g suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$.

2. g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

Automatismes

Évolutions et pourcentages

6 Dans une forêt, 65 % des arbres sont des feuillus et 40 % des feuillus sont des chênes.

Quelle est la proportion de chênes dans la forêt ?

7 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Augmenter une quantité de 30 % puis de 20 % revient à l'augmenter de 50 %.

2. Diminuer une quantité de 25 % puis l'augmenter de 20 % revient à la diminuer de 10 %.

8 En 2019, 41 600 exploitations agricoles sont engagées en bio, soit une croissance d'environ 13 % depuis 2017.

Combien y avait-il d'exploitations engagées en bio en 2017 ?

9 Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 60$. Calculer u_2 et u_{11} .

Géométrie

10 VRAI/FAUX

On se place dans un repère orthonormé du plan.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La droite passant par $A(1; 2)$ et $B(-1; 3)$ a pour équation : $x + 2y - 5 = 0$.

2. Les droites d'équations respectives $x + 2y - 1 = 0$ et $x - 2y + 1 = 0$ sont perpendiculaires.

11 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-1; 3)$, $B(-2; 1)$ et $C(1; 2)$.

Le point A appartient à :

a. la droite passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.

b. le cercle de centre O et de rayon 4.

c. la médiatrice du segment $[BC]$.

12 Question de méthodes

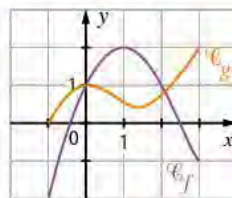
On se place dans un repère du plan.

Comment peut-on démontrer que trois points dont on connaît les coordonnées sont alignés ?

Lectures graphiques

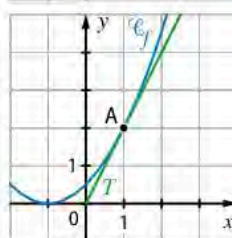
13 On donne les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-1; 3]$.

Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$?



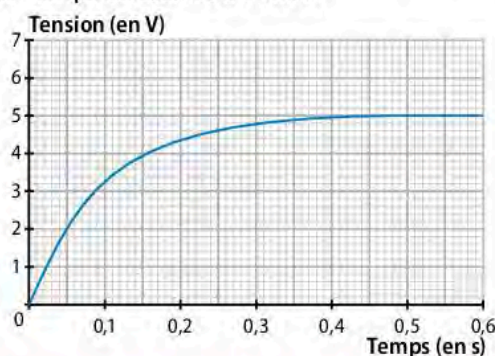
14 On a représenté la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Quelle est la valeur de $f'(1)$?



15 Le graphique suivant montre l'évolution de la tension mesurée aux bornes d'un condensateur en fonction du temps lorsqu'il est en charge.

Au bout de combien de temps la tension aux bornes du condensateur aura-t-elle atteint 60 % de la tension maximale qui est estimée à 5 Volts ?



Lorsque c'est nécessaire, le plan est muni d'un repère.

Limites et asymptotes

Question flash

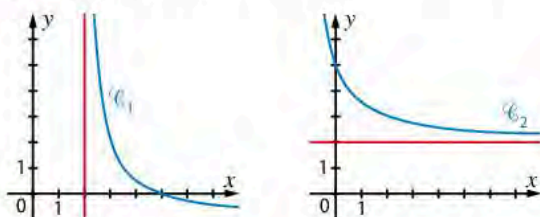
16 ORAL Soit f une fonction telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty.$$

Déduire de chacune de ces limites l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f et en donner une équation.

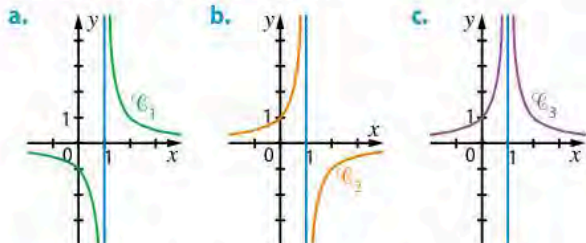
17 ORAL Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Parmi les courbes ci-dessous laquelle peut représenter la fonction f ? Expliquer ce choix.



18 ORAL Soit f une fonction telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

Parmi les courbes ci-dessous lesquelles peuvent représenter la fonction f ? Expliquer ce choix.



19 Soit f une fonction définie sur $]1; +\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On sait que : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

- Déduire de chaque limite l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ et en donner une équation.
- On sait de plus que f est croissante sur I . Tracer dans un repère, une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

20 Reprendre l'exercice 19 avec f définie sur $I =]-\infty; 3[$ et telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$.

21 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On donne le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	2

- Lire dans le tableau les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Limites d'une somme ou d'un produit

Questions flash

22 ORAL 1. Dans chaque cas, donner les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f dont on donne l'expression.

a. $f(x) = 3$ b. $f(x) = x$ c. $f(x) = x^2$ d. $f(x) = x^3$
 e. $f(x) = x^4$ f. $f(x) = e^x$ g. $f(x) = \frac{1}{x}$ h. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2. Quelles sont les limites en 0 (à gauche et à droite) des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$?

Pour les exercices 23 à 28, f et g sont des fonctions dont on donne l'expression.

Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f et g .

23 $f(x) = -100$ et $g(x) = 0,1x$

24 $f(x) = -7x$ et $g(x) = 5x^2$

25 $f(x) = 8 + 2x$ et $g(x) = -2 - 0,1x^2$

26 $f(x) = 6 - 5x^3$ et $g(x) = 8 + 21x^5$

27 $f(x) = 2e^x$ et $g(x) = 17 - 9e^x$

28 $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ et $g(x) = 3 - \frac{5}{x}$

Piste : Pour tout réel x non nul, $\frac{5}{x} = 5 \times \frac{1}{x}$.

29 Soit f , g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 1 + \frac{2}{x} \text{ et } h(x) = 1 - \frac{4}{x}.$$

Déterminer les limites des fonctions f , g et h en 0 à gauche et à droite.

30 Reprendre l'exercice 29 avec :

$$f(x) = 5 + \frac{1}{x^2}, g(x) = 2 + \frac{5}{x^2} \text{ et } h(x) = 2 - \frac{3}{x^2}.$$

31 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 1)$.
- En déduire la limite de f en $-\infty$.

32 ORAL Expliquer comment on obtient les résultats ci-dessous.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 5x + 1) = +\infty$ 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x + x + 7) = -\infty$

33 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + x^2)(3 - x)$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x^2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x)$.
- En déduire la limite de f en $+\infty$.

34 Justifier les résultats donnés ci-dessous.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1)(5 - e^x) = 5$ 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x) \sqrt{x} = +\infty$

Limites d'un quotient ou d'une fonction composée

Questions flash

- 35 ORAL** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$.

- 36** Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.
 Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{u(x)} = e$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = +\infty$.

- 37** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{2 + e^x}$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + e^x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + e^x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 38** Soit f la fonction définie sur $]7; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{7 - x}$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- a. Quel est le signe de $7 - x$ sur l'intervalle $]7; +\infty[$?
 b. Déterminer la limite de la fonction f en 7.

- 39** Soit u et v deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} v(x) = -\infty$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} v(u(x))$.

- 40** Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

- La fonction g est la composée de f suivie d'une fonction de référence. Quelle est cette fonction de référence ?
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

- 41** Soit f , g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = 6 - x$, $g(x) = (6 - x)^2$ et $h(x) = e^{6-x}$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
- Calculer la limite des fonctions f , g et h en $+\infty$.

Limites par comparaison et croissances comparées

Questions flash

- 42 QCM** Choisir la ou les bonnes réponses.
 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On sait que, pour tout réel x , $x + 1 \leq f(x)$.
 On peut déterminer :

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. On sait que, pour tout réel x , $f(x) \leq x + 2$.
 On peut déterminer :

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 43** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
 pour tout réel x , on a : $f(x) \leq x + 3$.
 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3)$. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

- 44** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
 pour tout réel x , $\frac{1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2 + 1}$.

- a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 1}$.
 b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.

- 45** 1. Rappeler les limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

- En déduire les limites :
 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 5)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{e^x}{x}\right)$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{e^x}{x}\right)$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{\sqrt{x}}\right)$

Fonction dérivée

Questions flash

- 46** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- f est de la forme $\sqrt{u}$. Donner l'expression de la fonction u .
- a. Donner l'expression de $(\sqrt{u})'$ en fonction de u et de u' .
 b. Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.

- 47** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

- f est de la forme e^u . Donner l'expression de la fonction u .
- a. Donner l'expression de $(e^u)'$ en fonction de u et de u' .
 b. Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.

- 48** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + 1)^2$.
 Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^x(e^x + 1)$.

- 49** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$.

- f est de la forme u^n avec $n = -3$.
 Donner l'expression de la fonction u .
- Donner l'expression de $(u^{-3})'$ en fonction de u et de u' .
 Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.

MATHS & PHYSIQUE

- 50** Un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante. La fonction f donnant la température du conducteur est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = -22e^{-0,05t} + 40$ où $f(t)$ est la température, exprimée en degré Celsius, du conducteur à l'instant t , exprimé en seconde.

- Montrer que pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $f'(t) = 1,1e^{-0,05t}$.
- Quel est le sens de variation de la fonction f ?
- a. Justifier que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,05t} = 0$.
 b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
- Interpréter ces résultats.

LE SAVIEZ-VOUS

L'effet Joule, du nom de James Prescott Joule (1818-1889), est un effet thermique qui se produit lors du passage du courant électrique dans un conducteur. Il se manifeste par une augmentation de la température du conducteur.



Lorsque c'est nécessaire, le plan est muni d'un repère.

Limites et asymptotes

51 Capacité 1, p. 167

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	2	7

1. Lire dans le tableau de variation les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .
3. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x) > 1\,000$ pour tout réel $x < x_0$?

52 Capacité 2, p. 167

Soit f une fonction définie sur $]-1; 2[\cup]2; 5]$ telle que :

- f est croissante sur $]-1; 2[$ et sur $]2; 5]$,
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ et $f(5) = 2$.

On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

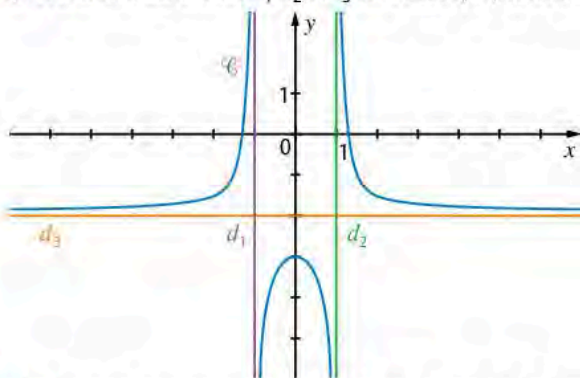
1. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
2. a. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, en donner une équation.
b. Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

53 On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	-3	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	2

1. Justifier que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet trois asymptotes. En donner une équation.
2. Tracer dans un repère une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

54 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Les droites d_1 , d_2 et d_3 sont des asymptotes à $\mathcal{C}$.



1. Par lecture graphique, conjecturer les limites de la fonction f en $-\infty$, en -1 (à gauche et à droite), en 1 (à gauche et à droite), et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

55 VRAI/FAUX

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative. Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, alors il existe un réel x_0 tel que $f(x) < -1\,000$ pour tout réel $x > x_0$.
2. Si f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Limites d'une somme ou d'un produit

Pour les exercices 56 à 62, calculer les limites données.

56 Capacité 3, p. 169

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + 3x + 4\sqrt{x})$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + x + 7)$
- 57 a. $\lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 3x - \frac{19}{x})$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} (4 - 3x + \frac{1}{x^2})$
- 58 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - 3)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x - 2e^x)$
- 59 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{2}x^2 - 5x\sqrt{x})$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)(\frac{1}{x} - 5)$
- 60 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x(-5 + \frac{2}{x}))$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(2 + \frac{3}{x^3})$
- 61 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 - 2e^x)(2 + e^x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-3)(5e^x - 1)$
- 62 a. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2e^x)(1 + \frac{2}{x})$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x)(1 - x)$

63 LOGIQUE f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et k est un réel.

1. La proposition suivante est-elle vraie ? Justifier.
« Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ alors pour tout réel x , $f(x) = k$. »
2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

64 Capacité 4, p. 169

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- 65 Reprendre l'exercice 64 avec les fonctions f suivantes.
a. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 8x + 11$.
b. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7x^2 + x - 1$.

- 66 Reprendre l'exercice 64 avec les fonctions f suivantes.

- a. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + xe^x$.
- b. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^3 + x^2 - x)(e^x - 1)$.

67 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)(x^2 + 2x + 6)$ 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3x\sqrt{x} + 1)$

- 68 Calculer les limites en $-\infty$ et en 0 de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^3 + 3x - 5}{x}$.

- 69 Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{10} + 10)^2 - 100}{x^{10}} = 20$.

Piste : Commencer par développer $(x^{10} + 10)^2$.

70 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.

 Il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 2.$$

 2. Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

 Il existe une fonction k définie sur $[1; +\infty[$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = 1.$$

71 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

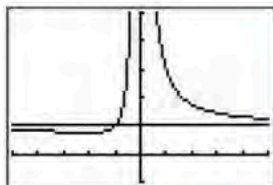
 1. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes.

 2. a. On a représenté $\mathcal{C}$ et son asymptote « horizontale » d sur une calculatrice.

 Conjecturer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à d .

 b. Étudier le signe de $f(x) - 1$ selon les valeurs de x .

c. Démontrer la conjecture faite dans la question 2.a.


72 PYTHON Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 - e^x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

 1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d parallèle à l'axe des abscisses.

 2. Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d ?

 3. Soit M un point de $\mathcal{C}_f$ et H le projeté orthogonal de M sur d . Quel est le rôle du programme ci-dessous ?

```
1 from math import*
2 def asympt():
3     x=0
4     d=1
5     while d>=0.001:
6         x=x-1
7         d=exp(x)
8     return(x)
```

Limites d'un quotient
73 Capacité 5, p. 171

 Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]-\infty; 2[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ et } g(x) = \frac{-7x}{x-2}.$$

 Calculer les limites des fonctions f et g en $-\infty$ et en 2.

74 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{e^x - 1}$.

 1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

 2. a. Étudier le signe de $e^x - 1$ sur $]0; +\infty[$.

 b. En déduire la limite de la fonction f en 0.

75 Soit f la fonction définie sur $[0; 3[\cup]3; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{7}{-x^2 + 9}.$$

 1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

 2. a. Étudier le signe de $-x^2 + 9$ selon les valeurs de x .

 b. Calculer la limite de la fonction f en 3 à gauche et à droite.

76 On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	3	0	$-\infty$

 Soit g définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

 1. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?

 En déduire les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

 2. a. Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

 b. En déduire les limites de g en 1 à gauche et à droite.

77 LOGIQUE

 La proposition suivante est-elle vraie pour tout réel k ?

 « Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$ alors pour tout réel x , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{k}$. »

78 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = 1$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$

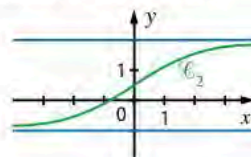
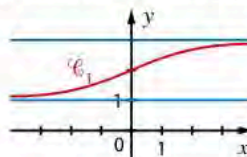
79 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{2}{1+e^x} \text{ et } g(x) = 2 - \frac{3}{1+e^x}.$$

 1. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On a représenté ci-dessous les courbes représentatives de ces fonctions ainsi que leurs asymptotes (en bleu).

Associer à chaque fonction, sa courbe représentative.


80 Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+1}{x-2}$.

 1. Calculer la limite de la fonction f en 2.

 2. Parmi les expressions de f ci-dessous, lesquelles permettent de calculer la limite de f en $+\infty$?

a. $f(x) = \frac{5x}{x-2} + \frac{1}{x-2}$ b. $f(x) = 5 + \frac{11}{x-2}$ c. $f(x) = \frac{5 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$

 3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

81 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 1}{x-1}.$$

 Calculer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

82 Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2-4}$.

 Calculer les limites de la fonction f en 2 et en $+\infty$.

83 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-3}{1-x}$.

 Calculer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

84 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x + 1}$.

 Calculer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Piste : Pour la limite en $+\infty$, factoriser le numérateur et le dénominateur par e^x .

85 Soit f la fonction définie sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ par :

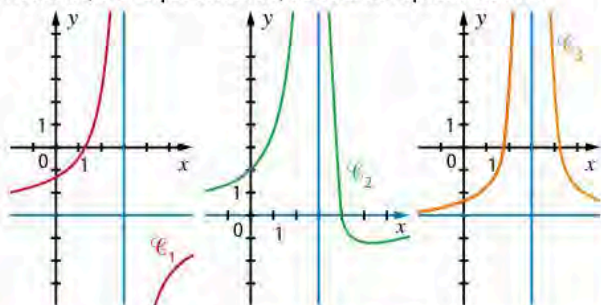
$$f(x) = \frac{2x-5}{x^2+3x-4}.$$

- Étudier le signe de x^2+3x-4 selon les valeurs de x .
- Déterminer les limites de la fonction f en 1 à gauche et à droite.
- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

86 Soit f , g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{-4+3x}{3-x}, g(x) = \frac{-3x^2+18x-22}{x^2-6x+9} \text{ et } h(x) = \frac{20-5x}{(3-x)^2}.$$

- Déterminer les limites des fonctions f , g et h en 3 à droite et en $+\infty$.
- On a représenté ci-dessous les courbes représentatives de ces fonctions ainsi que leurs asymptotes (en bleu). Associer, à chaque fonction, sa courbe représentative.



87 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{2}{1-e^x}.$$

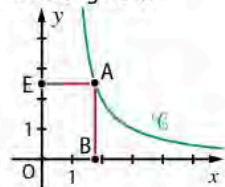
Démontrer que la courbe représentative de f admet trois asymptotes.

88 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{2x^2-5}{x^2+1} \text{ et } g(x) = \frac{3x^2+x+1}{x^2+7}.$$

Démontrer que les courbes représentatives de ces deux fonctions ont la même asymptote.

89 **GÉOMÉTRIE** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x-1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O .



On considère un point A de la courbe $\mathcal{C}$, B son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et E son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées.

Soit g la fonction qui, à tout réel x de l'intervalle $]1; +\infty[$, associe l'aire du rectangle $OBAE$.

- Avec un logiciel de géométrie dynamique, construire la courbe $\mathcal{C}$, un point A sur la courbe $\mathcal{C}$, les points B et E et enfin le polygone $OBAE$.
- En déplaçant le point A , faire une conjecture sur les limites de la fonction g en 1 et en $+\infty$.
- a. Exprimer $g(x)$ en fonction de x .
- b. Démontrer les conjectures faites dans la question 1. b.

90 Dans chaque cas, donner l'expression d'une fonction f vérifiant les conditions indiquées.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

- $\mathcal{C}$ a deux asymptotes : une d'équation $y=2$ et une d'équation $x=1$.
- $\mathcal{C}$ a une unique asymptote : la droite d'équation $x=6$.
- $\mathcal{C}$ a une unique asymptote : la droite d'équation $y=7$.
- $\mathcal{C}$ a deux asymptotes : une d'équation $y=2$ en $-\infty$ et une d'équation $y=3$ en $+\infty$.

Limites d'une fonction composée

Pour les exercices **91** à **94**, écrire f comme la composée de deux fonctions, puis calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

91 **Capacité 6, p. 171**

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+3}$.

92 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{1-0,5x}$.

93 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5-x)^3$.

94 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^4}$.

Pour les exercices **95** à **97**, calculer les limites données.

95 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-2}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2+x+e^{-x}}$

96 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+x+1}$

b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{2}{x}}$

97 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3e^{2x})^5$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}}$

98 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{2}{x-1}}$. Calculer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

99 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{2x}-2}{e^x+1}$.

- Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- a. Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$.
- b. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

100 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

- Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
- Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Piste 1. : Multiplier $f(x)$ par $\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

101 Soit f et g les fonctions définies sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-4} - x$ et $g(x) = \sqrt{x^2-4} + x$.

- Montrer que pour tout réel x de $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, on a : $f(x) \times g(x) = -4$.
- a. Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.
- b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
- a. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- b. En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$.

102 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2+x^3} = 0$.

 b. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = +\infty$.

MATHS & PHYSIQUE
103 À l'altitude z exprimée en mètres, l'accélération de la pesanteur $g(z)$ est donnée par la formule :

$$g(z) = g_0 \times \left(\frac{R}{R+z} \right)^2$$

 où R est le rayon de la Terre ($R \approx 6,37 \times 10^6 \text{ m}$) et $g_0 \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

 Que devient $g(z)$ lorsque l'altitude z tend vers l'infini ?

LE SAVIEZ-VOUS

 Dans la station spatiale internationale, à environ 410 km de la Terre, la valeur de l'accélération de la pesanteur est d'environ $0,88g_0$: un astronaute pèse encore 90 % de son poids.

Théorèmes de comparaison
104 Capacité 7, p. 173

 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 \sin(x)$.

 1. Montrer que pour tout réel x , $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$.

 2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

105 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \cos(x) - x$.

 1. Montrer que pour tout réel x , $-2 - x \leq f(x) \leq 2 - x$.

 2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

 3. a. Montrer que pour tout réel x strictement négatif, on a :

$$\frac{2}{x} - 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq -\frac{2}{x} - 1.$$

b. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

106 Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on a : $e^{x+1} - 1 \leq h(x) \leq 2e^{x+1} - 1$.

 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

107 Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , on a : $x - 1 \leq u(x) \leq 2x - 1$.

 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{u(x)}$.

 1. Montrer que pour tout réel x , $e^{x-1} \leq f(x) \leq e^{2x-1}$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

108 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on a : $1 \leq f(x) \leq 2$.

 Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0[$ par $g(x) = \frac{2f(x)+1}{x}$.

 1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 0[$,

$$\frac{5}{x} \leq g(x) \leq \frac{3}{x}.$$

 2. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en 0.

109 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - 3\cos(x))$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x \sin(x))$

Croissances comparées

Pour les exercices 110 à 117, calculer les limites données.

110 Capacité 8, p. 173

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x e^x + 2e^x - 1)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{2x} - x^3 e^x)$

111 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x} \right)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2} \right)$

112 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}} \right)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} e^x}{x} \right)$

113 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-3x}{e^x}$

Piste : Faire apparaître $\frac{e^x}{x}$.

114 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)e^x$

115 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2e^x)$

116 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x e^x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x$

117 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x e^{3x})$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{2-x}$

118 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{-20x}$.

 1. Calculer la limite de f en $-\infty$.

 2. a. Déterminer le réel a tel que pour tout réel x , $f(x) = a(-20x e^{-20x})$.

 b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

119 Calculer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x})$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{0,1x})$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x e^{2x})$

120 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{0,1x}}{x}$.

 1. Calculer la limite de f en 0.

 2. a. Déterminer le réel a tel que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) = a \times \frac{e^{0,1x}}{0,1x}.$$

 b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

121 Calculer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{0,1x}}{2x}$

122 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$

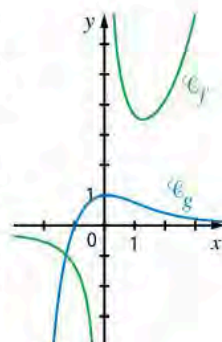
 par $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$ et g la fonction

 définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

 On donne ci-contre les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g .

 1. Conjecturer les limites des fonctions f et g aux bornes de leur ensemble de définition.

2. Démontrer ces conjectures.



Dérivée d'une fonction composée

Pour les exercices 123 à 126, f , g et h sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de ces trois fonctions.

123 Capacité 9, p. 175

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2}, g(x) = (3x + 1)^3 \text{ et } h(x) = \frac{1}{(x^4 + 3)^2}$$

124 $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3}, g(x) = \frac{1}{(e^x + 3)^4} \text{ et } h(x) = \sqrt{e^x + 1}$

125 $f(x) = 3(1 - x)^3, g(x) = (1 - 5e^x)^2 \text{ et } h(x) = e^{1+x+x^2}$

126 $f(x) = (2e^x - 1)^3, g(x) = \frac{1}{e^{-x} + 3} \text{ et } h(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}$

127 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$.

Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2(x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

128 FORMEL Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

Avec un logiciel de calcul formel, on a dérivé la fonction f et obtenu le résultat ci-dessous.

1	$f(x) := 3/\text{sqrt}(x^2+2)$
	$x \rightarrow \frac{3}{\sqrt{x^2+2}}$
2	$\text{deriver}(f(x))$
	$-\frac{3 \cdot x}{(\sqrt{x^2+2}) \cdot (x^2+2)}$

Retrouver ce résultat par le calcul.

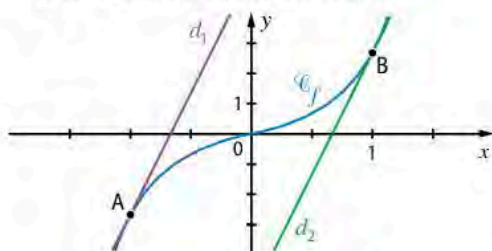
129 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.

130 Reprendre l'exercice 129 avec $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$.

131 Reprendre l'exercice 129 avec $f(x) = (2 - 3x)e^{1-x}$.

132 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{0,2x^2+0,5x}$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

133 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$. Sur la figure ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f ainsi que ses tangentes d_1 et d_2 aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 1 .

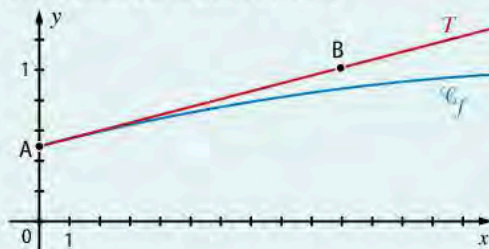


Les tangentes d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier.

134 Une question ouverte

Soit a et b des nombres réels. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f est donnée ci-dessous. Elle passe par le point A(0; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10; 1).



Déterminer la valeur de a et celle de b .

Piste → Voir p. 466

Étudier une fonction

135 Capacité 10, p. 175

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 + xe^{1-x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

- Calculer la limite de f en $-\infty$.
- a. Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 3 + \frac{xe}{e^x}$.
b. Calculer la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
- a. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (1 - x)e^{1-x}$.
b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

136 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^{1-0,5x} - 1)^2$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

- a. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote.
- a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
b. Construire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

137 CALC Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} \text{ et } \mathcal{C} \text{ sa courbe représentative.}$$

- a. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote d parallèle à l'axe des abscisses.
b. Avec la calculatrice, représenter $\mathcal{C}$ et d . Conjecturer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à d .
c. Démontrer cette conjecture.
- a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

138 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\sqrt{x+3}.$$

- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-3; +\infty[$.
- Construire le tableau de variation de la fonction f .

MÉTHODE À L'ORAL

139 On considère les fonctions f , g et h définies sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, $g(x) = x + 3 \cos(x)$ et $h(x) = e^{3-x}$.

- Est-ce que les limites de ces fonctions en $+\infty$ se calculent par la même méthode ? Exposer oralement la méthode à suivre pour calculer chacune de ces limites.
- Expliquer comment on détermine la limite de la fonction f en 3.
- Pour la fonction h , expliquer comment calculer sa fonction dérivée.

140 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0,25x^4 + 0,5x^2 - 2x + 1.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et f'' la fonction dérivée de f' sur $\mathbb{R}$.

- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$ pour tout réel x .
- Justifier chaque donnée du tableau de variation de la fonction f' ci-dessous.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

- Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

141 Une question ouverte

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 1.$$

Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Piste → Voir p. 466

MATH & SVT

142 On a mesuré expérimentalement, sur une durée fixée, le taux d'évolution du nombre de bactéries d'un type donné présentes dans un milieu à différentes températures.

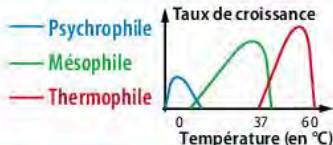


On considère que la fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 43]$ par $f(t) = (-1,4t + 59)e^{0,2t - 4,75}$ modélise ce taux d'évolution (en pourcentage) en fonction de la température (en degré Celsius) pour des valeurs comprises entre -5°C et 43°C .

- Calculer $f'(t)$ pour tout réel t de $[-5; 43]$.
- Pour quelle température le taux d'évolution de ce type de bactéries est-il maximal ?
- Résoudre l'inéquation $f(t) < 0$ dans l'intervalle $[-5; 43]$. Quelle information sur le développement de ce type de bactéries ce résultat fournit-il ?

LE SAVIEZ-VOUS

On peut classer les bactéries selon les températures auxquelles elles se développent.



MATHS & SVT

143 PYTHON

La taille d'une population de rongeurs exprimée en centaines d'individus, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t} + 2}, \text{ où } t \text{ représente le temps écoulé depuis l'année 2015, exprimé en années.}$$



- Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.
- Montrer que : $f(t) = 3 - \frac{6}{e^{0,5t} + 2}$.
- En déduire la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

- Montrer que pour tout réel t de $[0; +\infty[$,

$$f'(t) = \frac{3e^{0,5t}}{(e^{0,5t} + 2)^2}.$$

- Établir le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction `rongeur` retourne l'année à partir de laquelle il y aura plus de 250 rongeurs.

```
from math import*
def rongeur():
    t=0
    p=1
    while .....:
        t=t+1
        p=3*exp(0.5*t)/(exp(0.5*t)+2)
    return(.....)
```

Problème de synthèse

144 RAISONNER = CALCULER

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$.

Partie A

- Justifier chaque donnée du tableau de variation de la fonction f ci-dessous.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

- On veut montrer que pour tout réel x , $e^{x^2} \geq x^2 + 1$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.
 - Démontrer que pour tout réel x , $h'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$.
 - Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 - Vérifier que $h(0) = 0$, puis conclure quant à la question posée.

Partie B

- Calculer les limites de g en 0 à gauche et à droite.
- Utiliser le résultat démontré dans la partie A pour calculer la limite de g en $+\infty$.
- Montrer que pour tout réel $x < 0$, $g(x) \leq x + \frac{1}{x}$.
 - En déduire la limite de g en $-\infty$.
- Montrer que pour tout réel x non nul, $g'(x)$ a le même signe que $2x^2 - 1$.
 - Dresser le tableau de variation de g .

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

Limites

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$;
Si n est impair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$;
si n est pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$,
Si n impair, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$; si n pair, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = \lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Théorèmes de comparaison

- Le réel a peut être remplacé par $-\infty$ ou $+\infty$; $L \in \mathbb{R}$
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
 - Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$
 - Théorème des gendarmes
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, alors
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

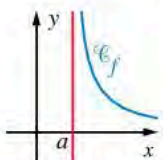
Asymptotes

a et L sont des réels.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$
alors asymptote horizontale d'équation $y = L$.



- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
alors asymptote verticale d'équation $x = a$.



Limites d'une fonction

Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Formes indéterminées

$$\begin{aligned} &\ll \infty - \infty \gg ; \ll \infty \times 0 \gg ; \\ &\ll \frac{\infty}{\infty} \gg ; \ll \frac{0}{0} \gg \end{aligned}$$

Fonction composée v suivie de $v \circ u$ telle que $v \circ u(x) = v(u(x))$

Dérivée de $v \circ u$

$$\begin{aligned} &\bullet (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) & \bullet (e^u)' = u' e^u \\ &\bullet (u^n)' = n u' u^{n-1} \text{ (où } n \in \mathbb{Z}^*) & \bullet (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{aligned}$$

Exemple de calcul d'une limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$

Faire le point avec des exercices corrigés

Calculer les limites d'une fonction

- * **145**  5 min **Capacité 3, p. 169**
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x - 1 - \frac{2}{x}$.
Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

- * **146**  10 min **Capacité 3, p. 169**
Soit f et g les fonctions définies sur $] -\infty; 0[$ par :
 $f(x) = \frac{2x - e^x}{3}$ et $g(x) = \frac{7x^3 - x + 1}{x}$.
Calculer les limites de f et g en $-\infty$.

- * **147**  5 min **Capacité 4, p. 169**

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 100x^2$.

1. La limite de f en $-\infty$ est :

- a. $-\infty$ b. 0 c. -99 d. $+\infty$

2. La limite de f en $+\infty$ est :

- a. $-\infty$ b. 0 c. 1 d. $+\infty$

- * **148**  5 min **Capacité 4, p. 169**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^4 + x^2 - 3x + 5$.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

* **149** ⌚ 15 min Capacités 2 et 3, pp. 167-169
 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{2}{x^3}$.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f .

* **150** ⌚ 15 min Capacités 1, 2 et 5, pp. 167-171
 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2+x}{1-x}$.

1. Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$.
2. En déduire l'existence de deux asymptotes à la courbe représentative de f .

* **151** ⌚ 15 min Capacités 2 et 5, pp. 167-171
 Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par :
 $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x - 2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f en 2 et en $+\infty$.
2. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

* **152** ⌚ 15 min Capacité 6, p. 171
 Soit f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :
 $f(x) = \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}$ et $g(x) = 1 - 2e^{\frac{1-2}{x}}$.

Calculer les limites des fonctions f et g en 0 et en $+\infty$.

* **153** ⌚ 10 min Capacité 7, p. 173
QCM Choisir la ou les bonnes réponses.
 Soit f une fonction telle que pour tout réel x , on a :
 $-x^3 \leq f(x) \leq 1 - x^3$. Alors :

- a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

* **154** ⌚ 10 min Capacité 7, p. 173
 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 0,1 \cos(2x)$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

* **155** ⌚ 10 min Capacité 7, p. 173
 Soit f une fonction telle que pour tout réel $x > 1$, on a :
 $2 + \frac{1}{x^2 - 1} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x - 1}$.

Déterminer les limites de f en 1 à droite et en $+\infty$.

* **156** ⌚ 5 min Capacité 8, p. 173
 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 4 - \frac{2e^x}{x}$.

Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

* **157** ⌚ 10 min Capacité 8, p. 187
 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (7 - x)e^x$.

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Calculer des dérivées

* **158** ⌚ 15 min Capacité 9, p. 175
 Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{x(x^2+3)}$ et $g(x) = \frac{1}{(x^2+3)^3}$.

* **159** ⌚ 5 min Capacité 9, p. 175
QCM Choisir la ou les bonnes réponses.
 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{10x^2 + 1}$.
 L'expression de la fonction dérivée de f est :

- a. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{10x^2 + 1}}$
- b. $f'(x) = \frac{20x}{\sqrt{10x^2 + 1}}$
- c. $f'(x) = \frac{10x}{\sqrt{10x^2 + 1}}$
- d. $f'(x) = \frac{10x^2 + 1}{2\sqrt{10x^2 + 1}}$

* **160** ⌚ 15 min Capacité 9, p. 175
 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + x + 1)^3$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Étudier des fonctions

* **161** ⌚ 15 min Capacités 4, 6, 9 et 10, pp. 169-171-175
 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
3. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Préciser sa valeur.

* **162** ⌚ 20 min Capacités 2, 5, 6, 9 et 10, pp. 167-171-175
 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par :
 $f(x) = e^{0,5x} - \frac{2}{x+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. a. Calculer la limite de f quand x tend vers -1 .
Interpréter graphiquement le résultat.
- b. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-1; +\infty[$.
- b. En déduire le sens de variation de f sur $]-1; +\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

* **163** ⌚ 30 min Capacités 5, 6 et 10, pp. 171-175
 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer la limite de f en 0.
2. a. Montrer que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.
- b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes. En donner une équation.
4. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
- b. En déduire le sens de variation de f .

* **164** ⌚ 25 min Capacités 3, 4 et 10, pp. 169-175
 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 3x^2 - 10x$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier chaque donnée du tableau de variation de f' , la fonction dérivée de f , ci-dessous.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Calculer une limite

■ **Un exemple :** Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} \frac{x-6}{x-5}$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on ?	Je dois calculer la limite d'une fonction f . ► Quelle est cette fonction f ?
Sous quelle forme est l'expression de f (somme, produit, quotient, composée) ?	L'expression de f a la forme d'un quotient. ► Calculer la limite du numérateur et celle du dénominateur. Justifier que la limite du quotient est infinie.
Que doit-on faire pour déterminer si on obtient $+\infty$ ou $-\infty$?	Je dois appliquer la règle des signes. ► Quel est le signe de la limite du numérateur ? Sur quel intervalle, doit-on connaître le signe de $(x-5)$? Déterminer le signe de $(x-5)$ sur cet intervalle. Conclure.
Le résultat obtenu est-il cohérent ?	Je peux utiliser la calculatrice. ► Tracer la courbe ou faire un tableau de valeurs.

165 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{2}{3-x}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x-1}{2-x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2+e^x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2+e^x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x^2)(\sqrt{x}-5)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x^3 + \frac{2}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x^2 + 9)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (e^x - 1)$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{e^x}{x-4}$

PARCOURS 2 Calculer la dérivée d'une fonction composée

■ **Un exemple : 1.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-2x+1}$. Calculer $f'(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (5x^3 + 1)^4$. Calculer $g'(x)$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on dans la première question ?	Je dois calculer la dérivée d'une fonction f . ► Quelle est cette fonction f ?
Sous quelle forme est l'expression de f ?	L'expression de f est sous la forme e^u . ► Expliciter $u(x)$.
Quelle est la formule donnant la dérivée de f ?	$(e^u)' = u'e^u$. ► Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.
Dans la deuxième question, sous quelle forme est l'expression de g ?	L'expression de g est sous la forme u^n , avec n entier non nul. ► Donner l'expression de u et la valeur de n .
Quelle est la formule donnant la dérivée de g ?	$(u^n)' = n u' u^{n-1}$. ► Calculer $u'(x)$, puis $g'(x)$.

166 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

- $f(x) = e^{-x^2+1}$
- $f(x) = 2e^{3x+1}$
- $f(x) = 0,5e^{2-x^2}$
- $f(x) = (4x^2 - 1)^3$
- $f(x) = (3x^2 - 1)^4$
- $f(x) = (e^x - 1)^5$
- $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 5)^2}$
- $f(x) = \frac{5}{(x^2 + 5)^3}$
- $f(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 8}$

PARCOURS 3 Asymptotes obliques

167 Chercher en autonomie

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d d'équation $y = x - 1$.

a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$.

b. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

On dit que la droite d d'équation $y = x - 1$ est une **asymptote oblique** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1+2x^2}{1+x}$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère d'origine O . On considère un point M d'abscisse x sur $\mathcal{C}_g$.

a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$. Que peut-on en déduire concernant la droite (OM) ?

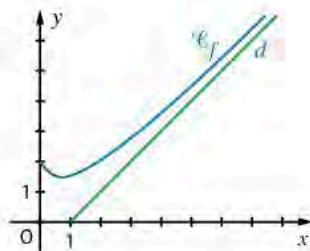
b. Dans un repère, tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ et la droite d d'équation $y = 2x$.

c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x]$.

La droite d'équation d est-elle une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$?

d. Déduire de la limite calculée dans la question 2.c. l'existence d'une **asymptote oblique** à la courbe représentative de g en $+\infty$.

En donner une équation.



Piste 2. : Commencer par calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

168 Application

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1 + e^x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Démontrer que la droite d d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -2[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.

PARCOURS 4 Dérivées successives d'une fonction

169 Chercher en autonomie

On a défini dans ce chapitre la dérivée seconde d'une fonction. On va s'intéresser aux dérivées n -ièmes d'une fonction, où n est un entier naturel non nul.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.

a. Calculer $f''(x)$, f' étant la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée est appelée la dérivée d'ordre 3 de f . Elle est notée $f^{(3)}$.

Calculer $f^{(3)}(x)$.

d. De manière générale, lorsqu'une fonction g est k fois dérivable, on note $g^{(k)}$ sa dérivée d'ordre k .

Par définition, $g^{(0)}$ est la fonction g elle-même.

Calculer $f^{(4)}(x)$.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{2x}$.

a. Faire une conjecture sur l'expression de la dérivée n -ième de h .

b. Démontrer cette conjecture par récurrence.

170 Application

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Faire une conjecture sur l'expression de la dérivée n -ième de f .

Démontrer cette conjecture par récurrence.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

a. Calculer $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.

b. Faire une conjecture sur l'expression de la dérivée n -ième de f ($n \in \mathbb{N}^*$).

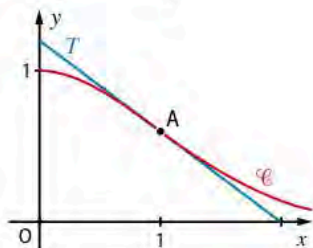
c. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Piste 1. : Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

Lorsque c'est nécessaire, le plan est muni d'un repère orthonormé.

171 Une tangente à une courbe

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{-0,5x^2}$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction g et sa tangente T au point A d'abscisse 1.

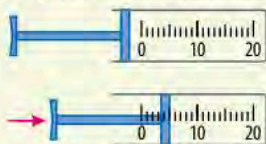


1. Faire une conjecture sur la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .
2. Montrer qu'une équation de la tangente T est :
$$y = -e^{-0,5}x + 2e^{-0,5}.$$
3. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$h(x) = g(x) - (-e^{-0,5}x + 2e^{-0,5}).$$
 - a. Calculer $h'(x)$, puis démontrer que, pour tout réel x de $[0; +\infty[$, $h'(x) = (-1 + x^2)e^{-0,5x^2}$.
 - b. Étudier les variations de h' sur $[0; +\infty[$ et en déduire son signe.
 - c. Prouver la conjecture faite dans la question 1.

MATHS & PHYSIQUE

172 Pression dans un tube

Dans un tube cylindrique rempli de gaz, on déplace un piston. La longueur du tube est de 20 cm et la position du piston est repérée grâce à une graduation de 0 à 20.



La loi de Boyle-Mariotte stipule qu'à température constante, le produit du volume d'un gaz parfait par sa pression est constant. On note P_0 la pression initiale (lorsque $x=0$) et $P(x)$ la pression lorsque le piston est repéré par la graduation x avec $0 \leq x < 20$. On définit ainsi une fonction P .

1. Exprimer $P(x)$ en fonction de x et de P_0 .
2. a. Calculer la limite de la fonction P en 20.
b. Interpréter ce résultat.

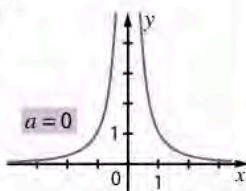
173 GÉOMÉTRIE CHERCHER RAISONNER

Une fonction avec un paramètre

Pour tout réel a , on considère la fonction f_a telle que :

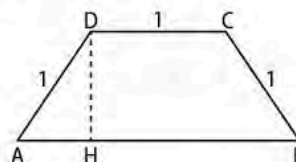
$$f_a(x) = \frac{1}{x^2 + a}.$$

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur a , puis construire la courbe représentative de la fonction f_a .
2. Faire une conjecture sur les variations et les limites de la fonction f_a selon les valeurs de a .
3. Démontrer cette conjecture.



174 Une aire maximale

Soit ABCD un trapèze isocèle de grande base [AB] tel que $AD = DC = CB = 1$.



Soit H le projeté orthogonal de D sur [AB].

On pose $AH = x$ avec x appartenant à $[0; 1[$.

1. Exprimer l'aire du trapèze en fonction de x .
2. a. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1[$ par :

$$f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}.$$

Démontrer que pour tout réel x de $[0; 1[$,

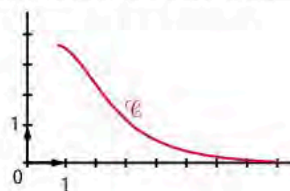
$$f'(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- b. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 1[$.
3. Quel est le trapèze dont l'aire est maximale ?

175 MODÉLISER RAISONNER Une pente maximale



Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un nouveau toboggan pour ses pandas. Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 8]$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont deux entiers naturels. La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
Déterminer la valeur de l'entier b .
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
Déterminer la valeur de l'entier a .
3. On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[1; 8]$ par $f(x) = 10xe^{-x}$.
 - a. Montrer que pour tout réel x de $[1; 8]$, $f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f' sur $[1; 8]$.
 - c. On considère un point M de la courbe. La valeur absolue du coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M est appelée la pente du toboggan au point M.
En quel point du toboggan la pente est-elle la plus grande ?

MATHS & ÉCONOMIE

176 Élasticité de la demande

En économie, l'élasticité de la demande d'un produit mesure la sensibilité de cette demande par rapport aux variations de prix du produit. Pour un produit dont le prix est noté x et dont la demande est $f(x)$, on appelle élasticité de la demande par rapport au prix x la quantité : $E(x) = x \times \frac{f'(x)}{f(x)}$.

On considère que la demande hebdomadaire d'un certain produit informatique est modélisée par la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = (2x + 10)e^{-0,5x}$. Le nombre $f(x)$ est la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x , en centaines d'euros.

- Étudier les variations de f sur $[1 ; +\infty[$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$. En quoi ce résultat est-il cohérent ?
- La recette R est définie sur $[1 ; +\infty[$ par $R(x) = x \times f(x)$. Déterminer le prix de ce produit informatique à l'euro près pour que la recette soit maximale.

2. a. Vérifier que pour tout $x > 1$, $E(x) = \frac{-x^2 - 3x}{2x + 10}$.

b. On dit que la demande est peu élastique si l'élasticité est comprise entre -1 et 0 (dans ce cas, la demande est peu sensible aux variations de prix). Pour quels prix la demande de ce produit est-elle peu élastique ?

LE SAVIEZ-VOUS

Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) est considéré comme le fondateur de l'économie scientifique. Dans *Recherches mathématiques sur la théorie des richesses*, publié en 1838, il pose les bases du concept d'élasticité demande-prix en économie.



MATHS & PHYSIQUE

177 RAISONNER = CALCULER

Théorie de la relativité

Dans sa théorie de la relativité, Einstein a montré que la longueur d'un objet en mouvement, vu par un observateur immobile, et sa masse dépendent de sa vitesse.

On note L_0 la longueur de l'objet au repos (en kg), m_0 la masse de l'objet au repos (en kg), v la vitesse de l'objet (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) et c la vitesse de la lumière ($c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

1. La fonction L donnant la longueur de l'objet est définie sur $[0 ; c[$ par $L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

- Calculer $L'(v)$ pour tout réel v de $[0 ; c[$.
- En déduire le sens de variation de la fonction L .
- Calculer la limite de L en c .

2. La fonction m donnant la masse de l'objet est définie sur $[0 ; c[$ par $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

- Calculer $m'(v)$ pour tout réel v de $[0 ; c[$.
- En déduire le sens de variation de la fonction m .
- Calculer la limite de m en c .

LE SAVIEZ-VOUS

En mécanique relativiste, la masse augmente en fonction de la vitesse. Cette augmentation n'est pas décelable à notre échelle car c étant très grand, le rapport $\frac{v}{c}$ est négligeable.

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

MATHS & PHYSIQUE

178 Chute d'une goutte d'eau

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, de chute de la goutte



en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie sur $[0 ; +\infty[$ par $v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. La constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

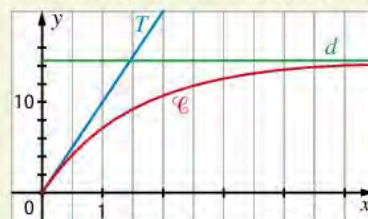
- Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
- Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$.

Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

3. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $5 \frac{m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

4. On nomme $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction v .

- Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote d horizontale. En donner une équation.
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- Calculer l'abscisse du point d'intersection de T .
- On a représenté $\mathcal{C}$, T et d sur le graphique ci-dessous.



Quelle est la valeur de $\frac{m}{k}$? Justifier.

179 Un point anguleux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère d'origine O.

- Justifier que f est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- a. Démontrer que le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et $0 + h$ est : $r(h) = \frac{|h|}{h} \sqrt{\frac{1}{h^2 + 1}}$, où $h \neq 0$.

b. Calculer la limite de $r(h)$ en 0 à droite. On note cette limite $f'_d(0)$ et on dit que f est dérivable en 0 à droite.

c. Calculer la limite de $r(h)$ en 0 à gauche. On note cette limite $f'_g(0)$ et on dit que f est dérivable en 0 à gauche.

3. La fonction f est dérivable en 0 si $f'_d(0) = f'_g(0)$.

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

4. La courbe $\mathcal{C}$ admet au point O deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs $f'_d(0)$ et $f'_g(0)$.

Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses deux demi-tangentes en O.

180 GÉOMÉTRIE REPRÉSENTER CALCULER

Branches infinies

On considère une fonction f et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère d'origine O .

On a étudié dans ce chapitre les asymptotes parallèles aux axes. On se propose d'étudier d'autres types de branches infinies.

1. Dans cette question, f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}.$$

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

Créer un point M sur $\mathcal{C}_f$ puis construire la droite (OM).

b. Faire une conjecture sur la limite de la pente de la droite (OM) lorsque l'abscisse x de M tend vers $+\infty$.

c. Démontrer cette conjecture.

d. Quelle est la « position limite » de la droite (OM) ?

2. Reprendre la question 1. avec les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

a. $f(x) = x^2 + 1$

b. $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x}$

c. $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$

3. a. Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Quelles sont, parmi les courbes construites précédemment, celles qui ont de telles branches infinies ?

b. Dans cette question, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = +\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$, on dit que

la courbe $\mathcal{C}_f$ a une asymptote d'équation $y = ax + b$.

Quelles sont, parmi les courbes construites précédemment, celles qui ont de telles branches infinies ? Justifier.

MÉTHODE À L'ORAL

181 Histoire des mathématiques

Bien avant l'apparition de la notion de fonction et de celle de dérivée, **Pierre de Fermat** (1607-1665) développe une méthode pour la recherche d'extremums.

Soit à partager la droite AC (fig. 1) en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.

Fig. 1
A E C

Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$.

Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b , le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.

Il doit être adégalé au précédent : $ba - a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \simeq 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \simeq 2a + e$;

Supprimez e : $b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b . Il est impossible de donner une méthode plus générale.

Faire un exposé sur la méthode de Pierre de Fermat.

182 Une fusée est lancée verticalement d'un point à la surface de la Terre, avec une vitesse initiale v_0 .

On suppose qu'à partir de l'instant du décollage, la fusée n'est soumise qu'à la force de pesanteur.

Lorsque la fusée est à une altitude de h mètres et que sa vitesse est de v ($m \cdot s^{-1}$), en utilisant la loi de conservation de l'énergie mécanique (en l'absence de frottement), on obtient la relation suivante :

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$ avec M la masse de la Terre, R son rayon et G la constante gravitationnelle universelle.

Faire un exposé sur la vitesse v_0 qui permettrait à la fusée de s'éloigner indéfiniment de la Terre.

Prise d'initiatives

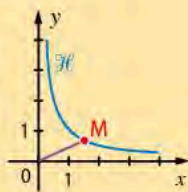
183 Étudier les limites et les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 0,5x^2 - x + 1$.

184 GÉOMÉTRIE Dans un repère orthonormé, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$.

Soit M un point de $\mathcal{H}$.

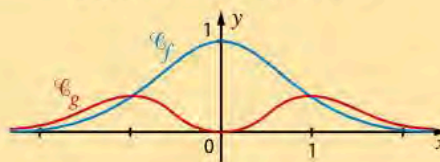
1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une conjecture sur la (ou les) position(s) du point M telle(s) que la distance OM soit minimale.

2. Démontrer cette conjecture.



185 On donne ci-dessous les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x^2} \text{ et } g(x) = x^2 e^{-x^2}.$$



Soit x un réel de l'intervalle $[1; +\infty[$, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x .

Déterminer la valeur maximale de la distance MN.

TP Image formée par une lentille convergente

GÉOMÉTRIE



MODÉLISER



CHERCHER

La lentille convergente est un instrument fondamental de l'optique qui a de nombreuses applications : loupes, microscopes, lunettes astronomiques, etc.

Selon la position de l'objet sur l'axe focal de la lentille, l'image est :

- plus grande et inversée, de l'autre côté de la lentille (c'est le principe des appareils de projection) ;
- plus petite et inversée, de l'autre côté de la lentille (c'est le principe des appareils photographiques) ;
- du même côté de la lentille (c'est le principe de la loupe).

C'est ce que nous allons retrouver avec la construction géométrique de l'image d'un objet réel ; puis par le calcul, nous étudierons la formation de l'image dans les « positions limites » de l'objet (objet « à l'infini » ou objet très près du foyer).

Fichier GeoGebra/Cabri

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr



Lanterne magique

A Construction et animation de la figure

1. Ouvrir le fichier.

On a construit le segment représentant la lentille (L),

le centre O de la lentille, le foyer objet F et le foyer image F' symétrique de F par rapport à O.

On a créé un point A mobile dans le demi-plan à gauche de la lentille, puis construit C, son projeté orthogonal sur l'axe focal (FF').

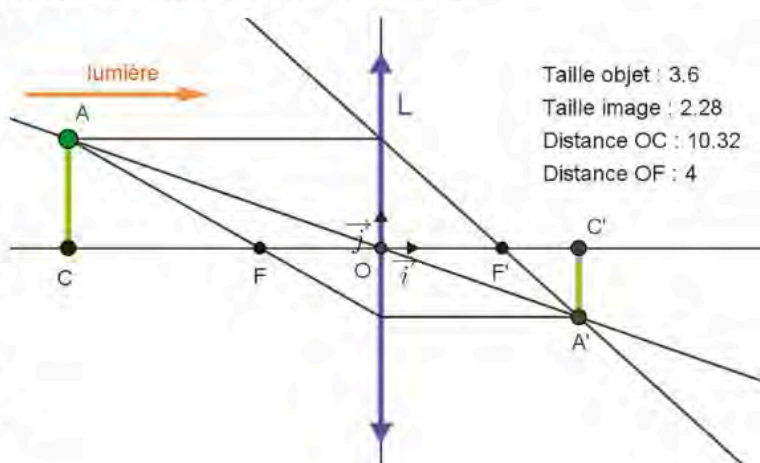
2. Construire A', l'image de A. On rappelle que :

- les rayons passant par le centre O de la lentille ne sont pas déviés ;
- les rayons parallèles à l'axe sortent de la lentille en passant par le foyer image F' ;
- les rayons passant par le foyer objet F sortent de la lentille parallèles à l'axe.

3. Construire C', le projeté orthogonal de A' sur l'axe focal (FF').

4. En déplaçant le point A (uniquement dans le demi-plan à gauche de la lentille), on peut observer l'image [A'C'] de l'objet [AC].

Compléter la zone texte, en faisant afficher la longueur A'C'.

**B Observations avec le logiciel**

1. Déplacer le point A et comparer OC et OF lorsque l'image :

- est inversée et de même taille que l'objet ;
- est inversée et plus petite ;
- est inversée et plus grande ;
- n'est pas inversée et est plus grande.

2. Que devient l'image lorsque l'objet est « à l'infini » ?

3. Que devient l'image lorsque l'objet approche de très près le foyer « par la gauche » ? « par la droite » ?

C Étude théorique

On munit le plan d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note f l'abscisse de F, f' l'abscisse de F' (on a $f' = -f$), p l'abscisse de A et q l'abscisse de A'.

p appartient donc à $] -\infty ; 0[$.

On a la relation suivante entre f' , p et q : $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$. (relation de conjugaison)

1. Exprimer q en fonction de p et de f' , puis en fonction de p et de f .

2. Calculer la limite de q lorsque p tend vers l'infini. Quelle observation retrouve-t-on ?

3. Calculer la limite de q lorsque p tend vers f en étant inférieur à f puis, lorsque p tend vers f en étant supérieur à f .

Quelles observations retrouve-t-on ?

Question

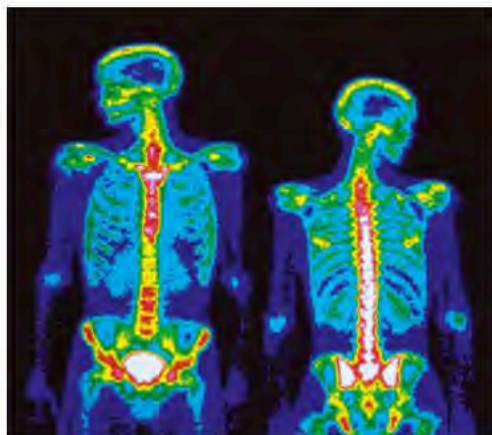
Comment étudie-t-on l'élimination d'un traceur radioactif lors d'une scintigraphie ?

Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 139, 181, 182

Enjeu de la question

La radioactivité a de nombreuses applications, notamment dans le domaine médical. Les produits radioactifs utilisés lors d'une scintigraphie permettent par leur rayonnement de visualiser le fonctionnement d'un organe mais il est important d'utiliser des marqueurs qui ne sont pas dangereux pour le patient.



Plan possible

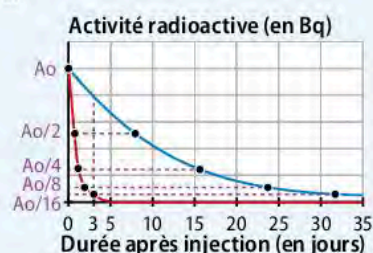
1. Découverte de la radioactivité par Henri Becquerel
2. Présentation du principe de la scintigraphie
3. Étude de la loi de décroissance radioactive
4. Comparaison et choix des isotopes
5. Conclusion

Les mots-clés

Fonctions exponentielles • Période d'un isotope radioactif • Équations différentielles

Support de présentation possible

- Henri Becquerel découvre la radioactivité. L'unité physique de la radioactivité, le becquerel (Bq) est nommée en son honneur.
- Principe d'une scintigraphie : on injecte au patient un produit radioactif qui se fixe sur l'organe étudié, et qui émet des rayonnements que l'on mesure à l'aide de gamma-caméras.
- Loi de décroissance exponentielle : $N'(t) = -\lambda N(t)$ où λ est une constante de désintégration liée à l'isotope.



- Le produit radioactif injecté est choisi en fonction de l'organe dont on veut étudier le fonctionnement.

Questions d'approfondissement possibles

Connaissez-vous des utilisations non médicales de la radioactivité ?

Proposer un algorithme qui permet de déterminer au bout de combien de temps l'activité d'un produit radioactif devient inférieure à un seuil donné.

Expliquer comment comparer e^{-at} et e^{-bt} , a, b et t étant des réels positifs.

Exposer les méthodes que l'on peut utiliser pour déterminer les limites d'une fonction.

Poursuite d'études et projet professionnel

- Pourquoi étudier les fonctions exponentielles ?

De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou socio-économiques sont modélisables par des fonctions exponentielles.

- Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude des fonctions exponentielles est approfondie dans de nombreuses formations de l'enseignement supérieur : licences scientifiques, licences d'économie, IUT scientifiques, écoles d'ingénieur, faculté de médecine...

- Un exemple de métier ?

Le (la) **radiologue** est le (la) spécialiste de l'imagerie médicale : radiographie, échographie, scanner, IRM, scintigraphie... Compte-tenu de la haute technicité des appareils d'imagerie médicale, les radiologues sont le plus souvent spécialisés dans un domaine particulier.

THÈMES

- Dérivée et limites d'une fonction e^x
- Théorèmes de comparaison et croissances comparées
- Étude de fonction

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , $f(x) = (1 + x + x^2)e^{-2x+1}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Démontrer que, pour tout réel $x > 1$, on a : $1 < x < x^2$.

En déduire que, pour $x > 1$, on a : $0 < f(x) < 3x^2e^{-2x+1}$.

b. Vérifier que, pour tout réel x , $3x^2e^{-2x+1} = \frac{3}{4}e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}}$ puis montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2e^{-2x+1}) = 0$.

c. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (-1 - 2x^2)e^{-2x+1}$.

4. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ
ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. Déterminer la limite de chaque facteur en factorisant le premier par son terme prépondérant et en reconnaissant une fonction composée pour le second.

Capacités 3, 4 et 6, pp. 169-171

2. a. On peut multiplier chaque membre d'une inégalité par un nombre strictement positif.

b. Remarquer que $\frac{(2x)^2}{e^{2x}}$ est l'inverse de $\frac{e^{2x}}{(2x)^2}$ puis reconnaître une fonction composée et utiliser les croissances comparées.

Capacités 6 et 8, pp. 171-173

c. Utiliser le théorème des gendarmes. Penser aux asymptotes.

Capacités 1 et 7, pp. 167-173

3. Utiliser les formules donnant la dérivée d'un produit et d'une fonction composée.

Capacité 9, p. 175

4. Étudier le signe de la dérivée.

Capacité 10, p. 175

SOLUTION COMMENTÉE

1. Pour tout réel x non nul, $1 + x + x^2 = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right) = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x + x^2) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+1} = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x + x^2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+1} = +\infty$ donc par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. En multipliant chaque membre de l'inégalité $x > 1$ par x qui est strictement positif, on obtient $x^2 > x$.

$x > 1$ et $x^2 > x$ donc $x^2 > x > 1$, soit $1 < x < x^2$.

On en déduit que $1 + x + x^2 < x^2 + x^2 + x^2$, soit $1 + x + x^2 < 3x^2$.

En multipliant chaque membre de cette inégalité par e^{-2x+1} qui est strictement positif, on obtient pour tout $x > 1$, $f(x) < 3x^2e^{-2x+1}$.

De plus, $f(x) > 0$ car $1 + x + x^2 > 3 > 0$ et $e^{-2x+1} > 0$. Donc $0 < f(x) < 3x^2e^{-2x+1}$.

b. Pour tout réel x , $\frac{3}{4}e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}} = \frac{3}{4}e \times \frac{4x^2}{e^{2x}} = 3ex^2e^{-2x} = 3x^2e^{-2x+1}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{(2x)^2} = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)^2}{e^{2x}} = 0$ (car $\frac{(2x)^2}{e^{2x}}$ est l'inverse de $\frac{e^{2x}}{(2x)^2}$)

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}} \right) = 0$ et par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2e^{-2x+1}) = 0$.

c. Pour tout $x > 1$, $0 < f(x) < 3x^2e^{-2x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2e^{-2x+1}) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3. $f = uv$ avec $u(x) = 1 + x + x^2$ et $v(x) = e^{-2x+1}$.

Donc $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 1 + 2x$ et $v'(x) = -2e^{-2x+1}$.

Pour tout réel x , $f'(x) = (1 + 2x)e^{-2x+1} + (1 + x + x^2)(-2e^{-2x+1})$.

On factorise $f'(x)$: $f'(x) = (1 + 2x - 2 - 2x - 2x^2)e^{-2x+1} = (-1 - 2x^2)e^{-2x+1}$.

4. Pour tout réel x , $(-1 - 2x^2) < 0$ et $e^{-2x+1} > 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Sujet A 30 min

CALCULER CHERCHER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Étude d'une fonction

CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE

Questions 1. et 3. ► Capacité 4 p. 169

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 6x^2 + 7x.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$ pour tout réel x .
3. Justifier chaque donnée du tableau de variation de la fonction f ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	27	0	$+\infty$

- a. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Sujet B 45 min

MODÉLISER CALCULER

THÈMES • Dérivée et limites d'une fonction e^u

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions 1 et 3. a. ► Capacité 9 p. 175
 Question 2. ► Capacité 6 p. 171
 Question 3. b. ► Capacité 10 p. 175

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours. Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 10e^{u(x)}$ où u est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $u(x) = -e^{2 - \frac{x}{10}}$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $[0; +\infty[$.

1. Vérifier que pour tout réel x positif on a :

$$f'(x) = -u(x)e^{u(x)}.$$

En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f''(x)$. On note f'' la fonction dérivée de f' sur $[0; +\infty[$.

- a. Montrer que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1 + u(x)).$$

- b. Déterminer les variations de f' sur $[0; +\infty[$.
- c. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

Sujet C 50 min

RAISONNER CALCULER

THÈMES • Dérivée et limites d'une fonction e^u

- Croissances comparées et théorèmes de comparaison
- Étude de fonction

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question A. 2. b. ► Capacités 6 et 8 pp. 171-173
 Questions A. 3. et 4. ► Capacités 9 et 10 p. 175

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x^2}$

1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a :
 $-x^2 \leq -2x + 1$, puis $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.
2. a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$,
 $xe^{-2x+1} = -0,5e \times (-2xe^{-2x})$.
 b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.
4. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

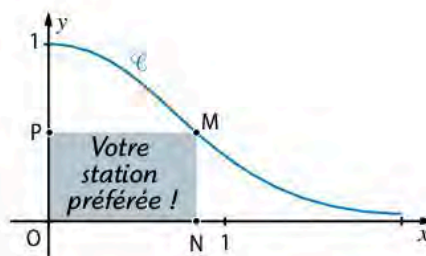
Partie B

Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.

Le panneau est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre.

La courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $g(x) = e^{-x^2}$.

Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



L'unité choisie est le mètre. Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 2]$, on note :

- M le point de la courbe $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x; e^{-x^2})$;
- N le point de coordonnées $(x; 0)$;
- P le point de coordonnées $(0; e^{-x^2})$;
- $A(x)$ l'aire du rectangle ONMP.

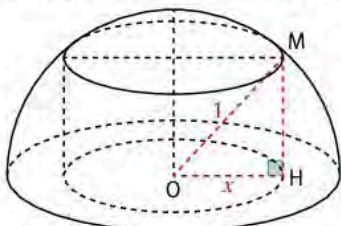
1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 2]$, on a : $A(x) = xe^{-x^2}$.
2. Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathcal{C}$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale.
3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2. doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc. Déterminer, en m^2 et à 10^{-2} près, la mesure de la surface à peindre en bleu.

THÈMES • Fonctions $\sqrt{u}$
• Compléter un algorithme

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 2. a. ► Capacité 9 p. 175
Question 2. b. ► Capacité 10 p. 175

On considère un cylindre droit inscrit dans une demi-sphère de rayon un mètre. Le cylindre et la demi-sphère ont le même plan de base $\mathcal{P}$ et le même axe de symétrie. Soit M un point de l'intersection de la sphère et du cylindre, et H le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$. L'unité est le mètre. On note $OH = x$, avec $0 < x < 1$.



- Exprimer la longueur MH , puis le volume du cylindre, en fonction de x .
- Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1[$ par $g(x) = \pi x^2 \sqrt{1 - x^2}$ et g' sa fonction dérivée.
 - Démontrer que pour tout réel x de $]0; 1[$,

$$g'(x) = \frac{\pi x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
 - Construire le tableau de variation de g .
- En déduire les dimensions OH et MH du cylindre de plus grand volume, ainsi que la valeur exacte en m^3 de ce volume.
- Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous, afin qu'après son exécution, la variable x contienne la plus petite valeur de OH , à 0,001 près, telle que le volume du cylindre dépasse $1 m^3$.

```

v ← 0
x ← 0
Tant que .....
    | x ← .....
    | v ←  $\pi x^2 \sqrt{1 - x^2}$ 
Fin Tant que
    
```

Sujet E 30 min

MODÉLISER **CHERCHER**
SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Dérivée et limites d'une fonction e^u

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions 1. a. et 2. b. ► Capacités 3 et 6 pp. 169-171
Question 1. b. ► Capacité 10 p. 175

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de $1\,000^\circ\text{C}$. À la fin de la cuisson, il est éteint. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

On note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en degrés Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par :

$$f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

- Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.
 - Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$. En déduire son tableau de variation complet.
- Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degrés Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t + 1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par $d(t) = f(t) - f(t + 1)$.
 - Vérifier que pour tout nombre réel t positif :

$$d(t) = 980 \left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right) e^{-\frac{t}{5}}.$$
 - Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
 - Quelle interprétation peut-on en donner ?

Sujet F 20 min **CALCULER** **RAISONNER**

THÈMES • Limites d'une fonction
• Dérivée d'une fonction composée

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacité 9 p. 175
Question 2. ► Capacités 5 et 6 p. 171
Question 3. ► Capacités 1 et 2 p. 167
Question 4. ► Capacité 7 p. 173

QCM Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

On considère la fonction f définie sur $]7; +\infty[$ par :

$f(x) = x + \frac{1}{(x - 7)^2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- La fonction dérivée de f est donnée par :
 - $f'(x) = 1 - \frac{1}{2(x - 7)}$
 - $f'(x) = 1 + \frac{2}{(x - 7)^3}$
 - $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x - 7)^3}$
 - $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 7)^4}$
- Parmi les limites suivantes, quelle est celle qui est correcte ?
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 7$
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation :
 - $y = 7$
 - $y = 0$
 - $x = 0$
 - $x = 7$
- Soit g une fonction telle que pour tout réel x de $]7; +\infty[$,

$$\frac{1}{(x - 7)^2} \leq g(x) \leq f(x).$$

Parmi les limites suivantes, quelle est celle qui est correcte ?

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 7} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 7} g(x) = 0$

► Exploiter un tableau de variation ou une courbe

1 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

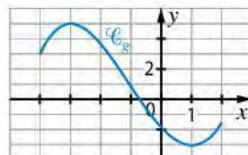
1. On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 3]$. Sur $[-1 ; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

x	-1	1	2	3
$f(x)$	-2	2	-1	-0,5

- a. exactement trois solutions
b. exactement deux solutions
c. exactement une solution
d. aucune solution

2 Soit g une fonction définie sur $[-4 ; 2]$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

- a. Donner un encadrement de $g(x)$ par deux réels.
b. Pour quelles valeurs du réel k l'équation $g(x) = k$ possède-t-elle au moins une solution dans $[-4 ; 2]$?



3 VRAI/FAUX

Soit f une fonction dérivable sur $[-5 ; 3]$. On donne ci-dessous le tableau de variation de f' . Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse puis justifier.

« La fonction f est croissante sur $[-1 ; 1]$. »

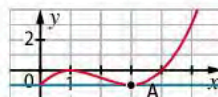
x	-5	-1	1	3
$f'(x)$	-0,5	-3	0	4

► Interpréter la dérivée d'une fonction

4 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $[0 ; 5]$ ainsi que sa tangente horizontale au point A d'abscisse 3. Le signe de la fonction dérivée de g :

- a. est négatif sur $[0 ; 1]$
b. est positif sur $[3 ; 4]$
c. est négatif sur $[1 ; 4]$
d. change en $x = 4$



5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Déterminer le signe de $f''(x)$ puis en déduire les variations de f' sur $\mathbb{R}$.

► Utiliser le mode Fonction de la calculatrice (table, zoom, trace)

Pour les exercices **6** et **7**, on considère la fonction f définie sur $[-3 ; 4]$ par $f(x) = 2x^3 + 4x + 3$.

6 **CALC** 1. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de la fonction **Table** de la calculatrice.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$															

2. En utilisant la fenêtre graphique : $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = 4$, $y_{\min} = -70$ et $y_{\max} = 150$, représenter sur la calculatrice la courbe représentative de f sur $[-3 ; 4]$.

7 VRAI/FAUX Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses puis justifier.

1. Une valeur approchée à 0,001 près de la solution de l'équation $f'(x) = 10$ est 1,093.
2. La solution de l'équation $f(x) = 0$ appartient à l'intervalle $[-0,627 ; -0,626]$.

CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ

CHAPITRE

6



Contrairement à la plupart des plages du littoral, la plage principale de l'île de Groix est plutôt convexe. En effet, sur une grande partie de la plage, on peut toujours joindre en ligne droite, deux points du bord de mer en restant sur le sable. Vu de l'océan en s'élevant au-dessus de l'eau, la courbe formée par le trait de côte est localement celle d'une fonction convexe.

LES NOTIONS DU CHAPITRE

- Continuité d'une fonction
- Image d'une suite convergente par une fonction continue
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Fonction convexe sur un intervalle

Voir exercice 76 page 217



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 205, 207, 209
Animations	pp. 201, 202, 204, 206
Corrigés détaillés	pp. 220, 221, 230

Activité 1

Objectif

Découvrir la notion de continuité.

Cours 1

Continuité et applications

La mue du crquet

La croissance peut être continue, c'est-à-dire lorsqu'elle s'opère sans interruption, c'est le cas des mammifères. Elle est discontinue lorsqu'elle se réalise de façon brutale à un moment donné : c'est le cas de certains insectes comme le crquet.

Sa taille est déterminée par celle de sa cuticule (couche superficielle rigide protégeant ses organes) qui est fixe. Pour qu'il grandisse, il faut qu'il s'en débarrasse. On dit qu'il mue. Ainsi sa taille s'accroît brusquement par paliers.

Le tableau ci-contre donne la taille du crquet en fonction de son âge. On note f la fonction qui à l'âge x du crquet, exprimé en jour, associe sa taille, exprimée en millimètres.

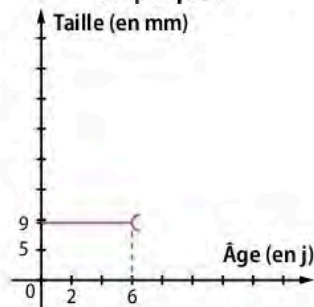


Âge du crquet en jours	Taille en mm
De 0 à 6 exclu	9
De 6 à 8 exclu	12
De 8 à 10 exclu	16
De 10 à 13 exclu	21
De 13 à 16 exclu	27
À partir de 16	40

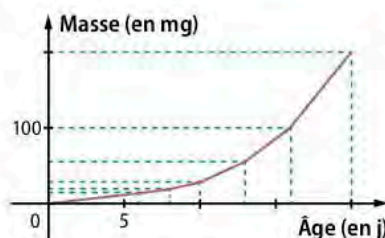
1 Donner une représentation graphique de la fonction f en reproduisant et complétant le graphique 1.

2 Le graphique 2 donne la masse du crquet en fonction de l'âge en jours. Comparer ces deux graphiques.

Graphique 1



Graphique 2



Activité 2

Objectif

Découvrir le théorème des valeurs intermédiaires.

Cours 2

Équation $f(x) = k$ avec f continue

Le théorème de Cauchy

Dans le texte ci-dessous, Augustin-Louis de Cauchy expose l'énoncé d'un nouveau théorème et en propose une démonstration.

Une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en géométrie les ordonnées de lignes continues droites ou courbes. De cette remarque on déduit facilement la proposition suivante.

Théorème IV – Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation $f(x) = b$ par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X .

Démonstration – Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation $y = b$ dans l'intervalle compris entre les coordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise.

1 Donner une représentation graphique pour illustrer ce théorème.

2 Comment peut-on reformuler la phrase « ...la variable x entre les limites $x = x_0$ et $x = X$ », avec un vocabulaire plus récent ?

3 Cette démonstration ne satisfait pas tous les mathématiciens de l'époque car ils la jugent trop géométrique. À votre avis, en quoi cet aspect de la démonstration pose-t-il problème ?

Point Histoire 
Augustin-Louis de Cauchy (1789-1857) est membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. C'est un des mathématiciens les plus prolifiques de l'histoire. Son nom est inscrit sur la tour Eiffel.

Activité 3

Objectif

Découvrir le théorème des valeurs intermédiaires.

⇒ Cours 2
Équation $f'(x) = k$
avec f' continue

Animation

Théorème des valeurs intermédiaires : encadrement de la racine



CALC

Toujours à la surface

On considère un récipient cylindrique de rayon 6 cm qui contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm.

On plonge une bille de rayon x ($0 \leq x \leq 6$ en cm).

Est-ce que l'eau affleure le dessus de la bille ?



1 Démontrer que le volume d'eau dans le récipient est $V_1 = 180\pi$ (en cm^3).

2 Déterminer le volume V_2 de la bille en cm^3 .

3 a. Démontrer que le volume V_3 de l'ensemble formé de la bille et de l'eau après immersion de la bille peut aussi s'écrire $V_3 = 72\pi x$ en cm^3 .

b. En déduire que le problème revient à résoudre sur l'intervalle $[0; 6]$, l'équation suivante :
$$4x^3 - 216x + 540 = 0.$$

4 a. À l'aide de la calculatrice, représenter la courbe de la fonction f définie sur $[0; 6]$ par :
$$f(x) = 4x^3 - 216x + 540.$$

b. Conjecturer alors le nombre de solutions au problème posé et une valeur approchée à 0,1 près de chacune de ces solutions.

Activité 4

Objectif

Découvrir le lien entre la convexité d'une fonction f , les variations de sa dérivée f' et la position relative de $\mathcal{C}_f$ avec ses tangentes.

⇒ Cours 3
Convexité d'une fonction

Animation

Convexité : lien entre courbe et dérivée



GÉOMÉTRIE

Position d'une courbe par rapport à ses tangentes

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative ci-contre. Soit M un point mobile de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a; f(a))$ et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M .

1 À l'aide du graphique, conjecturer la convexité de la fonction f .

2 On déplace le point M sur la courbe $\mathcal{C}_f$.

a. Observer la position relative de T par rapport à $\mathcal{C}_f$.

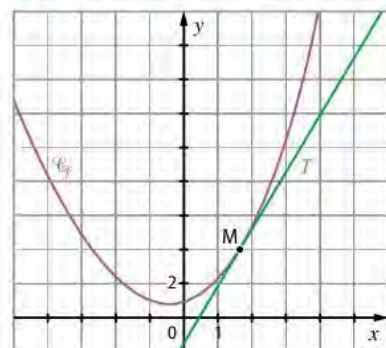
b. Que remarque-t-on ?

3 Avec la fonction **pente** du logiciel, on a créé le point $N(a, m)$ où m est le coefficient directeur de la tangente T . On déplace le point M , et on fait afficher la trace du point N .

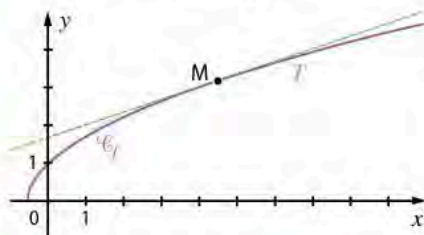
a. Justifier que le point N appartient à la courbe représentative de la fonction dérivée de f .

b. Conjecturer le sens de variation de la fonction f' .

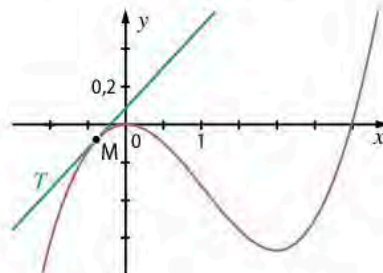
4 On considère désormais les deux exemples suivants.



Exemple 1



Exemple 2



a. Reprendre les questions 1 à 3 pour l'exemple n° 1.

b. Reprendre les questions 1 à 3 pour l'exemple n° 2.

5 Pour cet exemple 2, quelle est la position relative de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 ? Que peut-on dire de la convexité de f en 1 ?

Fichier GeoGebra/Cabri

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

1. Continuité et applications

Continuité

Point Histoire



Karl Weierstrass
(1815-1897), professeur à Berlin, donne vers 1850 la première définition rigoureuse et formelle de la continuité d'une fonction.

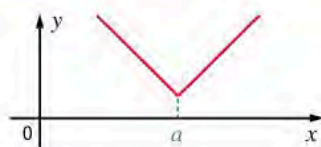
À noter

La courbe représentative d'une fonction définie et continue sur un intervalle se trace « sans lever le crayon ».

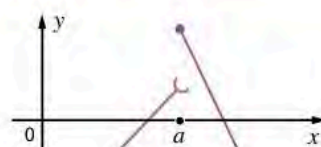
À noter

Dans un tableau de variation, on admet que les flèches traduisent la continuité ainsi que la stricte monotonie de la fonction.

DÉFINITION Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$; on dit que f est continue en a , si la limite de f en a , existe. Autrement dit : f est continue en a équivaut à $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



f est continue en a .



f n'est pas continue en a .

DÉFINITION Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; on dit que f est continue sur I lorsque pour tout réel a appartenant à I , f est continue en a .

PROPRIÉTÉS (ADMISES) (1) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la somme $f+g$, le produit $\lambda \times f$, le produit $f \times g$, et f^n (où n est un naturel non nul) sont continus sur I . Si de plus g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

(2) Soit v une fonction continue sur un intervalle J et u une fonction continue sur un intervalle I tel que pour tout réel x de I , $u(x)$ appartient à J . La fonction composée $v \circ u$ est continue sur I .

PROPRIÉTÉ (ADMISE) Si f est dérivable sur un intervalle I , alors f est continue sur I .

Image d'une suite par une fonction continue

Animation

Suites récurrentes
 $u_{n+1} = f(u_n)$



PROPRIÉTÉS (ADMISES) (1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que u_n appartient à I pour tout entier naturel n . Si (u_n) converge vers un réel L appartenant à I et si f est continue en L , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(L)$.
(2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite (u_n) converge vers un réel L , alors L vérifie $f(L) = L$.

Construction des premiers termes d'une suite (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-contre et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,3$ et pour tout naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

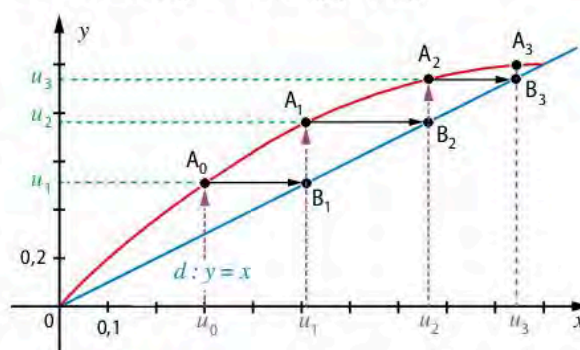
On utilise la courbe $\mathcal{C}_f$ de f et la droite d d'équation $y = x$ pour construire pas à pas les premiers termes de la suite (u_n) .

On place u_0 sur l'axe des

abscisses puis on construit le point A_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0 . L'ordonnée de A_0 est $f(u_0) = u_1$.

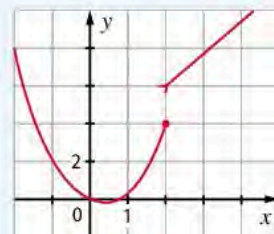
On construit ensuite le point B_1 de la droite d ayant même ordonnée que A_0 c'est-à-dire u_1 .

Comme d a pour équation $y = x$, l'abscisse de B_1 est égale à l'ordonnée de B_1 soit u_1 . Puis on répète le procédé en construisant le point A_1 d'abscisse u_1 et d'ordonnée $u_2 = f(u_1)$, etc.



Étudier la continuité d'une fonction

On considère une fonction définie sur $[-2; 4]$ dont on donne la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre.



- 1 La fonction f est-elle continue en 2 ?
- 2 La fonction f est-elle continue en -1 ?

Solution commentée

- 1 Il y a un « saut » pour la courbe $\mathcal{C}_f$ au niveau du point abscisse 2 : f n'est donc pas continue en 2.
- 2 Il n'a pas « de saut » pour la courbe $\mathcal{C}_f$ au niveau du point abscisse -1, la fonction f est donc continue en -1.

Conseil

Pour étudier la continuité en un point, on observe si la courbe a été tracée « sans lever le crayon ».

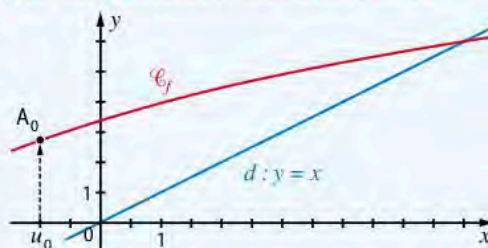
Voir exercices

43 Pour s'entraîner

96 Pour travailler en autonomie

Étudier une suite définie par une relation de récurrence

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x+3}$. On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ainsi que la droite d d'équation $y = x$.



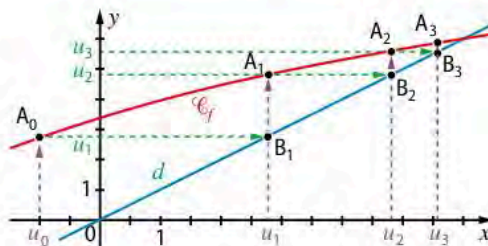
- 1 Sur l'axe des abscisses, on a placé u_0 . Reproduire ce schéma et construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
- 2 Étudier les variations de f sur $[-2; +\infty[$.
- 3 Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.
- 4 Justifier que (u_n) converge vers un réel L puis déterminer L .

Méthode

Pour étudier les variations d'une suite (u_n) définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on utilise les variations de f .

Solution commentée

- 1 On construit le point A_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0 , puis le point B_1 de d ayant même ordonnée que A_0 . L'abscisse de B_1 est u_1 . On poursuit le processus jusqu'à obtenir u_3 .



- 2 Pour tout réel x de $[-2; +\infty[$, $f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ donc $f'(x) > 0$; ainsi f est croissante sur $[-2; +\infty[$.
- 3 Pour tout naturel n , soit $P(n)$, la propriété : « $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ ».
Initialisation : $u_0 = -1$ et $u_1 = 4$ donc $-2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un naturel fixé tel que $P(k)$ est vraie. On va prouver que $P(k+1)$ est vraie. Puisque $-2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 6$ et f est croissante sur $[-2; +\infty[$, on a : $f(-2) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(6)$ or $f(-2) = 2$ et $f(6) = 6$, donc $-2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 6$. $P(k+1)$ est vraie.
 La propriété est initialisée, héréditaire, donc vraie pour tout naturel n .
 La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 6.
- 4 La suite (u_n) est croissante majorée donc elle converge vers un réel L .
 La fonction f est continue sur $[-2; +\infty[$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ donc L vérifie $L = f(L)$. L'équation $f(x) = x$ équivaut à $2\sqrt{x+3} = x$ soit, puisque chaque membre de cette équation est positif, à $4(x+3) = x^2$, ce qui équivaut à $x^2 - 4x - 12 = 0$. Cette équation a pour solutions -2 et 6. Or puisque $u_0 = -1$ et (u_n) est croissante, on en déduit que $L = 6$.

Voir exercices

47 Pour s'entraîner

97 Pour travailler en autonomie

2. Équation $f(x) = k$ avec f continue

Théorème des valeurs intermédiaires

À noter

L'hypothèse de continuité est fondamentale pour ce théorème.

Démonstration

Voir exercice 119 page 224

Animation

Théorème des valeurs intermédiaires : encadrement de la racine



Vocabulaire

Un corollaire est aussi un théorème. C'est une conséquence d'un autre théorème.

Démonstration

Voir page 210

Point Histoire



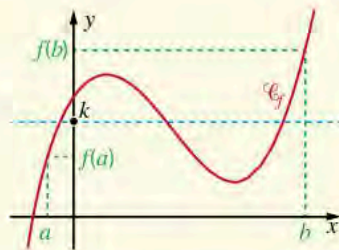
C'est en 1821 que le mathématicien Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) énonce le théorème des valeurs intermédiaires puis en donne une démonstration.

Vocabulaire

Le mot dichotomie vient du grec *dikha* (en deux) et *tomein* (couper), ce qui signifie littéralement « couper en deux ».

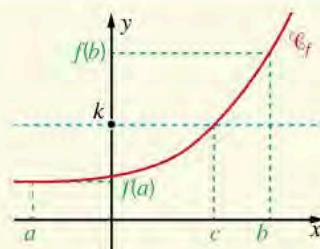
THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (ADMIS)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b sont deux réels dans I .
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



COROLLAIRE

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$, alors, pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.



- **Cas particulier :** Dans le cas particulier où $k = 0$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires : si f est continue strictement monotone sur $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a; b[$.
- **Extension du théorème :** On peut également appliquer le corollaire dans le cas d'un intervalle du type $[a; b[$, $]a; b]$ ou $]a; b[$, a et b pouvant être $+\infty$ ou $-\infty$. On remplace alors le calcul de $f(a)$, par exemple par un calcul de limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

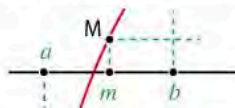
Méthodes d'encadrement

Parmi les méthodes pour déterminer un encadrement de la solution d'une équation du type $f(x) = k$, il en existe deux simples : la méthode de balayage et la méthode de dichotomie.

Encadrement d'une solution par dichotomie

Le principe est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution α , en divisant par deux l'amplitude de l'intervalle à chaque étape.

Pour cela, on calcule le milieu m de l'intervalle $[a; b]$ puis on regarde si la solution α se trouve dans $[a; m]$ ou bien dans $[m; b]$.



Si la solution est dans $[a; m]$, on réitère le procédé dans $[a; m]$.



Si la solution est dans $[m; b]$, on réitère le procédé dans $[m; b]$.

EXEMPLE : Encadrement par la méthode de dichotomie de l'unique solution sur $[-3; 2]$, de l'équation $x^3 - 5x + 2 = 0$.

REMARQUES : f doit être une fonction continue, strictement monotone sur l'intervalle $[a; b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires ; e est l'amplitude de l'encadrement demandé.

Pour tester si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires, on teste le signe de leur produit. Cet algorithme ne teste pas le cas où m est la solution ! L'appel `dichotomie(-3, -2, 0, 1)` renvoie : $(-2, 4375, -2, 375)$.

```
1 from math import *
2 def f(x):
3     y=x**3-5*x+2
4     return y
5 def dichotomie(a,b,e):
6     while(b-a)>=e:
7         m=(a+b)/2
8         if f(a)*f(m)<0:
9             b=m
10        else:
11            a=m
12        return a,b
```


Vidéo 07:39

Appliquer
le théorème
des valeurs
intermédiaires

CAPACITÉ

3

Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- 1 Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.
- 2 a. Justifier que f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

Méthode

Pour appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on vérifie que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré.

Voir exercices

53 Pour s'entraîner

99 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- 1 La fonction f continue car f est une fonction polynôme. De plus $f(0) = 1$ et $f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 1 = -1$ donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$. On déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.
- 2 a. On calcule la dérivée de f : $f'(x) = 3x^2 - 3$ pour tout x de $[0; +\infty[$. Pour tout x tel que $x > 1$, on a $x^2 > 1^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. On déduit donc que pour tout x tel que $x > 1$, $3x^2 > 3$ soit $3x^2 - 3 > 0$. Comme $f'(x)$ est strictement positif pour tout x de $]1; +\infty[$, on en déduit que f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
b. Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante.
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -1$ et $f(2) = 2^3 - 3 \times 2 + 1 = 3$. 0 appartient à l'intervalle $[-1; 3]$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

Vidéo 15:43

Donner un
encadrement
de la solution
d'une équation
du type $f(x) = k$ 

CAPACITÉ

4

Donner un encadrement de la solution d'une équation

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.On a démontré dans la **capacité 3** que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$. On note α cette solution.

- 1 **CALC** Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α par « balayage » avec la calculatrice.
- 2 La fonction dichotomie étant celle définie dans le cours p. 204, que renvoie l'appel `dichotomie(1, 2, 0.1)` pour la fonction f définie ci-dessus ?

Solution commentée

- 1 α est compris entre 1 et 2 puisque $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$. Avec la calculatrice, on obtient un tableau des valeurs $f(x)$ pour x variant de 1 à 2 avec un pas de 0,1. On détermine ainsi un encadrement de α d'amplitude 0,1 : $1,5 < \alpha < 1,6$. On obtient ensuite un tableau des valeurs $f(x)$ pour x variant de 1,5 à 1,6 avec un pas de 0,01 et donc un encadrement de α d'amplitude 0,01 : $1,53 < \alpha < 1,54$.

X	Y _i
1	-1
1.1	-0.969
1.2	-0.872
1.3	-0.703
1.4	-0.456
1.5	-0.125
1.6	0.296
1.7	0.813
1.8	1.432
1.9	2.159
2	3

X	Y _i
1.5	-0.125
1.51	-0.087
1.52	-0.048
1.53	-0.008
1.54	0.0323
1.55	0.0739
1.56	0.1164
1.57	0.1599
1.58	0.2043
1.59	0.2497
1.6	0.296

 $X=1.5$

- 2 On peut « faire tourner » l'algorithme en s'aidant d'un tableau.

Étapes	m	f(a)	f(m)	f(a) × f(m)	a	b	b - a	Condition : b - a ≥ 0,1
Entrée					1	2	1	Vraie
1	1,5	-1	-0,125	positif	1,5	2	0,5	Vraie
2	1,75	-0,125	1,1094	négatif	1,5	1,75	0,25	Vraie
3	1,625	-0,125	0,416	négatif	1,5	1,625	0,125	Vraie
4	1,5625	-0,125	0,127 2	négatif	1,5	1,562 5	0,062 5	Fausse

En fin d'algorithme on a : $a = 1,5$ et $b = 1,562 5$.

Conseil

Pour déterminer ce qu'affiche un algorithme, on peut s'aider d'un tableau dans lequel on indique les valeurs des variables à chaque étape.

Voir exercices

55 Pour s'entraîner

100 Pour travailler en autonomie

3. Convexité d'une fonction

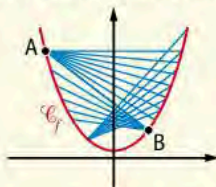
Fonction convexe

À noter

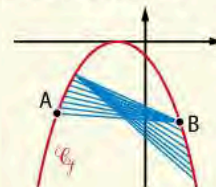
Pour une fonction convexe, on dit que la courbe est « au-dessous » de ses sécantes.

DÉFINITIONS Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

(1) Si pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}_f$ la courbe $\mathcal{C}_f$ est située « au-dessous » du segment $[AB]$ alors on dit que la fonction f est **convexe** sur I .



(2) Si pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}_f$ la courbe $\mathcal{C}_f$ est située « au-dessus » du segment $[AB]$ alors on dit que la fonction f est **concave** sur I .



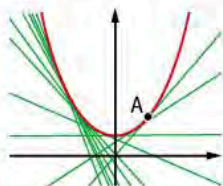
Animation

Convexité : lien entre courbe et dérivée

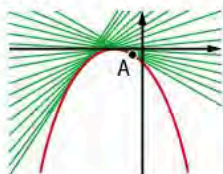


À noter

Exemple de courbe d'une fonction convexe



Exemple de courbe d'une fonction concave



À noter

La condition « f'' s'annule » n'est pas une condition suffisante, il faut aussi que f'' change de signe en ce point pour qu'il y ait un point d'inflexion.

Convexité des fonctions deux fois dérivables

PROPRIÉTÉS (ADMISES) Soit f une fonction définie, deux fois dérivable sur un intervalle I . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I .
- f' est croissante sur I .
- f'' est positive sur I .
- $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de ses tangentes.
- De même les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est concave sur I .
- f' est décroissante sur I .
- f'' est négative sur I .
- $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de ses tangentes.

REMARQUE : une fonction convexe croissante croît de plus en plus fortement et une fonction convexe décroissante décroît de plus en plus faiblement.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

On va démontrer l'implication :

« si f'' est positive sur I alors la courbe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes ».

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et telle que f'' est positive sur I . Soit a un réel de I . Une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Soit g la fonction définie pour tout réel x de I par $g(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$; g est dérivable sur I et pour tout réel x de I : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Comme f'' est positive sur I , f' est une fonction croissante sur I donc si $x \leq a$, on a $f'(x) \leq f'(a)$ d'où $f'(x) - f'(a) \leq 0$ soit $g'(x) \leq 0$.

De même, si $x \geq a$, $f'(x) - f'(a) \geq 0$ soit $g'(x) \geq 0$.

g admet donc un minimum en a et $g(a) = 0$.

On en déduit que g est toujours positive sur I ; la courbe de f est donc au-dessus de sa tangente en a , donc de toutes les tangentes.

DÉFINITION Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

On dit qu'un point A de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion lorsque, en ce point la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.

PROPRIÉTÉS (ADMISES) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- (1) Le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si la convexité de f change en a .
- (2) Si de plus f est deux fois dérivable sur I , alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a .

Vidéo 04:15

Reconnaître
graphiquement
la convexité

CAPACITÉ

5

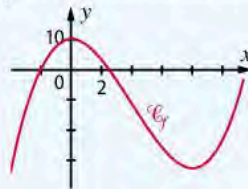
Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

Dans chacun des cas ci-dessous :

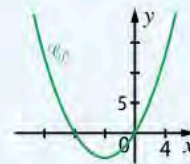
- déterminer par lecture graphique les intervalles sur lesquels la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, est convexe et les intervalles sur lesquels elle est concave ;
- préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

a. On donne sur le **graphique 1** la courbe représentative de la fonction f .

b. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne sur le **graphique 2** la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la fonction dérivée de f .



Graphique 1



Graphique 2

Méthode

Pour déterminer graphiquement la convexité d'une fonction, on peut observer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes.

Voir exercices

68 Pour s'entraîner

102 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

a. La fonction f est concave sur $]-\infty; 4]$ car sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessous de ses tangentes. Puis, la fonction f est convexe sur $[4; +\infty[$ car sur cet intervalle $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de ses tangentes. Le point d'abscisse 4 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ puisque f change de convexité en $x = 4$.

b. On conjecture que f' est décroissante sur $]-\infty; -4]$ donc f est concave sur cet intervalle puis f' est croissante sur $[-4; +\infty[$ donc f est convexe sur cet intervalle. Le point d'abscisse -4 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ puisque f change de convexité en $x = -4$.

CAPACITÉ

6

Esquisser la courbe $\mathcal{C}_f$ à partir de f, f' et f''

1 On donne le tableau de variation d'une fonction f et celui de sa fonction dérivée f' . Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

x	-1	0	4	6
f	0	6	-26	6

x	-1	2	6
f'	15	-12	36

2 On donne le tableau de variation d'une fonction f et celui de sa fonction dérivée seconde f'' . Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

x	-1	0	2	3
f	2	-2	2	-2

x	-1	1	3
f''	12	0	-12

Méthode

Pour tracer une courbe connaissant les tableaux de variation de f et f'' , on utilise d'abord le tableau de variations de f puis celui de f'' .

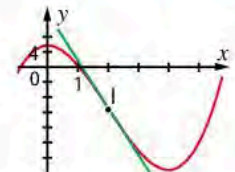
Voir exercices

72 Pour s'entraîner

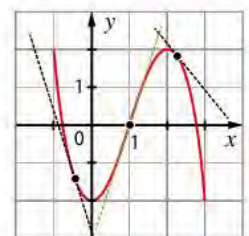
103 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

1 $\mathcal{C}_f$ passe par les points $A(-1; 0)$, $B(0; 6)$, $C(4; -26)$ et $D(6; 6)$. De plus, sur $[-1; 2]$, f est concave car f' est décroissante sur cet intervalle, puis sur $[2; 6]$, f est convexe car f' est croissante sur cet intervalle. En tenant compte de la convexité et des variations de f , on trace une courbe pouvant représenter la fonction f .



2 D'après le tableau de variation de f , $\mathcal{C}_f$ passe par les points $A(-1; 2)$, $B(0; -2)$, $C(2; 2)$ et $D(3; -2)$. On place ces points dans le repère. Sur $[-1; 1]$, f'' est positive donc f est convexe, et sur $[1; 3]$, f'' est négative donc f est concave. En tenant compte de la convexité et des variations de f , on trace une courbe pouvant représenter la fonction f .



Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
 - Montrer que f est convexe.
 - Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
 - En déduire que quel que soit le réel x : $e^x \geq x + 1$.
- Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
 - Étudier la convexité de f .
 - Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
 - En déduire que pour tout réel x de $[0; +\infty[$: $\sqrt{1+x} \leq 1 + 0,5x$.
- En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tous réels a et b : $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

Méthode

Pour établir une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction f , on peut utiliser la position relative de $\mathcal{C}_f$ avec une de ses tangentes.

Solution commentée

- Pour tout réel x : $f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$ donc $f''(x) > 0$.
On en déduit que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
 - Une équation de la tangente en 0 est donnée par $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
Or $f'(0) = e^0 = 1$ et $f(0) = e^0 = 1$ donc T a pour équation $y = 1 \times (x - 0) + 1$ soit $y = x + 1$.
 - La fonction f étant convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse 0 donc quel que soit le réel x : $e^x \geq x + 1$.

- Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$
donc $f''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+x}^3}$.

En utilisant la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction, on obtient :

$$f''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{(\sqrt{1+x})^2} \text{ soit } f''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2\sqrt{1+x}^3} \times \frac{1}{1+x}$$

$$\text{donc } f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}^3};$$

ainsi pour tout réel x de $[0; +\infty[$: $f''(x) < 0$ donc f est concave sur $[0; +\infty[$.

- Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe de f est donnée par : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ c'est-à-dire $y = 0,5x + 1$.
- Comme f est concave, sa courbe est située en dessous de toutes ses tangentes, en particulier, celle au point d'abscisse 0, donc pour tout réel x de $[0; +\infty[$: $\sqrt{1+x} \leq 1 + 0,5x$.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit a et b deux réels, on note A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b : A ($a; e^a$) et B ($b; e^b$).
Comme la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de $\mathcal{C}_f$.
Le milieu M de $[AB]$ est donc situé au-dessus du point N de $\mathcal{C}_f$ ayant la même abscisse que M. Le point M a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{e^a + e^b}{2}\right)$ et le point N a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}; e^{\frac{a+b}{2}}\right)$, on déduit donc : $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.
On a démontré que pour tous réels a et b : $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

Voir exercices

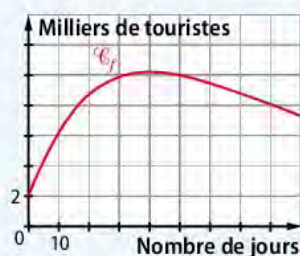
89 Pour s'entraîner

107 Pour travailler en autonomie



Étudier et utiliser la convexité d'une fonction dans la résolution de problème

La fréquentation de touristes d'une station balnéaire pour l'été 2019 a été modélisée par une fonction f , définie sur $[0 ; 90]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-contre ; x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $f(x)$ désigne la fréquentation en milliers de touristes, ainsi $f(30)$ représente le nombre de touristes qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.



On estime qu'un touriste utilise chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau.

- 1 Dans cette question, les réponses sont à fournir par lecture graphique.
 - a. Estimer le nombre maximal de touristes présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2019 et préciser à quelle date ce maximum serait atteint.
 - b. La commune peut fournir 600 000 litres d'eau par jour. Est-ce suffisant ?
- 2 Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu.
- 3 On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 90]$ par :

$$f(x) = 2 + 0,2x e^{-0,025x+1}.$$
 - a. Démontrer que la fonction dérivée est $f'(x) = 0,2(1 - 0,025x)e^{-0,025x+1}$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 90]$.
 - c. Donner le jour où la fréquentation est maximale.
 - d. En prenant 50 litres comme consommation quotidienne par habitant, calculer la consommation le jour où la fréquentation est maximale.
- 4 On admet que pour tout réel $x \in [0 ; 90]$, $f''(x) = 0,000\,125e^{-0,025x+1}(-80 + x)$. En justifiant la démarche, déterminer la valeur de x à partir de laquelle la fréquentation va décroître moins rapidement et déterminer alors le jour correspondant.

Méthode

Pour déterminer la valeur à partir de laquelle une fonction décroît moins rapidement, on cherche la valeur pour laquelle cette fonction change de convexité.

Solution commentée

- 1 a. Le point de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée maximale est A(40 ; 10). Ainsi le nombre maximal de touristes présents dans cette station est égal à 10 milliers soit 10 000. Ce nombre maximal de personnes est atteint 40 jours après le 1^{er} juillet c'est-à-dire le 10 août.
b. Les 10 000 habitants vont consommer entre 450 000 et 550 000 litres donc la réserve de 600 000 litres est suffisante.
- 2 80 % de 10 000 habitants est égal à 8 000 habitants. On résout graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 8$. Cette inéquation a pour solution l'intervalle $[17 ; 79]$. Comme $79 - 17 = 62$, donc le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu pendant 62 jours.
- 3 a. Pour tout réel x de $[0 ; 90]$, $f'(x) = 0,2e^{-0,025x+1} + 0,2x(-0,025)e^{-0,025x+1}$ donc $f'(x) = 0,2e^{-0,025x+1}(1 - 0,025x)$.
b. Pour tout réel x de $[0 ; 90]$: $0,2e^{-0,025x+1} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 0,025x$. Or $1 - 0,025x \geq 0$ équivaut à $1 \geq 0,025x$ donc à $40 \geq x$. Pour tout réel x de $[0 ; 40]$, $f'(x) \geq 0$ et pour tout réel x de $[40 ; 90]$, $f'(x) \leq 0$.
c. La fonction f est donc croissante sur $[0 ; 40]$ et décroissante sur $[40 ; 90]$: on retrouve que la population est maximale pour $x = 40$, soit le 10 août.
d. $f(40) = 10$ et $10\,000 \times 50 = 500\,000$. La consommation le jour où la population est maximale est de 500 000 litres.
- 4 Pour tout réel x de $[0 ; 90]$, $f''(x) = 0,000\,125e^{-0,025x+1}(-80 + x)$. Comme $0,000\,125e^{-0,025x+1} > 0$ pour tout réel x , $f''(x) \geq 0$ équivaut à $-80 + x \geq 0$ soit à $x \geq 80$. On en déduit que la fonction f est concave sur $[0 ; 80]$ et convexe sur $[80 ; 90]$. À partir du 80^e jour, soit le 19 septembre, la fréquentation décroît moins rapidement.

Étudier une démonstration

On souhaite démontrer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

PROPRIÉTÉ DU COURS 2 PAGE 204 Soit une fonction f définie sur un intervalle I , a et b deux valeurs de I avec $a < b$. Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ alors, pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution dans I .

Bon à savoir !

On est en présence d'un problème d'existence et d'unicité : on doit d'abord démontrer que l'équation a une solution, puis que celle-ci est unique.

RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

Existence : Par hypothèse, on sait que f est continue sur $[a; b]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

Unicité : On suppose que l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions distinctes c_1 et c_2 dans $[a; b]$. Ainsi, $f(c_1) = f(c_2) = k$.

Par hypothèse, f est strictement monotone sur $[a; b]$.

Supposons, par exemple, que f soit strictement croissante sur $[a; b]$.

Alors $c_1 \neq c_2$ implique que : $a \leq c_1 < c_2 \leq b$ ou bien $a \leq c_2 < c_1 \leq b$.

De plus, f étant strictement croissante sur $[a; b]$, on en déduit que :

$f(a) \leq f(c_1) < f(c_2) \leq f(b)$ ou bien $f(a) \leq f(c_2) < f(c_1) \leq f(b)$.

Et donc $f(c_1) \neq f(c_2)$. On aboutit à une contradiction puisque $f(c_1) = f(c_2)$.

Donc $c_1 = c_2$, ce qui prouve que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

En raisonnant de manière analogue, on obtient la même conclusion dans le cas où f est strictement décroissante sur $[a; b]$.

Conclusion : L'équation $f(x) = k$ admet une solution c appartenant à $[a; b]$, qui est unique.

QUESTIONS

1. Comment s'appelle le type de raisonnement utilisé entre les lignes 4 et 13 ?
2. Expliquer ce qui permet d'affirmer que $f(c_1) \neq f(c_2)$ à la ligne 11.
3. À la ligne 5, pourquoi peut-on dire que $f(c_1) = f(c_2)$?
4. Reprendre la démonstration, dans le cas évoqué ligne 14.

Faire une démonstration

Bon à savoir !

Il s'agit de démontrer une implication.

D1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Piste : Utiliser la fonction g définie pour tout réel x de I différent de a par $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

D2 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

Démontrer que si la suite (u_n) converge vers un réel L , alors L vérifie $L = f(L)$.

Piste : Commencer par démontrer que si (u_n) converge vers L alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}$ pour tout entier n converge également vers L .

Calcul mental

- 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $5x + 20 = -10$.
- 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $4x - 10 \geq 6$.
- 3 Calculer la dérivée des fonctions f , g , h et k définies sur $]0; +\infty[$ par :
 - a. $f(x) = x^2 + x + 1$
 - b. $g(x) = x^4 - 8x^2$
 - c. $h(x) = e^x + 2x$
 - d. $k(x) = 5x + \frac{2}{x}$
- 4 Factoriser dans $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 36$ et $g(x) = x^2 + 4x$.
- 5 1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x$. Calculer $f(1)$.
2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 3)^2 + 9$. Calculer $g(3)$.
- 6 Calculer le nombre dérivé en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.
- 7 Calculer et simplifier : $A = \frac{e^{10}}{e^6}$ et $B = e \times e^5$

Automatismes

Calculs numériques et algébriques

- 8 Factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :
 $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ et $g(x) = 2x^2 + 14x + 20$.
- 9 Développer et réduire les expressions algébriques suivantes :
 - a. $A(x) = 2x(x - 7) + (4x + 2)(7 - 5x)$
 - b. $B(x) = x^2(2 + x) - (x + 9)(5 - 3x)$
- 10 Question de méthode
 1. Comment peut-on procéder pour résoudre l'inéquation :
 $x^2 - 5x + 6 \geq 0$?
 2. Comment peut-on procéder pour résoudre l'inéquation :
 $x^2 + 5x \leq 14$?
- 11 Résoudre chacun des systèmes suivants où les variables x et y sont des réels.
 - a. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$
 - b. $\begin{cases} 4x + 5y = 17 \\ -2x + 4y = 11 \end{cases}$
- 12 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.
1 400 m² sont égaux à :
 - a. 1,400 km²
 - b. $1,4 \times 10^{-3}$ km²
 - c. $1,4 \times 10^7$ cm²
 - d. 140 000 cm²

Fonctions

- 13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 2$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
- 14 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 6$.
Étudier les variations de g .
- 15 Étudier les variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^x$ et $g(x) = \frac{x}{e^x}$.

- 16 Simplifier les expressions suivantes :

$$a = \frac{(e^5 \times e^{-4})^2}{e^3} \quad b = \frac{(e^6)^3}{(e^2)^{-3}} \quad c = \left(\frac{e^x}{e^{-x}} \right)^3$$

- 17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(e^x - e^5)(e^x - 1) = 0$.
2. $\frac{e^{x+1}}{e^{3x+1}} = 1$

Algorithmique et programmation

- 18 On considère le script d'une fonction Python donné ci-contre.

```

1 def f(a, b):
2     a = a - b
3     b = a + b
4     a = b - a
5     return a, b

```

1. a. Indiquer ce que renvoie l'appel $f(10, 40)$.
- b. Que renvoie l'appel $f(20, 60)$?
2. Que fait, de façon générale, cette fonction f ?

19 VRAI/FAUX

On donne ci-contre le script d'une fonction Python.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

```

1 def f(x):
2     y = x
3     x = x + 1
4     x = x ** 2
5     x = x - y ** 2
6     return x

```

- a. L'appel $f(4)$ renvoie 9.
- b. Pour tout entier x , l'appel $f(x)$ renvoie un entier impair.

- 20 Compléter le script incomplet ci-dessous pour que l'appel $\text{Somme}(a)$ où a est un entier naturel non nul, renvoie la somme des a premiers entiers naturels non nuls.

```

1 def Somme(a):
2     s = 0
3     for i in range(1, ...):
4         s = ... + ...
5     return s

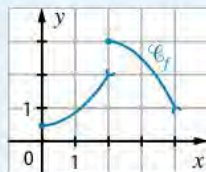
```

- 21 1. Générer en compréhension, la liste L des 100 premiers multiples non nuls de 7.
2. Générer en compréhension, la liste G des carrés des éléments de L .

Continuité d'une fonction

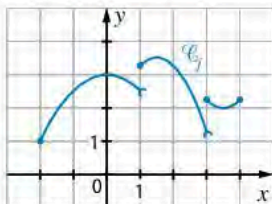
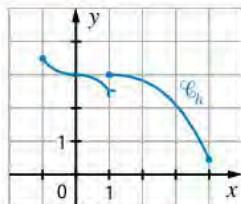
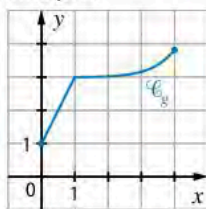
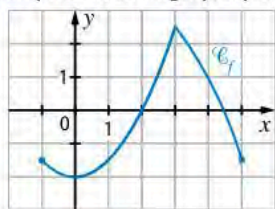
Questions flash

22 ORAL Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ et dont on donne la représentation graphique dans un repère.



1. La fonction f est-elle continue en 3 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

23 Soit f, g, h et j des fonctions dont on donne ci-dessous la représentation graphique dans un repère.



1. Quelles sont les fonctions continues sur leur intervalle de définition ?
2. Pour celles qui ne sont pas continues, préciser en quels points.

Suites récurrentes

Questions flash

24 ORAL VRAI/FAUX Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout naturel n . Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- a. $u_1 = 10$ b. $u_2 = 5$

25 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 7$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

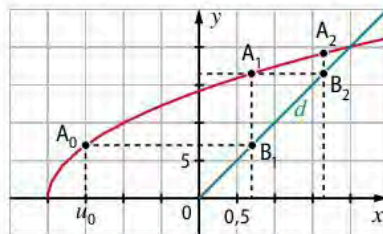
Le terme u_1 est égal à :

- a. 7 b. 23 c. 9 d. 53

26 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1, u_2 et u_3 .

27 Soit une fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . On a représenté ci-après la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite d d'équation $y = x$.

Le point A_0 est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0 . On a construit les points B_1, A_1, B_2 et A_2 comme indiqué sur le graphique.



1. À quel terme de la suite (u_n) l'ordonnée de A_0 est-elle égale ?
2. Exprimer les coordonnées des points B_1, A_1, B_2 et A_2 à l'aide des premiers termes de la suite (u_n) .

28 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

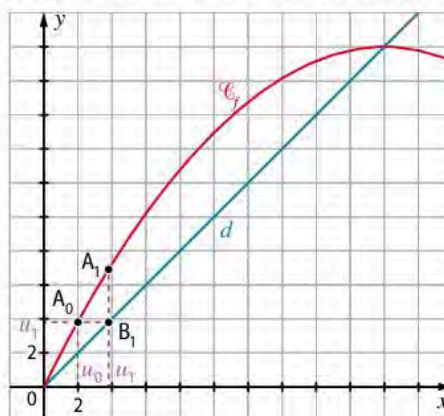
$$f(x) = -\frac{1}{20}x(x - 40)$$

et (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite d d'équation $y = x$.

On a ensuite placé le point A_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0 , puis construit les points B_1 de d et A_1 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_1 .

1. Reproduire le graphique et poursuivre la construction pour obtenir les termes u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .



Théorème des valeurs intermédiaires

Question flash

29 ORAL Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On sait que $f(-7) = -3$ et $f(2) = 1$.

Justifier à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

30 Soit f la fonction définie sur $[-3; 3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x + 1.$$

1. Calculer $f(-3)$ et $f(3)$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[-3; 3]$.
3. Pourquoi l'équation $f(x) = 6$ admet-elle au moins une solution sur l'intervalle $[-3; 3]$?

31 PYTHON Compléter un programme

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Compléter le script de la fonction `sol` afin que celle-ci retourne le booléen `True` si l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$ et `False` sinon.

```
1 def sol(a,b):
2     y1=f(a);y2=f(b)
3     if ... :
4         return True
5     else:
6         return False
```

32 On donne le tableau de variation d'une fonction polynôme f .

x	5	8
$f(x)$	4	-9

- Pourquoi peut-on affirmer que f est continue sur $[5; 8]$?
- a. Donner les valeurs $f(5)$ et $f(8)$.
b. Justifier à l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[5; 8]$.

33 Soit f la fonction définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = x^3 + x - 9$.

- a. Calculer $f'(x)$.
b. Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[0; 4]$.
c. Calculer $f'(0)$ et $f'(4)$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0; 4]$.
- a. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
b. En déduire un encadrement de α par deux entiers.

34 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; 5]$ par :

$$f(x) = 0,1x^9 - 1\,000.$$

- Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[1; 5]$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution dans $[2; 3]$.

On appelle α cette solution.

- Avec la calculatrice, on obtient le tableau de valeurs ci-contre.

X	Y1
2	-948,8
2.1	-920,6
2.2	-879,3
2.3	-819,9
2.4	-735,8
2.5	-618,5
2.6	-457
2.7	-237,4
2.8	57,846
2.9	450,71
3	968,3

Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α .

35 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par $f(x) = x^3 + x - 4$.

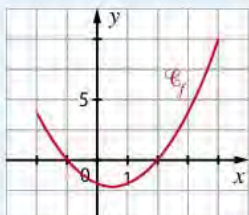
On appelle α l'unique solution de l'équation $f(x) = 50$ sur $[3; 4]$. Avec la calculatrice, on obtient le tableau de valeurs ci-contre. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α .

X	Y1
3.63	47,462
3.64	47,869
3.65	48,277
3.66	48,688
3.67	49,101
3.68	49,516
3.69	49,933
3.7	50,353
3.71	50,775
3.72	51,199
3.73	51,625

Convexité d'une fonction

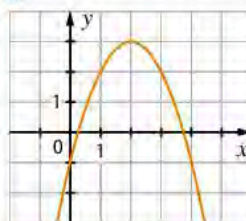
Question flash

36 ORAL Soit f une fonction définie sur $[-2; 4]$ et dont on donne ci-contre la représentation graphique dans un repère. Expliquer pourquoi la fonction f est convexe sur $[-2; 4]$.

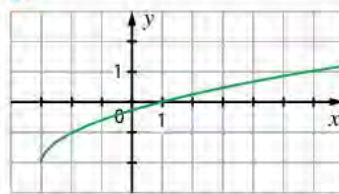


37 Expliquer pourquoi chacune des deux fonctions représentées ci-dessous dans un repère est concave.

a.



b.



38 VRAI/FAUX

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

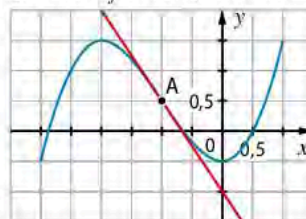
- Si la fonction f' est croissante sur $[4; 7]$ alors f est concave sur cet intervalle.
- Si $f''(x) > 0$ pour tout réel x de $[-1; 2]$, alors f est convexe sur cet intervalle.

39 LOGIQUE Soit la proposition : « Toute fonction polynôme du second degré est convexe sur $\mathbb{R}$. »

- Cette proposition est-elle vraie ou fausse ?
- Écrire la négation de cette proposition. Est-elle vraie ?

40 Soit f une fonction définie sur $[-3; 1]$.

On donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point A d'abscisse -1.



- Expliquer pourquoi A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- Expliquer pourquoi f est concave sur $[-3; -1]$ et est convexe sur $[-1; 1]$.

41 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[-7; 10]$. On donne ci-dessous le tableau de signes de sa fonction dérivée seconde.

x	-7	-1	2	10
$f''(x)$	-	0	+	+

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

- f est convexe sur $[-1; 2]$.
- f est concave sur $[-5; 0]$.
- Le point A d'abscisse -1 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.
- Le point B d'abscisse 2 de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.

42 LOGIQUE Soit la proposition :

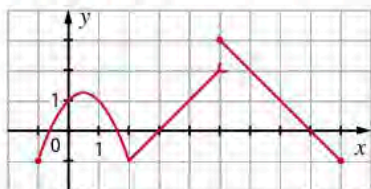
« Il existe une fonction polynôme du troisième degré dont la courbe n'a pas de point d'inflexion. »

- Cette proposition est-elle vraie ou fausse ?
- Écrire la négation de cette proposition. Est-elle vraie ?

Continuité d'une fonction

43 Capacité 1, p. 203

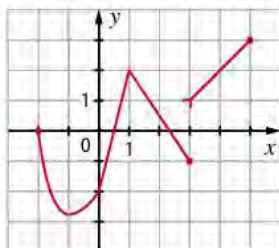
Soit f une fonction définie sur $[-1; 9]$ dont on donne la courbe représentative ci-dessous.



1. La fonction f est-elle continue en 5 ?
2. La fonction est-elle continue sur $[-1; 3]$?

44 Soit f une fonction définie sur $[-2; 5]$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.

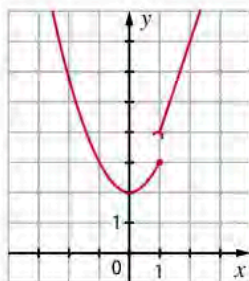
1. La fonction est-elle continue en tout point de $[-2; 5]$?
2. La fonction est-elle continue en 1 ?



45 Soit b un réel, et soit f la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = x^2 + bx + 2$ si $-3 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 3x + 1$ si $1 < x \leq 4$.

On a tracé la courbe de f ci-contre, pour une certaine valeur de b .

1. Déterminer à l'aide du graphique la valeur de b .
2. Sur ce graphique, f est-elle continue en tout point de $[-3; 4]$? Sinon, déterminer la valeur de b pour laquelle f est continue sur $[-3; 4]$.



46 LOGIQUE Soit la proposition : « Si une fonction dérivable sur un intervalle I alors est continue sur I . »

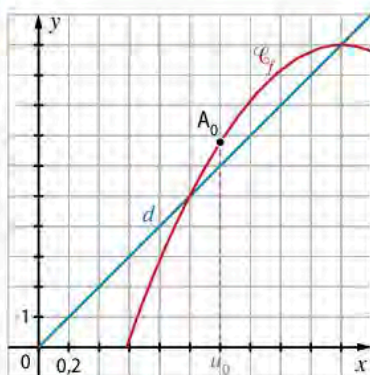
1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. Énoncer la réciproque de cette proposition. Est-elle vraie ?

Suites récurrentes

47 Capacité 2, p. 203

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ainsi que la droite d d'équation $y = x$.



1. Sur l'axe des abscisses, on a placé u_0 . Reproduire ce schéma et construire u_1 , u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
2. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.
5. Justifier que (u_n) converge vers un réel L puis déterminer L .

48 Soit I l'intervalle $[0; 1]$ et f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}.$$

1. Étudier les variations de f puis en déduire que, pour tout réel x de I , $f(x)$ appartient à I .
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à I .
3. a. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 10 cm ainsi que la droite d d'équation $y = x$.
b. Sur le graphique précédent, placer u_0 sur l'axe des abscisses et construire u_1 , u_2 et u_3 .
c. Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?
4. a. À l'aide des variations de la fonction f sur $[0; 1]$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
b. Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

49 VRAI/FAUX

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2+x}.$$

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- $u_2 = 2$.
- La suite (u_n) est croissante et majorée.
- La limite de (u_n) est -1 .

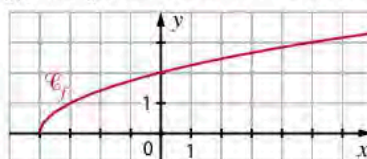
50 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

On admet que (u_n) est bien définie.

1. Étudier les variations de f sur $[1; +\infty[$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Déterminer la limite de (u_n) .

51 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f la fonction définie sur $[-4; +\infty[$ dont on donne la courbe représentative ci-dessous. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .



1. La suite (u_n) est :
 a. croissante. b. décroissante. c. non monotone.
2. La suite (u_n) :
 a. converge vers 5. b. diverge vers $+\infty$.
 c. converge vers un réel L de l'intervalle $[2 ; 3]$.

MATHS & SVT

52 Dans une réserve en Afrique, une population initiale de 2 000 gazelles, évolue ainsi chaque année : 15 % des animaux disparaissent, mais 150 animaux sont réintroduits.



On note p_n la population au bout de n années, on a donc $p_0 = 2\,000$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n on a :

$$p_{n+1} = 0,85p_n + 150.$$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,85x + 150$.
 a. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
 b. Montrer que la suite (p_n) est décroissante et minorée par 1 000.
4. Déterminer la limite de (p_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice cette limite.

Théorème des valeurs intermédiaires

53 Capacité 3, p. 205

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-2 ; 2]$.
2. a. Montrer que f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.
 b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

54 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 8x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[-1 ; 1]$.

55 CALC Capacité 4, p. 205

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^5 + 2x - 2$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 8$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement par la méthode de « balayage » avec la calculatrice de α à 10^{-2} près.

Point Histoire



Niels Abel (1802-1829) a démontré qu'il était impossible de résoudre des équations algébriques de degré 5 en utilisant des racines.

56 CALC f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x+7} + x^3 - 10$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

57 CALC Histoire des mathématiques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x.$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

Point Histoire

Leonardo Fibonacci montre que la solution réelle de l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ n'est ni entière ni rationnelle et fournit même une approximation avec dix décimales exactes de cette solution.

MÉTHODE À L'ORAL

58 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3.$$

1. Exposer oralement, la méthode à suivre pour étudier les variations de la fonction f sur $[-2 ; 4]$.
2. Comment montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-1 ; -0,5]$?
3. Citer une méthode permettant de donner une valeur approchée à 0,01 près de α .

59 TABLEUR Soit f la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = x^3 + 3\sqrt{x} - 5.$$

1. Étudier les variations de f sur $[0 ; 4]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 4]$.
3. La feuille de calcul ci-contre permet d'automatiser le calcul de $f(x)$ pour x variant de 0 à 4 avec un pas entré en C2 pouvant être modifié.
 a. Quelle formule destinée à être recopiée vers le bas peut-on saisir dans la cellule A3 pour obtenir les valeurs de x dans la colonne A ?
 b. Quelle formule destinée à être recopiée vers le bas peut-on saisir dans la cellule B2 ?
4. Donner un encadrement à 0,01 près de α .

	A	B	C
1	x	$f(x)$	Pas
2	0	-5	0,1
3	0,1		
4	0,2		
5	0,3		
6	0,4		

60 Une question ouverte

Soit a un réel et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4$ et $g(x) = 4x^3 - a$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g .

1. Montrer que l'équation $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Piste → Voir p. 466

61 PYTHON Comprendre un programme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 5$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 2]$.

2. On considère le programme Python donné ci-contre.

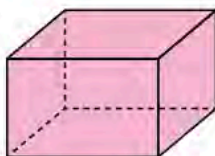
a. Que renvoie l'appel `sol(3)` ?

- b. Quelle valeur doit-on donner à l'entier n lors de l'appel `sol(n)` pour obtenir un encadrement d'amplitude 0,0625 de α ?

```
1 def f(x):
2     return(x**3+x**2-5)
3 def sol(n):
4     a=1
5     b=2
6     for k in range(n):
7         m=(a+b)/2
8         if f(a)*f(b)<0:
9             a=m
10        else:
11            b=m
12    return(a,b)
```

- 62 Un cube a pour arête x cm et un parallélépipède rectangle pour dimension 6 ; 2 et $2x + 5$ en cm.

Déterminer la valeur de x pour que ces deux éléments aient le même volume. On donnera une valeur approchée à 0,01 près.



63 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Pour tout réel k de l'intervalle $]-2; 2[$, l'équation $x^3 - 3x = k$ admet trois solutions.

64 CALC Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + x - 1.$$

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
2. Donner un encadrement de α à 0,01 près.
3. En justifiant, donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

65 CALC Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudier les variations de g .
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$, une unique solution α . Donner un encadrement de α à 0,1 près.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

- a. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
- b. Déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1; +\infty[$.

66 CALC Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculer pour tout réel x , $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Déterminer le signe de $f''(x)$ puis dresser le tableau de variation de f' .
3. a. Montrer que l'équation $f''(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera un encadrement à 0,1 près.
b. En déduire le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c. Dresser le tableau de variation de f . On ne cherchera pas à calculer $f(\alpha)$.

67 PYTHON Comprendre et exécuter un programme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 25x$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 80$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 2]$.

2. On a modifié aux lignes 8 à 10, le script d'une fonction Python utilisant la méthode de dichotomie. Décrire l'amélioration proposée.

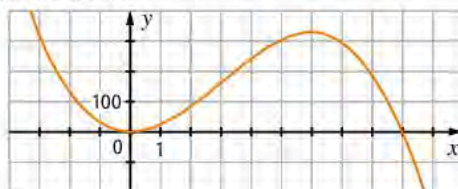
3. Programmer cet algorithme puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

```
def f(x):
    y=x**3+7*x**2+25*x
    return y
def dichotomie(a,b,k,e):
    while(b-a)>=e:
        m=(a+b)/2
        F=f(a)-k
        G=f(m)-k
        if F*G<=0:
            b=m
        else:
            a=m
    return a,b
```

Convexité d'une fonction

68 Capacité 5, p. 207

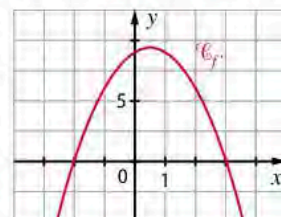
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



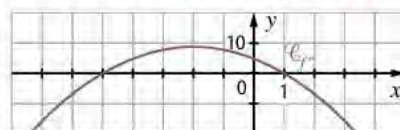
1. Déterminer la convexité de f par lecture graphique.
2. Préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Dans les exercices 69 et 70, déterminer par lecture graphique les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave. Préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

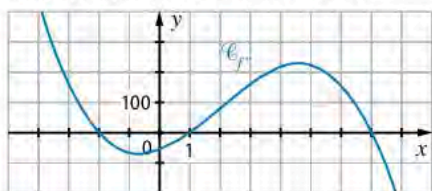
- 69 Soit f une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la fonction dérivée de f .



- 70 Soit f une fonction définie, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_{f''}$ de la fonction dérivée seconde de f .



71 Soit f une fonction deux fois dérivable. On considère la courbe de la fonction f'' donnée ci-dessous. Déterminer graphiquement la convexité de f .



72 Capacité 6, p. 217

On donne le tableau de variation d'une fonction f et celui de sa fonction dérivée f' .

x	-3	0	4	7
$f(x)$	85		36	-45
		4		

x	-3	2	7
$f'(x)$	-63	12	-63

À l'aide de ces informations, tracer dans un repère une courbe pouvant représenter la fonction f .

73 On donne le tableau de variation d'une fonction f et celui de sa fonction dérivée seconde f'' .

x	-9	-6	0	3
$f(x)$	-2	106	-2	106

x	-9	-3	3
$f''(x)$	-36	0	36

À l'aide de ces informations, tracer dans un repère une courbe pouvant représenter la fonction f .

74 Capacité 8, p. 209

La directrice d'un parc de loisirs a créé un logo pour son site web symbolisant une rampe de lancement. Pour cela, elle a construit dans un repère la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[0; 5]$ par :

$$f(x) = 0,125x^3 - 0,75x^2 + 4.$$



- Déterminer $f'(x)$.
- Montrer que cette courbe $\mathcal{C}_f$ admet en deux points une tangente horizontale.
- Déterminer le signe de $f''(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0; 5]$.
- Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I dont on précisera ses coordonnées.
 - Déterminer une équation de la tangente T en ce point I .
 - Que peut-on dire de la position relative de T et de $\mathcal{C}_f$?

75 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dont l'expression est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe sur $[0; +\infty[$ est :

- $f(x) = -2e^{-2x}$
- $g(x) = x^4 - 2x^3 + 3$
- $h(x) = x^3 - 6x + 1$
- $p(x) = -xe^x$

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

- $]-\infty; +\infty[$
- $[0; +\infty[$
- $]-\infty; 0]$
- $[-3; 3]$

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$ est :

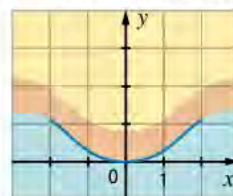
- concave sur $[0; 1]$
- concave sur $[0; +\infty[$
- convexe sur $[0; +\infty[$
- convexe sur $[0; 1]$

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

76 Dans un repère local d'unité la centaine de mètres, le trait de côte de la plage de l'île de Groix peut être modélisée par la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par : $f(x) = -0,03x^4 + 0,36x^2 - 0,05x$.



L'orientation du repère est telle que la plage est située au-dessus de la courbe représentative de f .



- Calculer $f''(x)$.
- Étudier la convexité de f sur $[-2; 2]$.

LE SAVIEZ-VOUS

Sur l'île de Groix, la plage des Grands Sables est la plus grande plage convexe d'Europe. En plus de cette particularité, cette plage de déplace vers le nord d'une dizaine de mètres chaque année.

77 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,5; 12]$ qui a pour fonction dérivée f' définie sur $[0,5; 12]$ par $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

- Calculer $f''(x)$ pour tout x de $[0,5; 12]$.
- Déterminer par le calcul sur quel intervalle f est concave.

78 VRAI/FAUX

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Le point d'abscisse $\frac{8}{3}$ de $\mathcal{C}_f$ est un point d'inflexion de cette courbe.
- La fonction f est convexe sur $[0; 1]$.

79 Déterminer les points d'inflexion éventuels des courbes représentatives de la fonction f dans les cas suivants :

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 3$.
- f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{x}$.

80 VRAI/FAUX

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0 ; 15]$.
On suppose que sa fonction dérivée f' est continue sur $[0 ; 15]$.
Les variations de f' sont données dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
$f'(x)$	30	-5	20

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- La fonction f est convexe sur $[5 ; 15]$.
- La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ possède deux points d'inflexion sur $[0 ; 15]$.

81 LOGIQUE Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, a un réel et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.
Soit la proposition : « Si le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ alors $f''(a) = 0$. »

- Cette proposition est-elle vraie ?
- Énoncer la réciproque de cette proposition. Est-elle vraie ?

82 Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 21x^2 + 19.$$

83 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Étudier la convexité de f et l'existence d'éventuels points d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

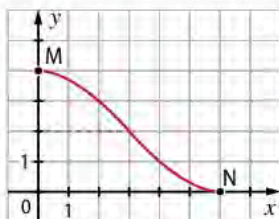
84 VRAI/FAUX

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I = [0,5 ; +\infty[$ telle que pour tout réel x de I , $f'(x) = \frac{-x+3}{x}$.

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

La courbe représentative de f est située en dessous de chacune de ses tangentes.

85 Une municipalité commande à une entreprise, une glissière pour un toboggan, dont l'allure est schématisée par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f donnée ci-contre (les dimensions sont en mètres). Pour des raisons de sécurité, la pente de la glissière au sommet M et au sol N doit être horizontale. Enfin l'entreprise ne peut fabriquer que des glissières dont la courbe a une équation de la forme : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.



- Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
 - Montrer que $f'(x) = mx(x-6)$ où m est un réel que l'on déterminera.
 - En déduire b en fonction de a et la valeur de c .
- 2.** Sachant que la glissière passe par les points $M(0 ; 4)$ et $N(6 ; 0)$, en déduire une équation de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. a. Étudier la convexité de f et prouver que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.

b. Pour consolider le toboggan, le constructeur souhaite installer une barre de renfort horizontale, au point d'inflexion de la glissière. Déterminer à quelle hauteur cette barre devra être placée et quelle sera sa longueur.

86 Soit f la fonction définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 75x.$$

- Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - Déterminer le sens de variation de f' puis son signe sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
 - En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; 10]$.
 - La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui préciser ses coordonnées.
- 2.** On suppose que $f(x)$ représente le coût de fabrication de x tonnes d'un produit pharmaceutique en milliers d'euros. On appelle fonction coût marginal, la fonction dérivée de la fonction coût total. D'après la question 1., que peut-on dire du coût marginal de ce produit lorsque x est compris entre 0 et 5 tonnes ?

MATHS & SES

87 Le tableau suivant donne l'évolution du revenu disponible brut des ménages entre 2010 et 2016.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Revenu disponible brut	1 258,4	1 311,4	1 318,3	1 321,9	1 338,5	1 353,3	1 377,0

Source : Insee, comptes nationaux – base 2010.

Une estimation du revenu disponible brut est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 9]$ par :

$$f(x) = 0,82x^3 - 9,19x^2 + 41,98x + 1\,253,5.$$

- Calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe.
- En déduire les variations de f sur $[0 ; 9]$.
- Calculer $f''(x)$ puis déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave. Les bornes des intervalles seront arrondies au dixième.
- Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion.
- Le rythme de croissance instantané du revenu est assimilé à la dérivée de la fonction f .
Au cours de quelle année, ce rythme de croissance a-t-il commencé à augmenter ?

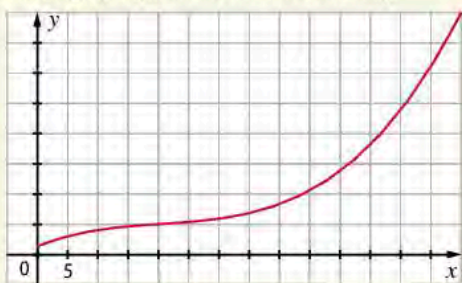
MATHS & SES

88 Une entreprise fabrique des objets. Elle estime que le coût total en euros de la production de x objets est donné par $C_T(x) = x^3 - 60x^2 + 1\,500x + 5\,000$ pour $x \in [0 ; 70]$. On appelle coût marginal C_m le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite, c'est-à-dire, $C_m(x) = C_T(x+1) - C_T(x)$. Une approximation du coût marginal est faite avec le nombre dérivée du coût total en x .

Partie A – Étude du coût total

- Déterminer le montant en euros des coûts fixes, c'est-à-dire $C(0)$.

- Déterminer l'expression du coût marginal $C_m(x)$.
- On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction C_T . Déterminer graphiquement la convexité de f .



Partie B – étude du coût marginal

- Calculer la dérivée de C_m .
- Déterminer les variations de C_m sur $[0 ; 70]$.
- Justifier l'existence d'un point d'inflexion de $\mathcal{C}$. Préciser l'abscisse de ce point.
- À partir de quelle quantité produite, chaque objet supplémentaire produit, est-il plus coûteux que l'objet précédent ?
 - On appelle rendement marginal, le rendement prévu pour la production d'un objet supplémentaire. Justifier l'affirmation suivante :
« Pour une production de plus de 20 objets, les rendements marginaux de cette entreprise sont décroissants. »

Inégalités de convexité

89 Capacité 7, p. 208

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- Montrer que f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
- En déduire que pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, on a : $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

90 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6$.

- Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
- En déduire que pour tout réel x : $x^6 + 3x^2 + 6 \geq 12x - 2$.

91 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x} + 3x^4$.

- Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe de g .
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} + 3x^4 + x - 1$. Montrer la courbe de f est toujours située au-dessus de l'axe des abscisses.

92 Soit la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3 - e^x$. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est au-dessous de chacune de ses tangentes.

93 On souhaite démontrer que pour tout réel x positif et tout entier naturel n non nul, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- Vérifier rapidement que cette inégalité est vraie pour $n = 1$.
- On suppose désormais $n \geq 2$ et soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
Montrer que f est convexe sur $[0 ; +\infty[$.
- Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Conclure.

94 Une question ouverte

Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

Montrer que $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$.

Piste → Voir p. 466

Problème de synthèse

MATHS & SVT

95 MODÉLISER = CALCULER

On injecte à un patient un médicament puis on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On admet que la concentration est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; 15]$ par $f(x) = (x+2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

Partie A théorique

- On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 15]$.
- Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; 15]$.
- Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
- Montrer que pour tout réel x de $[0 ; 15]$:

$$f''(x) = (0,25x - 0,5)e^{-0,5x}.$$

- Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

Partie B Interprétation des résultats

À l'aide des résultats de la partie A., répondre aux questions ci-dessous.

- On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre.
Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
- Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

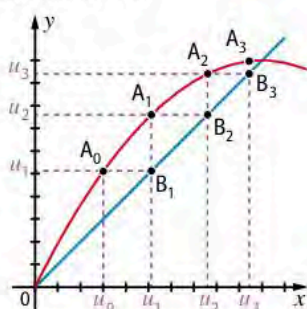
Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

Suites et fonctions continues

Si une suite (u_n) converge vers L et si f est continue en L alors (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers $f(L)$.

Construction des premiers termes de la suite (u_n) définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$: on utilise la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite d d'équation $y = x$.



Continuité et convexité d'une fonction

Théorème des valeurs intermédiaires

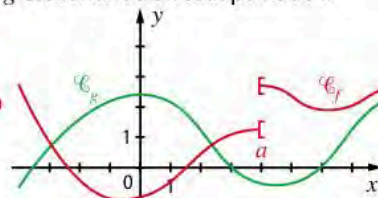
• Si f est continue sur $[a; b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire

• Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un unique réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

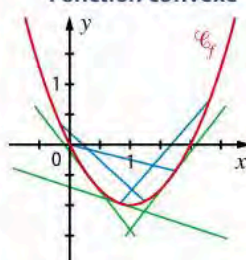
Continuité

- f n'est pas continue en a .
- g est continue en tout point de I .



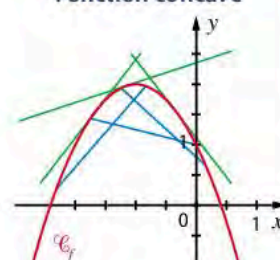
Convexité

Fonction convexe



$\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de ses sécantes et au-dessus de ses tangentes.

Fonction concave



$\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de ses sécantes et au-dessous de ses tangentes.

Point d'inflexion : point où la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente ; f change de convexité.

Convexité et dérivabilité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

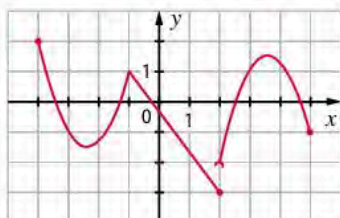
- f est convexe sur I , équivaut à f' est croissante sur I , équivaut à f'' est positive sur I ;
- f est concave sur I , équivaut à f' est décroissante sur I , équivaut à f'' est négative sur I ;
- $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion équivaut à f'' s'annule en changeant de signe en a .

Faire le point avec des exercices corrigés

Étudier la continuité d'une fonction en un point

* 96 5 min Capacité 1, p. 203

Soit f la fonction définie sur $[-4; 5]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe donnée ci-dessous.



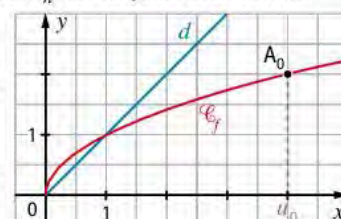
1. f est-elle continue en -1 ? en 2 ?
2. f est-elle continue en tout point de $[-4; 5]$?

Étudier la convergence d'une suite

* 97 30 min Capacité 2, p. 203

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On admettra que (u_n) est toujours bien définie.

On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ainsi que la droite d d'équation $y = x$.



1. Sur l'axe des abscisses, on a placé u_0 . Reproduire ce schéma et construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

- Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
- Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.
- En déduire que (u_n) converge.
- Déterminer la limite de (u_n) .

* 98 25 min Capacité 2, p. 203

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{1}{2}u_n} \text{ et } u_0 = -5.$$

- Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = \sqrt{3 + \frac{1}{2}x}$. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0; 2]$.
- Démontrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
- En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

* 99 10 min Capacité 3, p. 205

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

- Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 4$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

* 100 15 min Capacités 3 et 4, p. 205

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x + 2$.

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[-10; 10]$.
- Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[-3; -2]$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[-3; -2]$.
- Donner un encadrement de α à 0,1 près.

* 101 15 min Capacités 3 et 4, p. 205

PYTHON Soit f la fonction définie sur $[-3; 3]$ par $f(x) = xe^x$.

- a. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution α sur $[-3; 3]$.
- Justifier que α appartient à l'intervalle $[0; 1]$
- Recopier et compléter le programme Python suivant pour que l'appel `d()` renvoie les deux bornes d'un encadrement d'amplitude 0,01 de α à 0,01.

```
1 from math import *
2 def f(x):
3     return x*exp(x)
4 def d():
5     a=0;b=1
6     while(b-a)>...:
7         y=f((a+b)/2)
8         if y>1:
9             ...=(a+b)/2
10        else:
11            ...=(a+b)/2
12    return a,b
```

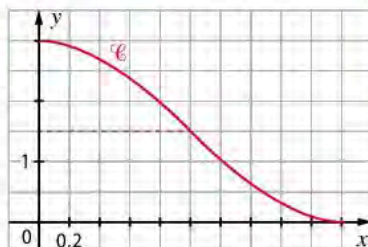
Étudier la convexité d'une fonction

* 102 5 min Capacité 3, p. 207

VRAI/FAUX

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction g sur $[0; 2]$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.



- g est concave sur l'intervalle $[0; 2]$.
- $g''(x) \geq 0$ pour tout x de $[0; 2]$.
- La courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion sur $[0; 2]$.

* 103 15 min Capacité 6, p. 207

On donne le tableau de variation d'une fonction f et celui de sa fonction dérivée f' .

x	-1	0	1	1,5	3
$f(x)$	0	-3	-4	$-\frac{75}{16}$	24

x	-1	0	1	1,5	3
$f'(x)$	-10	0	-2	0	54

À l'aide de ces informations, tracer dans un repère une courbe pouvant représenter la fonction f .

* 104 10 min Capacité 8, p. 209

Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 + 36x^2 - 42.$$

* 105 5 min Capacité 8, p. 209

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

On donne des fonctions f, g, h, j par leurs expressions. La seule qui est convexe sur $[0; +\infty[$ a pour expression :

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
- $g(x) = \sqrt{x+1}$
- $h(x) = -e^x$
- $j(x) = x^2 + x + 5$

* 106 15 min Capacité 8, p. 209

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 49)e^{-3x+4}$.

Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f .

Démontrer une inégalité

* 107 15 min Capacité 7, p. 207

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} + x^2 - 4$.

- Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe de f .
- Montrer que pour tout réel x : $e^{-x} + x^2 - 4 \geq -x - 3$.

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

■ **Un exemple :** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 5]$ par $f(x) = x^3 + 4x - 7$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[-1 ; 5]$ et donner un encadrement d'amplitude 0,01 de cette solution.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on ?	Je dois démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation sur un intervalle donné. ► <i>Quelle est cette équation ? Quel est cet intervalle ?</i>
Quel théorème permet de démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'une équation sur un intervalle donné ?	Je dois utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. La fonction doit vérifier trois conditions, l'une des conditions étant « f est continue sur $[-1 ; 5]$. ► <i>Citer les deux autres conditions.</i>
Comment démontrer que la fonction f est strictement monotone ?	Je peux étudier le signe de sa fonction dérivée. ► <i>Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1 ; 5]$.</i>
Comment montrer que la condition portant sur $f(-1)$ et $f(5)$ est vérifiée ?	Je calcule $f(-1)$ et $f(5)$. ► <i>Vérifier alors que 0 est une valeur intermédiaire et conclure.</i>
Quelle méthode permet d'encadrer la solution ?	Je peux utiliser la fonction table de calculatrice et procéder par « balayage ». ► <i>Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de la solution.</i>

108 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 0]$ par :

$$g(x) = x^5 + 4x + 2.$$

- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
- Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de cette solution.

109  **CALC** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ par :

$$f(x) = e^{-x} - x + 8.$$

- Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
- Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.

PARCOURS 2 Démontrer la convexité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 30x^2 + 1$.

Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f .

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on ?	Je dois étudier la convexité de f .
Comment démarrer ?	Je dois calculer $f''(x)$ puis $f'''(x)$. ► <i>Effectuer ces deux calculs.</i>
Comment peut-on étudier la convexité de f ?	Je dois utiliser le signe de f'' sur $\mathbb{R}$. ► <i>Étudier ce signe dans un tableau.</i>
Comment trouver les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave ?	J'utilise le lien entre le signe de f'' et la convexité de f . ► <i>Rappeler la propriété du cours et conclure.</i>
Comment déterminer si $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion ?	Je détermine pour quelle valeur de x , $f'''(x)$ s'annule en changeant de signe. ► <i>Utiliser le tableau de signe de f'' pour déterminer l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.</i>

110 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 12x^3 - 12x^2 + 9$.

Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f .

111 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)e^{3x}$.

Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f .

PARCOURS 3 Déterminer les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$
112 Chercher en autonomie

L'objectif est de déterminer toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x) + f(y)$, on note (R) cette relation.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation fonctionnelle (R).

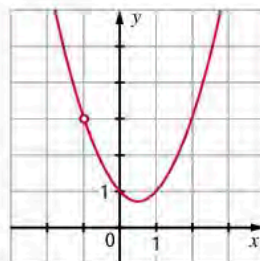
- Déterminer $f(0)$.
- Démontrer qu'une fonction vérifiant (R) est impaire.
- Démontrer par récurrence, que pour tout naturel n et pour tout réel x fixé : $f(nx) = nf(x)$.
- En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$ puis que pour tout entier relatif a et tout entier relatif non nul b : $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}f(1)$.
- On admet que tout réel x est la limite d'une suite de nombres rationnels (x_n) . En déduire alors l'égalité : $f(x) = xf(1)$.
- Réciproquement, soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ où $a \in \mathbb{R}$, vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f satisfait bien à la relation (R).
- Conclure quant au problème posé.

PARCOURS 4 Prolongement par continuité

113 Chercher en autonomie

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$.

- On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f . Conjecturer la limite de f en -1 .
- a. Vérifier que pour tout réel x , $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$
b. Démontrer alors la conjecture faite à la question 1.
- On considère la fonction $\bar{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\bar{f}(x) = f(x)$ si x est différent de -1 et $\bar{f}(-1) = 3$.
a. Justifier que la fonction $\bar{f}$ est continue en -1 .
b. Pourquoi la fonction $\bar{f}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

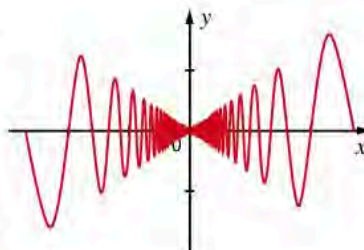


On dit que la fonction $\bar{f}$ est le prolongement par continuité de la fonction f en -1 .

Applications

114 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

- On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f . Conjecturer la limite de f en 0.
- a. Justifier que pour tout réel x non nul, $|f(x)| \leq |x|$.
b. Démontrer la conjecture faite à la question 1.
- Justifier alors que l'on peut définir une fonction $\bar{f}$, prolongement par continuité de la fonction f en 0.



115 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

- a. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.
b. Conjecturer la limite de f en 0.
- En remarquant que pour tout réel x de $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$, démontrer la conjecture faite à la question 1. b.
- Définir alors une fonction $\bar{f}$, prolongement par continuité de la fonction f en 0.

116 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Montrer que l'on peut définir une fonction $\bar{f}$, prolongement par continuité de la fonction f en 1.

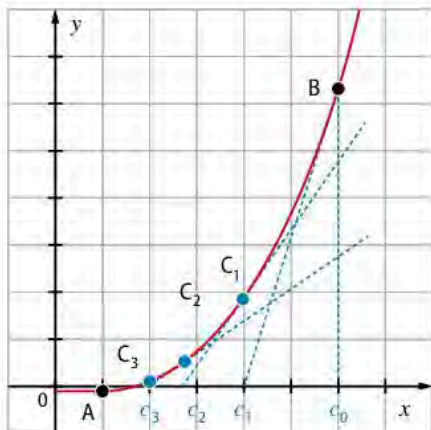
117  REPRÉSENTER  CALCULER  PYTHON

Méthode de Newton

Soit f la fonction définie sur $[1; 6]$ par $f(x) = 0,3x^3 - 1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[1; 6]$ puis en déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[1; 6]$.

2. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère est donnée ci-dessous. Soit les points de $\mathcal{C}_f$, A et B d'abscisses respectives $a = 1$ et $b = 6$.



On veut trouver une valeur approchée de α à l'aide d'une méthode appelée Méthode de Newton. On définit c_0 par $c_0 = b$. On trace la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse c_0 . Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est notée c_1 comme sur la figure ci-dessus. On réitère ce procédé en considérant la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point C_1 d'abscisse c_1 . Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est notée c_2 . On poursuit la construction et on définit ainsi une suite (c_n) de premier terme c_0 .

a. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse c_n .

b. Soit c_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse c_n . Montrer que l'on a la relation de récurrence suivante :

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}.$$

3. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin que l'appel `Newton(n)` renvoie le terme d'indice n de la suite (c_n) .

```
1 def f(x):
2     return 0.3*x**3-1
3 def fprim(x):
4     return 0.9*x**2
5 def Newton(n):
6     c=...
7     for k in range(...):
8         ...
9     return c
```

4. On admet que la suite (c_n) converge vers le réel α .

a. Programmer le script précédent et déterminer la valeur retournée lors de l'appel `Newton(6)`.

b. Comparer cette valeur avec celle obtenue par l'algorithme de dichotomie après six étapes.

MATHS & SES

118  MODÉLISER  CALCULER

Fonction satisfaction

On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».

On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ». On dira qu'il y a « souhait » lorsque la fonction « envie » est positive ou nulle et qu'il y a « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative. La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « satisfaction »

h , est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ par $h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$ (x est exprimé en millier d'euros).

1. Calculer $h'(x)$ puis $h''(x)$ et vérifier que pour tout réel x de $[10; 50]$, $h''(x) = \frac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.

2. Étudier la convexité de la fonction h sur $[10; 50]$.

4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.

5. Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction « satisfaction » atteint 80. Arrondir au millier d'euros.

119 Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie, continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I avec $a < b$. On suppose que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et on souhaite démontrer qu'il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$. Quitte à considérer la fonction g telle que $g = -f$, on peut supposer que $f(a) < f(b)$.

Soit les suites (a_n) et (b_n) définies respectivement par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout entier naturel n par :

• si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$,

• sinon $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$a \leq a_n \leq b_n \leq b.$$

2. Pour tout entier naturel n , exprimer $b_{n+1} - a_{n+1}$ en fonction de $b_n - a_n$ puis prouver que la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique.

3. En déduire que la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0.

4. a. Justifier que la suite (a_n) est croissante et majorée et (b_n) est décroissante et minorée.

b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

c. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite L appartenant à $[a; b]$.

5. a. Montrer que pour tout entier n , $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$.

b. En déduire que le réel L vérifie $f(L) \leq 0 \leq f(L)$. Conclure.

6. Déduire de ce qui précède que si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Point Histoire

La première démonstration non géométrique (contrairement à celle de Cauchy dans l'activité 2 p. 200) du théorème des valeurs intermédiaires a été réalisée par le mathématicien **Bernard Bolzano** en 1817.



MATHS & SES

120 MODÉLISER CALCULER

Étude d'une population d'insectes

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes par crainte d'extinction. L'étude a été effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes et montre que leur nombre diminue très rapidement lors des quatre premières années. La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(t) = 25e^{-0,5t}$, où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre d'insectes en milliers.

1. Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année. Arrondir à 1 %.
2. Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année. L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[4; 10]$ par :

$$g(t) = 20e^{-0,1t^2} + t - 4,65.$$

- a. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g .

Montrer que pour réel t de l'intervalle $[4; 10]$,

$$g'(t) = -4te^{-0,1t^2} + 1.$$

- b. Montrer que pour tout réel t de $[4; 10]$:

$$g''(t) = 0,8e^{-0,1t^2} (t^2 - 5).$$

- c. Montrer g' est strictement croissante sur $[4; 10]$.
- d. En déduire que l'équation $g'(t) = 0$ a une solution et une seule α dans l'intervalle $[4; 10]$. Donner la valeur arrondie au dixième de α .
3. a. Déduire le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[4; 10]$.
- b. Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4; 10]$.
4. Que peut-on supposer quant à l'effet du traitement sur la population d'insectes ?

MATHS & SES

121 MODÉLISER RAISONNER

Fonction demande

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[0; 20]$ par :

$$f(x) = 1\,000(x + 5)e^{-0,2x};$$

$f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Pour tout x de $[0; 20]$, calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $[0; 20]$. Si nécessaire, arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 3\,000$ admet une unique solution α sur $[0; 20]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près à l'aide de la calculatrice.
4. a. Calculer $f''(x)$ sur $[0; 20]$.
- b. Déterminer, par le calcul la convexité de la fonction f .
5. a. En-dessous de quel prix unitaire, arrondi au centime, la demande est-elle supérieure à 3 000 objets ?
- b. À partir de quelle valeur de x la baisse de la quantité d'objets demandés s'accroît ? Justifier la démarche.

TRAVAIL EN GROUPE

122 Histoire des mathématiques

Faire une recherche sur Jérôme Cardan et à la résolution des équations du 3^e degré au Moyen Âge.

Point Histoire

Lors de la Renaissance italienne au XVI^e siècle, les mathématiciens italiens, comme Scipione del Ferro ont trouvé une formule, appelée plus tard formule de Cardan, pour la résolution des équations de la forme : $x^3 = px + q$ telle que $x^3 - 15x - 4 = 0$.



Prise d'initiatives

 123 Soit a, b, c , et d quatre réels ($a \neq 0$).

Montrer que la courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ admet un point d'inflexion.

 124 Soit n un entier naturel non nul et k un réel strictement positif.

a. Montrer que l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - k = 0$ admet une unique solution strictement positive.

b. Prouver que cette solution appartient à $]0; 1[$ quand $n > k$.

 125 Soit a un réel et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = 2x^3 + x^2 + a.$$

Étudier selon les valeurs de a le signe de $f_a(x)$.

 126 Soit m un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + (m-1)x + 3m-1)e^{-x}.$$

Déterminer les valeurs du réel m pour lesquelles la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

TP Méthode de la sécante

PYTHON

GÉOMÉTRIE

Q

CHERCHER

=

CALCULER

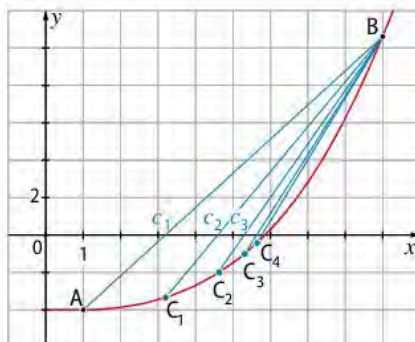
Plusieurs méthodes existent pour trouver une valeur approchée de la solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$ (le balayage, la dichotomie).

On va découvrir la méthode de la sécante appelée aussi méthode de Lagrange, qui consiste à « remplacer » la courbe représentative de f par des segments.

A Méthode de Lagrange, cas d'une fonction convexe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,02x^3 - 4$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 9]$.
2. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a construit la courbe $\mathcal{C}_f$, puis créé les points A et B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives $a = 1$ et $b = 9$.



- a. Montrer que f est convexe sur $[1 ; 9]$.
- b. Que peut-on déduire de la position du segment $[AB]$ par rapport à $\mathcal{C}_f$.
- c. On construit le point d'intersection du segment $[AB]$ et de l'axe des abscisses. On nomme c_1 l'abscisse de ce point, puis on place le point C_1 d'abscisse c_1 de la courbe $\mathcal{C}_f$. On place ensuite le point d'intersection du segment $[C_1B]$ et de l'axe des abscisses. On nomme c_2 l'abscisse de ce point. Réitérer ce procédé et construire ainsi les termes d'une suite (c_n) .

3. a. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

- b. Montrer que : $c_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$.

B Programmation en Python

1. La formule trouvée à la question 3.b. est en fait une formule de récurrence. On calcule c_1 avec la valeur initiale de a et de b , puis a prend la valeur c_1 , on calcule alors c_2 à l'aide de cette formule, et ainsi de suite. On donne ci-dessous, le programme Python associé à cette construction.

```
1 def f(x):
2     return 0.02*x**3-4
3
4 def sec(n):
5     a=1 ; b=9
6     for k in range(n):
7         a=(a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a))
8     return a
```

- a. Quelle est la valeur retournée lors de l'appel `sec(1)` ?
 - b. Quelle doit être la valeur de l'entier naturel n pour que l'appel `sec(n)` retourne la valeur c_4 ?
2. a. La suite (c_n) converge vers α . Utiliser ce programme pour obtenir des valeurs approchées de α .
 - b. Ce programme permet-il de connaître la précision de la valeur retournée ?

Fichier GeoGebra/Cabri
disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

Fichier Python
disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

Point Histoire

Joseph-Louis Lagrange est un mathématicien français né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813.



Question

Avec quels outils mathématiques peut-on mesurer l'accélération ou le ralentissement d'un phénomène économique ?

Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 58, 122

Enjeu de la question

Les outils concernés sont des courbes logistiques qui modélisent certaines évolutions, dans le temps, des taux d'équipement comme les ordinateurs, les écrans de télévision... Ces évolutions sont caractérisées en général, par trois phases : un démarrage lent, une diffusion rapide et une saturation.



Plan possible

1. Les fonctions modélisant « la vie d'un produit »
2. Fonction logistique
3. Fonction de Gompertz
4. Fonction tangente hyperbolique
5. Conclusion (limites des modèles et avantages)

Questions d'approfondissement possibles

Qu'est-ce qui permet de dire pour une fonction croissante, deux fois dérivable, que sa croissance accélère ou ralentit ?

Présenter l'étude de la fonction tangente hyperbolique.

Citer des mathématiciens ayant créé ou développé le concept de fonction ou de courbe logistique.

Comment étudie-t-on la convexité d'une fonction ?

Poursuite d'études et projet professionnel

• Pourquoi étudier les fonctions logistiques ?

De nombreux phénomènes (rendement des cultures, diffusion d'une innovation d'un produit de consommation sur un cycle de vie) sont modélisés à l'aide des fonctions logistiques.

• Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude des fonctions logistiques est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : licences d'économie et gestion, licences scientifiques, IUT scientifiques, écoles d'ingénieur...

• Un exemple de métier ?

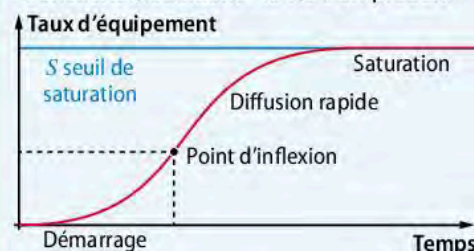
Un(e) économétricien(ne) est spécialiste en économétrie. C'est un(e) scientifique qui effectue des traitements mathématiques et statistiques de données économiques dont l'objectif est de fournir à ses employeurs des éléments fiables et quantifiés afin qu'ils puissent prendre des décisions.

Les mots-clés

Dérivée seconde • Point d'inflexion • Fonctions logistiques • Saturation • Rythme de croissance • Convexité

Support de présentation possible

- Fonctions modélisant « la vie d'un produit »



- Fonction logistique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{S}{1 + e^{-k(x-a)}}$$

où S est la valeur maximale atteinte par f .

- Fonction de Gompertz, définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = Ae^{-ke^{-Bx}}$$

où A , B et k sont des constantes avec $A > 0$, $B \neq 0$ et $k \neq 0$.

- L'INSEE fournit le taux d'équipement en ordinateur des ménages en France sur la période de 2004–2011. Modélisation possible sur $[1; 20]$, où x est le rang de l'année après 2004 par :

$$f(x) = -0,154x^2 + 5,45x + 39,36.$$

Cette page fait le point sur les capacités relatives à l'algorithmique et à la programmation, liées à ce chapitre, qui peuvent être posées au Bac.

UN EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $[3 ; 4]$ par $f(x) = -x^3 + 10x + 4$.

On admet que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[3 ; 4]$.

Fichier Python

disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

```
1 from math import *
2 def fon(x):
3     y=-x**3+10*x+4
4     return y
5 def g(a,b,e):
6     while b-a>=e:
7         m=(a+b)/2
8         if fon(m)*fon(a)>0:
9             a=m
10        else:
11            b=m
12    return (a+b)/2
```

LES QUESTIONS QUI PEUVENT ÊTRE POSÉES LE JOUR DU BAC

RÉPONSES

Exécuter un algorithme

1. Indiquer si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse.

Affirmation : « l'appel $g(3,4,0.3)$ renvoie le valeur 3,3125. »

Méthode

Déterminer les valeurs prises par les variables a , b et m à chaque étape du script.

Conseil

Pour bien suivre le déroulement du programme, il est pratique d'utiliser un tableau.

1. On calcule les valeurs prises successivement par les variables a , b et m . Au début a contient la valeur 3 et b contient la valeur 4.

• $b - a = 4 - 3 = 1$: la condition $b - a > 0,2$ est vérifiée ;

on entre alors dans la boucle « while ».

Dans la boucle : m prend la valeur 3,5 car $\frac{a+b}{2} = \frac{3+4}{2} = 3,5$ puis

$f(m) \times f(a) = f(3,5) \times f(3) = -3,875 \times 7 = -27,125$.

Comme $f(m) \times f(a) < 0$, b prend la valeur de m soit 3,5.

• $b - a = 3,5 - 3 = 0,5$: la condition $b - a > 0,2$ est vérifiée ; on reste dans la boucle « while ».

Dans la boucle : m prend la valeur 3,25 car $\frac{a+b}{2} = \frac{3+3,5}{2} = 3,25$ puis

$f(m) \times f(a) = f(3,25) \times f(3) = 2,171\,875 \times 7 = 15,203\,125$.

Comme $f(m) \times f(a) > 0$, a prend la valeur de m soit 3,25.

• $b - a = 3,5 - 3,25 = 0,25$: la condition $b - a > 0,3$ n'est plus vérifiée : on sort de la boucle « while ».

	m	a	b	$b - a$	$f(a) \times f(m)$
Début		3	4	1	-27,125
Étape 1	3,5	3	3,5	0,5	15,203 125
Étape 2	3,25	3,25	3,5	0,25	-1,505 889 893

• L'appel $g(3,4,0.3)$ renvoie le valeur 3,375 car $a = 3,25$ et $b = 3,5$ donc

$\frac{a+b}{2} = \frac{3,25+3,5}{2} = 3,375$. L'affirmation est fausse.

Comprendre un algorithme

2. À quoi correspond la valeur affichée par l'appel $g(3,4,0.3)$?

2. La valeur affichée est une valeur approchée, obtenue avec la méthode de dichotomie, de la solution sur l'intervalle $[3 ; 4]$ de l'équation $f(x) = 0$.

Modifier un programme

3. a. Modifier ce programme afin que soient retournées les deux bornes d'un encadrement de α .
b. Que renvoie alors l'appel $g(3,4,0.3)$?

3. a. On remplace dans le script à la ligne 12 : `return (a+b)/2` par `return a,b`.

b. À la fin de la boucle « while » du script, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 3,25 et 3,5.

Après modification du programme, l'appel $g(3,4,0.3)$ renvoie donc (3.25,3.5).

THÈMES

- Variations d'une fonction
- Convexité d'une fonction
- Fonction exponentielle

ÉNONCÉ

On modélise le nombre de malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie, en fonction du nombre t , de jours écoulés depuis l'apparition d'une maladie.

Cette modélisation est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 60]$ par $f(t) = t^2 e^{-0,1t}$.

1. Calculer $f'(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 60]$.
2. a. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; 60]$.
b. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0 ; 60]$.
c. Déterminer, au bout de combien de jours, le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.
3. Démontrer que pour tout réel t de $[0 ; 60]$, $f''(t) = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{-0,1t}$.
4. a. Étudier sur $[0 ; 60]$, la convexité de la fonction f .
b. Justifier que sur l'intervalle $[0 ; 15]$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet un unique point d'inflexion.

Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice, de l'abscisse de ce point d'inflexion.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ
ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. On doit appliquer la formule de dérivation d'un produit soit $(uv)' = u'v + uv'$.

2. a. Pour étudier le signe de $f'(t)$ on utilise une forme factorisée de $f'(t)$ puis on résout une inéquation.

b. On doit faire le lien entre signe de f' et variations de f .

c. On doit déterminer la valeur de t pour laquelle f a un maximum puis le calculer.

3. On doit de nouveau dériver un produit. On peut auparavant transformer $f'(t)$ pour n'avoir que deux facteurs dans son expression.

4. a. Pour étudier la convexité de f on doit étudier le signe de $f''(t)$.

Capacité 8, p. 209

b. Si f'' s'annule et change de signe en x_0 alors il y a un point d'inflexion d'abscisse x_0 .

Capacité 8, p. 209

SOLUTION COMMENTÉE

1. Pour tout réel t de $[0 ; 60]$ on a $f'(t) = 2t e^{-0,1t} + t^2(-0,1)e^{-0,1t}$.
Puis en mettant $t \times e^{-0,1t}$ en facteur, on a :
 $f'(t) = t e^{-0,1t} (-0,1t + 2)$ soit finalement $f'(t) = 0,1t e^{-0,1t} (-t + 20)$.

2. a. Pour tout réel t de $[0 ; 60]$, on a : $0,1t \geq 0$ et $e^{-0,1t} > 0$.
Le signe de $f'(t)$ est donc celui de $-t + 20$.
On résout sur $[0 ; 60]$ l'inéquation $-t + 20 \geq 0$ ce qui équivaut à $t \leq 20$.
 $f'(t)$ est positif sur $[0 ; 20]$ et négatif sur $[20 ; 60]$.

b. Sur $[0 ; 20]$, $f'(t) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0 ; 20]$.
Sur $[20 ; 60]$, $f'(t) \leq 0$ donc f est décroissante sur $[20 ; 60]$.

c. D'après les variations de f , cette fonction a un maximum en $t = 20$ et $f(20) = 400e^{-2}$ soit $f(20) \approx 54$.
C'est donc au 20^e jour que le nombre de malades est maximal et ce nombre maximal est environ 54 milliers.

3. Pour tout réel t de $[0 ; 60]$, $f'(t) = 0,1t e^{-0,1t}(-t + 20)$ donc $f''(t) = 0,1e^{-0,1t}(-t^2 + 20t)$.
On obtient alors $f''(t) = -0,1 \times 0,1e^{-0,1t}(-t^2 + 20t) + 0,1e^{-0,1t}(-2t + 20)$
soit en mettant en facteur $0,1e^{-0,1t}$:
 $f''(t) = 0,1e^{-0,1t}(-0,1(-t^2 + 20t) - 2t + 20)$ donc $f''(t) = 0,1e^{-0,1t}(0,1t^2 - 2t - 2t + 20)$
puis enfin $f''(t) = 0,1e^{-0,1t}(0,1t^2 - 4t + 20)$ ou $f''(t) = 0,01e^{-0,1t}(t^2 - 40t + 200)$.

4. a. Pour tout réel t de $[0 ; 60]$, $0,01e^{-0,1t} > 0$, donc le signe de $f''(t)$ est celui du polynôme du second degré $t^2 - 40t + 200$.
Les racines de ce polynôme sont $t_1 = 20 - 10\sqrt{2}$
soit $t_1 \approx 5,86$ et $t_2 = 20 + 10\sqrt{2}$ soit $t_2 \approx 34,14$.
Ce polynôme du second degré est de signe du coefficient de t^2 à l'extérieur de l'intervalle entre ses racines.
Sur $[0 ; t_1]$ et sur $[t_2 ; 60]$, $f''(t) \geq 0$; f est convexe sur chacun de ces intervalles.
Sur $[t_1 ; t_2]$, $f''(t) \leq 0$ donc f est concave sur cet intervalle.

b. Sur l'intervalle $[0 ; 15]$, la fonction f'' s'annule une seule fois en changeant de signe : en t_1 . La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse t_1 sur $[0 ; 15]$.
Sur l'intervalle $[0 ; 15]$, f est croissante et au point d'abscisse t_1 , f passe de convexe à concave, ce qui se traduit par un ralentissement de la vitesse de propagation de la maladie à partir du sixième jour puisque $t_1 \approx 6$ à l'unité près.

Sujet A 30 min



PYTHON



CHERCHER



CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL

corrigé
détaillé

THÈMES • Théorème des valeurs intermédiaires
• Algorithmique et programmation

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 3. ► Capacité 3 p. 205

Question 4. ► Capacité 4 p. 205

Soit la fonction f définie pour tout réel x de $[1,5 ; 6]$ par :

$$f(x) = (25x - 32)e^{-x}.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1,5 ; 6]$ puis en déduire le tableau de variation de f sur cet intervalle.
3. Montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[4 ; 5]$.

4. On donne ci-contre un programme écrit en Python.

```

1 def f(x):
2     return (25*x-32)*exp(-x)
3 def d():
4     a=4
5     b=5
6     while (b-a)>0.1:
7         y=f((a+b)/2)
8         if y>1:
9             a=(a+b)/2
10        else:
11            b=(a+b)/2
12    return a
13

```

- a. Que peut-on dire de l'écart entre les valeurs de a et de b à la fin du programme ?
- b. Comment modifier le programme pour que l'appel `d()` renvoie une valeur approchée de α à 0,1 près par excès ?
5. À l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de α au dixième.

Sujet B 45 min



MODÉLISER



CALCULER

THÈME • Étude d'une suite vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE

Questions 1., 2. et 3. ► Capacité 2 p. 203

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction f définie sur $[0 ; 1]$, par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n , avec u_n compris entre 0 et 1.

Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus. Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k .

1. On suppose $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

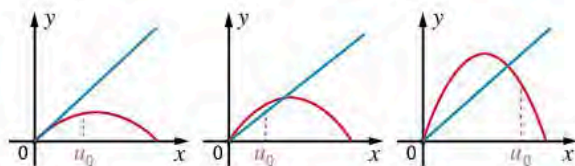
- a. Étudier les variations de f sur $[0 ; 1]$.
- b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 0,5$ puis étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ? Justifier la réponse.
- d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

2. On suppose maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.

- a. Étudier les variations de la fonction f sur $[0 ; 1]$ et montrer que $f(0,5)$ appartient à $[0 ; 0,5]$.
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,5$ et établir que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
- c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
- d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

3. On a représenté ci-dessous la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus, ainsi que la droite d'équation : $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.

- a. Reproduire et illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en 1. et 2. en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives $u_0, u_1, u_2, \dots$.
- b. En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.



Sujet C 30 min



CHERCHER



CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL

corrigé
détaillé

THÈME • Théorème des valeurs intermédiaires

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacité 3 p. 205

Question 2. ► Capacité 4 p. 205

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$, l'équation $-2x^3 + x^2 - x + 1 = 0$:
 - a. exactement une solution
 - b. a deux solutions
 - c. n'a pas de solution
 - d. a au moins une solution
2. L'unique solution α dans $[-1 ; +\infty[$ de l'équation $x^4 + x^2 = 6$ vérifie :
 - a. $5,8 \leq \alpha \leq 7,4$
 - b. $1,4 \leq \alpha \leq 1,6$
 - c. $-1,9 \leq \alpha \leq -1,5$
 - d. $0,9 \leq \alpha \leq 1,1$
3. Si l'équation $-x^3 + 3x = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ alors le réel k peut être :
 - a. égal à 2
 - b. égal à 3
 - c. égal à -5
 - d. égal à 1

THÈMES • Convexité
• Fonction exponentielle

CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE

Question A. 3. ► Capacité 8 p. 209

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^{-0,6} + e^{4,5-x}}.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

1. a. Pour tout réel x de $[0 ; 10]$, calculer $f'(x)$.

b. Soit f'' la fonction dérivée seconde de f sur $[0 ; 10]$.

Montrer que $f''(x) = \frac{e^{4,5-x}(e^{4,5-x} - e^{-0,6})}{(e^{-0,6} + e^{4,5-x})^3}.$

2. a. Montrer que sur $[0 ; 10]$, l'inéquation $e^{4,5-x} - e^{-0,6} \geq 0$ est équivalente à $x \leq \frac{51}{10}$.

b. En déduire le signe de f'' sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

3. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f . Montrer, à l'aide de la question 2., que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I.

4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Partie B

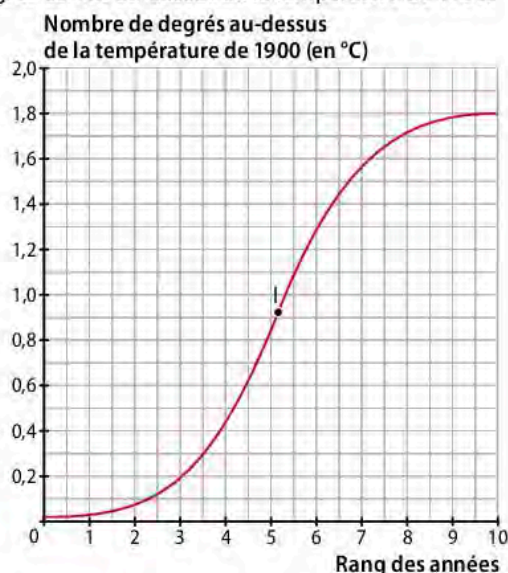
Dans toute cette partie, les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C.

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015, le premier accord universel sur le climat.

Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2 °C la température de l'année 1900.

On modélise, par la fonction f de la partie A., une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion. Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans. L'année 1925 correspond à 1. Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrés Celsius au-dessus de la température de 1900.



1. a. Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.

b. En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

2. a. En utilisant la partie A., déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point d'inflexion I de la courbe $\mathcal{C}_f$. Arrondir le résultat à l'unité.

b. Calculer, pour cette année-là, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900.

3. On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsius.

On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f' .

a. Est-il vrai de dire qu'après 2030, la température terrestre diminuera ? Justifier la réponse.

b. Est-il vrai de dire qu'après 2030, la vitesse du réchauffement climatique diminuera ? Justifier la réponse.

4. Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de 1,5 °C la température de l'année 1900.

Déterminer graphiquement l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.

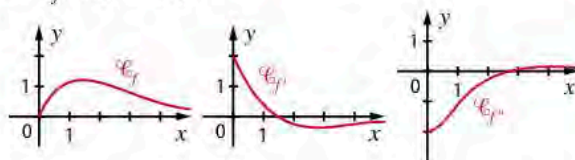
THÈMES • Convexité
• Fonction exponentielle

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question A. 1. ► Capacité 5 p. 207

Question B. 2. ► Capacité 8 p. 209

Soit la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous, d'une fonction f définie, deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; 5]$, ainsi que les courbes $\mathcal{C}_{f'}$ et $\mathcal{C}_{f''}$ de f' et de f'' .



Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.

2. Pourquoi peut-on conjecturer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion I ? Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de I.

Partie B

La fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; 5]$.

2. a. Montrer que pour tout réel $x \in [0 ; 5]$:

$$f''(x) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$

b. Déterminer sur quel intervalle de $[0 ; 5]$, f est concave.

3. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sur $[0 ; 5]$.

Déterminer le signe d'une expression

1 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Pour un nombre réel x , $x^2 - 4$ est strictement positif si et seulement si :

- a. $x > 2$ b. $x > 2$ ou $x > -2$ c. $x < -2$ ou $x > 2$ d. $-2 < x < 2$

2 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $e^x > 0$ si et seulement si le réel x est strictement positif.
 2. $-0,5x + 2 \geq 0$ si et seulement si le réel x est inférieur ou égal à 4.
 3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$ est $\mathcal{S} = \left[1; \frac{5}{2}\right]$.

3 Étudier le signe des expressions suivantes selon les valeurs du réel x .

- a. $\frac{x+3}{x-4}$ b. $x^3 - 2x^2 - 3x$ c. $\frac{e^x}{2x+3}$ d. $e^{2x-5} - 1$

Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle

4 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

La courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point de coordonnées :

- a. (0 ; 1) b. (1 ; 0) c. (1 ; e) d. (e ; 1)

5 Écrire les expressions suivantes sous la forme $e^{A(x)}$ ou $A(x)$ est une expression de la variable x .

- a. $e^{2-x} \times e^{2x}$ b. $(e^{x+1})^3 \times e^2$ c. $\frac{e \times e^{5-3x}}{e^{x-1}}$ d. $\frac{e^{3-x} \times e^{3x}}{e^{2x} \times e^{1-x}}$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $e^{7-x} - 1 = 0$ b. $e^{x+2} - (e^x)^2 = 0$ c. $e^x - xe^x = 0$ d. $\frac{e^{(x^2)}}{e^x} = 1$

Calculer des dérivées et des limites

7 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- a. L'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-9}$ est $f'(x) = e^{2x}$.
 b. La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
 c. La fonction f définie sur $] -\infty; 0[$ par $f(x) = xe^x$ a pour limite $-\infty$ en $-\infty$.

8 Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- a. $f(x) = (x+2)e^x$ b. $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ c. $f(x) = xe^{2x+1}$ d. $f(x) = \frac{e^{1-x}}{1+e^{-x}}$

9 Calculer les limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - e^x)$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$ d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)e^x$

10 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^x$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

LOGARITHME NÉPÉRIEN

CHAPITRE

7

On parle de la magnitude d'un astre pour désigner sa luminosité dans le ciel. La magnitude absolue rend compte de la luminosité d'un astre comme si on se trouvait à 10 parsec (environ 32 années-lumière) de lui. Pour prendre en compte les très grandes différences d'éclats entre les astres, cette échelle utilise la fonction logarithme dont les propriétés permettent de faire en sorte que la magnitude augmente d'une unité lorsque la luminosité est divisée par 2,5.

Voir exercice 92 page 248

LES NOTIONS DU CHAPITRE

- Fonction logarithme népérien
- Relation fonctionnelle du logarithme népérien
- Limites liées à la fonction $\ln$



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 237, 239, 241
Animations	pp. 235, 240
Corrigés détaillés	pp. 252, 253, 264, 265

Activité 1

Objectif

Introduire la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Cours 1

Logarithme népérien d'un réel strictement positif

Fichier GeoGebra/Cabri

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr



La fonction exponentielle comme dans un miroir

1 a. Expliquer pourquoi l'équation $e^x = b$ n'a pas de solution lorsque b est un réel négatif ou nul.

b. Résoudre l'équation $e^x = b$ pour $b = 1$, $b = e$ et $b = \frac{1}{e}$.

c. Soit b un réel strictement positif.

Démontrer que l'équation $e^x = b$ admet une unique solution a .

Le nombre a est appelé le **logarithme népérien** du réel b , et il est noté $\ln(b)$.

d. Déterminer $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln(e^{-1})$ et $\ln(e^2)$.

e. Déterminer, avec la calculatrice, une valeur approchée à 10^{-2} près du logarithme népérien du réel 2.

f. Soit x un réel strictement positif, exprimer $\ln(\exp(x))$ et $\exp(\ln(x))$ en fonction de x .

On dit que les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont des **fonctions réciproques**.

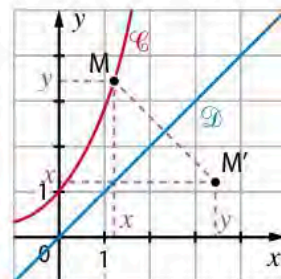
2 À tout point M de coordonnées $(x; y)$ appartenant à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle, on associe le point M' de coordonnées $(y; x)$.

a. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé du plan.

b. Donner les coordonnées des points M' associés aux points M d'abscisses respectives 0, 1 et -1 .

c. Placer ces points sur le graphique.

d. À quelle courbe $\mathcal{C}'$ appartient le point M' ?



3 Soit d la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à d .

b. Montrer que la droite (MM') est perpendiculaire à d .

c. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

d. Tracer alors la courbe $\mathcal{C}'$.

Activité 2

Objectif

Conjecturer la dérivée de la fonction logarithme népérien.

Cours 1

Logarithme népérien d'un réel strictement positif

Fichier GeoGebra/Cabri

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr



Sur la bonne pente

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

On a placé sur la courbe $\mathcal{C}_f$ un point M et on a tracé la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en M .

On note x l'abscisse de M et m le coefficient directeur de T .

1 On admet que f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée.

a. Déterminer les valeurs de m pour les points d'abscisses respectives 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 5 et 10. Quelles observations peut-on faire ?

b. On a construit le point N de coordonnées $(x; m)$. On fait varier M sur la courbe $\mathcal{C}_f$.

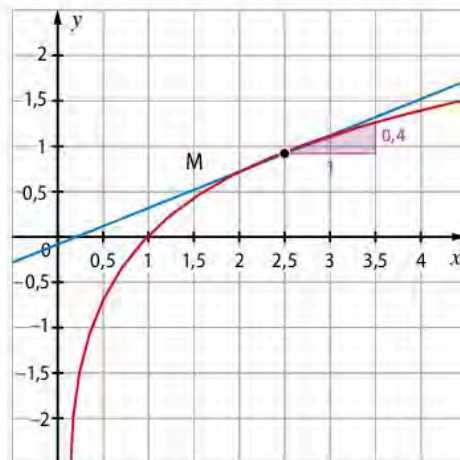
Quelle courbe d'une fonction usuelle semble décrire le point N ?

c. En déduire une conjecture pour l'expression de $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

2 a. Soit u une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{u(x)}$. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $u'(x)$ et de $u(x)$.

b. On suppose que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on pose $u(x) = \ln(x)$. Donner une expression simple de $g'(x)$. Que vaut alors $g'(x)$?

c. Déduire des questions 2. a. et 2. b. l'expression de $u'(x)$.



Activité 3

Objectif

Découvrir des propriétés algébriques du logarithme népérien.

Cours 2

Relation fonctionnelle du logarithme népérien

Point Histoire



John Napier (1550–1617) est un physicien, astronome et mathématicien écossais. Il est l'auteur du traité sur les tables de logarithmes.

Les tables de John Napier

1 a. À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs seront approchées à 10^{-3} près.

Nombre	$\ln(2) + \ln(3)$	$\ln(5) + \ln(11)$	$\ln(13) + \ln(7)$	$\ln(55)$	$\ln(91)$	$\ln(6)$
Valeur approchée						

b. Quelles observations peut-on faire ?

c. Conjecturer une formule reliant $\ln(a)$, $\ln(b)$ et $\ln(a \times b)$ pour a et b réels strictement positifs.

2 a. Comparer $\ln\left(\frac{7}{2}\right)$ et $\ln(7) - \ln(2)$ puis $\ln\left(\frac{9}{5}\right)$ et $\ln(9) - \ln(5)$.

b. Conjecturer une formule reliant $\ln(a)$, $\ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, pour a et b réels strictement positifs.

3 a. Comparer $\ln(49)$ et $\ln(7)$, puis $\ln(5)$ et $\ln(\sqrt{5})$.

b. Conjecturer une formule reliant $\ln(\sqrt{a})$ et $\ln(a)$ pour a réel strictement positif.

4 En 1614, John Napier publie un traité dans lequel il présente des tables de logarithmes qui ne sont pas encore les logarithmes népériens. Voici un extrait de la préface.

[...] on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement...

Expliquer en quoi le logarithme népérien possède les propriétés évoquées par Napier.

Activité 4

Objectif

Étudier une famille de fonctions.

Cours 3

Limites liées à la fonction $\ln$

Fichier GeoGebra/ Cabri

Disponible sur lycee.editions-bordas.fr

Animation

Croissances comparées $\ln$ et x^n

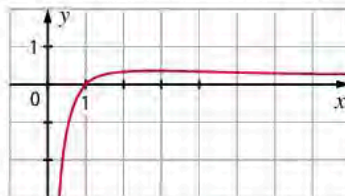


Une famille de fonctions

Pour n entier naturel non nul, on note f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$.

Partie A

On se place dans le cas $n = 1$. La fonction f_1 est donc définie sur $]0; +\infty[$ par $f_1(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f_1 .



1 À l'aide du graphique :

a. conjecturer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$; b. conjecturer les variations de la fonction f_1 .

2 a. Calculer $f_1'(x)$ et montrer que $f_1'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

b. En déduire les variations de f_1 sur $]0; +\infty[$.

Partie B

1 À l'aide du fichier vidéo projeté :

a. conjecturer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$; b. conjecturer les variations de f_n sur $]0; +\infty[$.

2 a. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que $f_n'(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}$.

b. Résoudre dans $]0; +\infty[$, l'inéquation $1 - n \ln(x) > 0$.

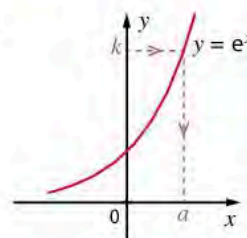
c. En déduire les variations de f_n sur $]0; +\infty[$.

1. Logarithme népérien d'un réel strictement positif

On a vu que la fonction exponentielle est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, quel que soit le réel strictement positif k l'équation $e^x = k$ admet une solution et une seule a dans $\mathbb{R}$.



À noter

Le logarithme népérien du réel x est noté $\ln(x)$ ou $\ln x$.

Vocabulaire

On dit que la fonction logarithme népérien est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Point Histoire

C'est vers 1614 que John Napier (1550-1617) invente les logarithmes qui portent son nom. Son nom est souvent francisé en John Neper.

DÉFINITIONS (1) Soit k un réel strictement positif, on appelle logarithme népérien de k , l'unique solution de l'équation $e^x = k$, d'inconnue x . On note cette solution $\ln(k)$ qui se lit « **logarithme népérien de k** ».

(2) La fonction logarithme népérien est la fonction qui, à tout réel strictement positif x , associe $y = \ln(x)$. Ainsi : $y = \ln(x)$ et $x > 0$ équivaut à $e^y = x$.

$\ln$	x	e^{-1}	1	2	e	e^3	$\exp$
	$\ln(x)$	-1	0	$\ln(2)$	1	3	

• $\ln(1) = 0$ car $e^0 = 1$ • $\ln(e) = 1$ car $e^1 = e$

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

À noter

Comme pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et que $-\frac{1}{x^2}$ est négatif, la fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$.

PROPRIÉTÉ La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout x réel de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

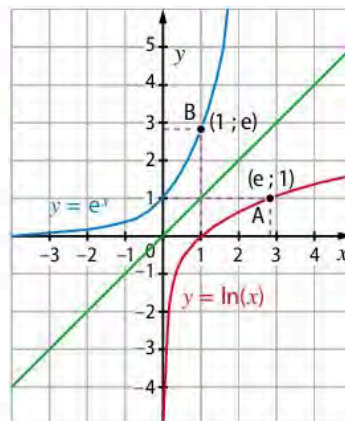
On admet que la fonction $\ln$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln(x)}$. La fonction f est de la forme e^u avec $u(x) = \ln(x)$. La fonction u étant dérivable sur $]0; +\infty[$, f est elle aussi dérivable sur $]0; +\infty[$. On a $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$ soit $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln(x)}$.

D'autre part, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = e^{\ln(x)} = x$ donc $f'(x) = 1$.

On en déduit que $\ln'(x) \times e^{\ln(x)} = 1$ donc que

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} \text{ soit } \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$



PROPRIÉTÉS (1) La fonction $\ln$ est définie, continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(2) Pour tout réel x , $\ln(\exp(x)) = x$ ce qui s'écrit $\ln(e^x) = x$.

(3) Pour tout réel x strictement positif, $\exp(\ln(x)) = x$, ce qui s'écrit $e^{\ln(x)} = x$.

(4) Pour tous réels a et b strictement positifs, $a = b$ équivaut à $\ln(a) = \ln(b)$.

(5) Pour tous réels a et b strictement positifs, $a < b$ équivaut à $\ln(a) < \ln(b)$.

(6) $0 < x < 1$ équivaut à $\ln(x) < 0$ et $x > 1$ équivaut à $\ln(x) > 0$.

PROPRIÉTÉ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ pour tout réel x de I . La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I , $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. On a $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Vidéo 04:56

Résoudre une
équation contenant
des logarithmes (1)

CAPACITÉ

1

Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

- 1 Résoudre chacune des équations suivantes :
- a. $(E_1) \ln(2x+3) = \ln(x)$ b. $(E_2) 2\ln(x) + 1 = 7$ c. $(E_3) 3e^x + 2 = 8$
- 2 Résoudre chacune des inéquations suivantes :
- a. $(I_1) 5\ln(x) < 10$ b. $(I_2) 5 - 2\ln(x) \geq -1$ c. $(I_3) e^{x-3} > 5$

Méthode

Pour résoudre une équation du type $\ln(x) = b$ on utilise : $\ln(x) = b$ et $x > 0$ équivaut à $x = e^b$.

Voir exercices

57 Pour s'entraîner

146 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- 1 a. $\ln(2x+3)$ et $\ln(x)$ existent si et seulement si $2x+3 > 0$ et $x > 0$ ce qui équivaut à $x > -\frac{3}{2}$ et $x > 0$ donc à $x > 0$.

Pour x de $]0; +\infty[$, l'équation (E_1) équivaut à $2x+3 = x$ donc à $x = -3$.

Comme -3 n'appartient pas à $]0; +\infty[$, (E_1) n'a pas de solution.

b. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Pour x dans $]0; +\infty[$, l'équation (E_2) équivaut à $2\ln(x) = 6$ donc à $\ln(x) = 3$ soit à $x = e^3$. L'équation (E_2) a pour unique solution e^3 .

c. e^x existe pour tout réel x . (E_3) équivaut à $3e^x = 6$ donc à $e^x = 2$ soit à $x = \ln(2)$ d'après la définition du logarithme népérien. (E_3) a pour unique solution $\ln(2)$.

- 2 a. $\ln(x)$ existe si et seulement si x appartient à $]0; +\infty[$.

Pour $x \in]0; +\infty[$, (I_1) équivaut à $\ln(x) < 2$ donc à $\ln(x) < \ln(e^2)$ c'est-à-dire à $x < e^2$. L'ensemble solution de l'inéquation (I_1) est $]0; e^2[$.

b. $\ln(x)$ existe si et seulement si x appartient à $]0; +\infty[$.

Pour $x \in]0; +\infty[$, (I_2) équivaut à $-2\ln(x) \geq -6$ donc à $\ln(x) \leq 3$ soit à $\ln(x) \leq \ln(e^3)$, c'est-à-dire à $x \leq e^3$. L'ensemble solution de l'inéquation (I_2) est $]0; e^3]$.

c. e^x existe pour tout réel x . Pour $x \in \mathbb{R}$, (I_3) équivaut à $\ln(e^{x-3}) > \ln(5)$ donc à $x-3 > \ln(5)$ soit à $x > \ln(5) + 3$. L'ensemble solution de (I_3) est $[\ln(5) + 3; +\infty[$.

CAPACITÉ

2

Étudier les variations d'une fonction avec des logarithmes

- 1 Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
- 2 a. Justifier que pour tout x de $]3; +\infty[$ on a $\frac{2x}{x-3} > 0$.
- b. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]3; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-3}\right)$.

Solution commentée

- 1 f est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. La fonction f est donc dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}. \text{ Donc } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.

L'inéquation $1 - \ln(x) \geq 0$ est équivalente à $1 \geq \ln(x)$ donc à $\ln(x) \leq \ln(e)$ soit à $x \leq e$.

On déduit : $f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $]0; e]$ et $f'(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[e; +\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0; e]$ et décroissante sur $[e; +\infty[$.

- 2 a. Pour x de $]3; +\infty[$, $2x > 6$ et $x-3 > 0$ donc $\frac{2x}{x-3} > 0$.

b. La fonction g est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = \frac{2x}{x-3}$. Sur $]3; +\infty[$, la fonction u est dérivable et strictement positive donc g est dérivable et $g' = \frac{u'}{u}$ avec

$$u'(x) = \frac{2(x-3) - 2x \times 1}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}. \text{ Ainsi pour tout } x > 3, u'(x) < 0 \text{ et } u(x) > 0$$

donc $\frac{u'(x)}{u(x)} < 0$, soit $g'(x) < 0$. g est donc décroissante sur $]3; +\infty[$.

Voir exercices

75 Pour s'entraîner

157 Pour travailler en autonomie

2. Relation fonctionnelle du logarithme népérien

Vocabulaire

On dit que la fonction $\ln$ vérifie la **relation fonctionnelle** $f(a \times b) = f(a) + f(b)$ pour tous réels a et b strictement positifs.

Vocabulaire

Logarithme vient des mots grecs *logos* (rapport, relation) et *arithméticos* (nombres).

THÉORÈME Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

DÉMONSTRATION

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Alors $e^{\ln(a \times b)} = a \times b$ et $e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$.

Donc $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$, soit $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

EXEMPLES :

- $\ln(21) = \ln(3 \times 7) = \ln(3) + \ln(7)$
- $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(10) = \ln\left(\frac{1}{2} \times 10\right) = \ln(5)$
- Pour $x \in]1; +\infty[$: $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln((x-1) \times (x+1)) = \ln(x^2 - 1^2) = \ln(x^2 - 1)$

PROPRIÉTÉS (1) Pour tout entier n et tout réel a strictement positif, $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

(2) Pour tout réel b strictement positif, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

(3) Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(4) Pour tout réel a strictement positif, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

DÉMONSTRATIONS

(1) $a = e^{\ln(a)}$, d'où $a^n = (e^{\ln(a)})^n$, et d'après une propriété de l'exponentielle : $a^n = e^{n \ln(a)}$.

On en déduit $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

(2) On a $\frac{1}{b} \times b = 1$, donc $\ln\left(\frac{1}{b} \times b\right) = \ln(1)$, donc $\ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b) = 0$,

d'où $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

(3) On a $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, donc $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(4) On a $2 \ln(\sqrt{a}) = \ln((\sqrt{a})^2) = \ln(a)$, donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

EXEMPLES :

- $\ln(1\,024) = \ln(2^{10}) = 10 \ln(2)$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(e) = -1$
- $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \ln(\sqrt{2}) - \ln(8) = \frac{1}{2} \ln(2) - \ln(2^3) = \frac{1}{2} \ln(2) - 3 \ln(2) = -2,5 \ln(2)$
- Pour $a \in]0; +\infty[$: $\ln(a^2) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln(\sqrt{a}) = 2 \ln(a) - \ln(a) - \frac{1}{2} \ln(a) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Point Histoire

- Avant l'invention des calculatrices vers 1970, on utilisait des règles à calcul dont le fonctionnement était basé sur la relation fonctionnelle du logarithme. Les premières règles à calcul sont apparues au milieu du xvi^e siècle.
- Les tables de logarithmes, élaborées dès le $xvii^e$ siècle par Napier, permettaient d'effectuer très rapidement des calculs, grâce aux propriétés vues ci-dessus.

Vidéo 07:26

Appliquer les formules sur les logarithmes



CAPACITÉ

3

Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture

- Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ chacun des nombres suivants :
 a. $\ln(6)$ b. $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ c. $\ln\left(\frac{1}{12}\right)$ d. $\ln(72)$ e. $\ln\left(\frac{3e^2}{2}\right)$
- Simplifier l'expression $A = \ln(\sqrt{3} - 1) + \ln(\sqrt{3} + 1)$.
- Pour x de $]1; +\infty[$, on pose $B = \ln(x + 3) - 2\ln(x - 1)$.
Écrire B sous la forme $\ln(C(x))$ où $C(x)$ est une expression de la variable x .

Solution commentée

- a. $\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3)$. b. $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(2) - \ln(3)$.
 c. $\ln\left(\frac{1}{12}\right) = -\ln(12) = -\ln(3 \times 2^2) = -(\ln(3) + 2\ln(2)) = -\ln(3) - 2\ln(2)$.
 d. $\ln(72) = \ln(8 \times 9) = \ln(2^3 \times 3^2) = \ln(2^3) + \ln(3^2) = 3\ln(2) + 2\ln(3)$.
 e. $\ln\left(\frac{3e^2}{2}\right) = \ln(3e^2) - \ln(2) = \ln(3) + \ln(e^2) - \ln(2) = 2 + \ln(3) - \ln(2)$.
- $A = \ln(\sqrt{3} - 1) + \ln(\sqrt{3} + 1) = \ln((\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)) = \ln(\sqrt{3}^2 - 1^2) = \ln(3 - 1) = \ln(2)$
- $B = \ln(x + 3) - 2\ln(x - 1) = \ln(x + 3) - \ln((x - 1)^2) = \ln\left(\frac{x + 3}{(x - 1)^2}\right)$.

Conseil

Pour simplifier le logarithme d'un nombre, on peut écrire ce nombre sous la forme d'un produit ou d'un quotient.

Voir exercices

95 Pour s'entraîner

142 Pour travailler en autonomie

Vidéo 05:16

Résoudre une équation contenant des logarithmes (2)



CAPACITÉ

4

Utiliser la relation fonctionnelle pour résoudre des équations ou des inéquations

- Résoudre chacune des équations suivantes :
 a. $(E_1) \ln(x + 1) - \ln(x) = 1$ b. $(E_2) \ln(x + 2) + \ln(x) = \ln(8)$
- Résoudre l'inéquation (I) : $\ln(x + 3) + \ln(2 - x) \geq \ln(6)$.
- Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0,9^n \leq 0,1$.

Solution commentée

- a. $\ln(x + 1)$ et $\ln(x)$ existent si, et seulement si, $x + 1 > 0$ et $x > 0$, ce qui équivaut à $x > -1$ et $x > 0$ donc à $x > 0$.
 Pour x dans $]0; +\infty[$, l'équation (E_1) équivaut à $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ donc à $\frac{x+1}{x} = e^1$ soit à $x + 1 = xe$ ce que l'on peut écrire $xe - x = 1$ ou encore $x(e - 1) = 1$, ainsi $x = \frac{1}{e-1}$.
 L'équation (E_1) a pour unique solution $\frac{1}{e-1}$.
 b. $\ln(x + 2)$ et $\ln(x)$ existent si, et seulement si, $x + 2 > 0$ et $x > 0$ soit si $x > 0$.
 Pour x dans $]0; +\infty[$, l'équation (E_2) équivaut à $\ln(x(x + 2)) = \ln(8)$ donc à $x(x + 2) = 8$ soit à $x^2 + 2x - 8 = 0$. Le polynôme $x^2 + 2x - 8$ a pour racines 2 et -4.
 Le réel 2 appartient à $]0; +\infty[$ mais -4 n'appartient pas à $]0; +\infty[$ donc l'équation (E_2) a pour unique solution le réel 2.
- $\ln(x + 3)$ et $\ln(2 - x)$ existent si et seulement si $x + 3 > 0$ et $2 - x > 0$, ce qui équivaut à $x > -3$ et $x < 2$ soit à $x \in]-3; 2[$.
 Pour x dans $]-3; 2[$, (I) équivaut à $\ln((x + 3)(2 - x)) \geq \ln(6)$ soit à $(x + 3)(2 - x) \geq 6$ ce qui équivaut à $-x^2 - x + 6 \geq 6$ soit à $-x^2 - x \geq 0$ ou encore à $-x(x + 1) \geq 0$.
 L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-x(x + 1) \geq 0$ est $[-1; 0]$.
 L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $[-1; 0] \cap]-3; 2[$ soit $[-1; 0]$.
- L'inéquation $0,9^n \leq 0,1$ équivaut à $\ln(0,9^n) \leq \ln(0,1)$ donc à $n \ln(0,9) \leq \ln(0,1)$.
 Comme $0 < 0,9 < 1$, $\ln(0,9)$ est négatif donc $n \ln(0,9) \leq \ln(0,1)$ équivaut à $n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)}$. Or $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9)} \approx 21,85$ à 0,01 près.
 Le plus petit entier naturel n vérifiant $0,9^n \leq 0,1$ est donc 22.

Conseil

La relation fonctionnelle permet de se ramener à une égalité de la forme $\ln(a) = \ln(b)$.

Méthode

Pour résoudre une inéquation d'inconnue n de la forme $a^n \leq b$ on utilise le logarithme népérien.

Voir exercices

108 Pour s'entraîner

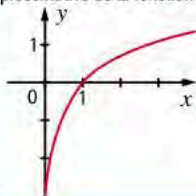
148 Pour travailler en autonomie

3. Limites liées à la fonction $\ln$

Limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction $\ln$

À noter

La propriété (2) permet d'affirmer que la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe (yy'), est **asymptote** à la courbe représentative de la fonction $\ln$.



PROPRIÉTÉS (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$.

DÉMONSTRATIONS

(1) Soit A un réel.

Pour que $\ln(x)$ soit strictement supérieur à A , il suffit de prendre x strictement supérieur à e^A : en effet si $x > e^A$ alors $\ln(x) > \ln(e^A)$, car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc $\ln(x) > A$.

On a démontré que tout intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

(2) Pour tout réel x strictement positif, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ donc $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

donc en utilisant la règle des limites des fonctions composées, on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$
et on en déduit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ soit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$.

Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$

PROPRIÉTÉS (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

(4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$.

DÉMONSTRATIONS

(3) On a $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ d'après une propriété vue au chapitre 5.

Le théorème de composition des limites donne alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)} = +\infty$.

D'après la règle sur la limite de l'inverse d'une fonction : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)}} = 0$.

(4) Pour tout $x > 0$, $x \ln x = -x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend

vers 0 par valeurs positives. Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ donc par le théorème de la limite

d'une composée : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$. Soit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$.

CONSÉQUENCES Pour tout nombre entier n strictement positif, on a :

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

(6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$.

EXEMPLES : • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln(x) = 0$.

Animation
Croissances
comparées
($\ln$ et x^n)



Utiliser les limites de la fonction logarithme

- 1 Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x)}$.

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote verticale.

- 2 Soit g la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-3}\right)$. Déterminer la limite de g en 3.

Méthode

Pour mettre en évidence une asymptote verticale, on utilise la limite infinie de la fonction en un point.

Solution commentée

- 1 • $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2$ donc par limite d'un quotient on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0^-$: en effet $\ln$ est définie et continue en 1 et $\ln(x) < 0$ sur $]0; 1[$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$ donc par limite d'un quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

• Puisque la limite de f en 1 est infinie, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

- 2 La fonction g est une fonction composée. $\lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0^+$ donc, avec la

règle sur la limite d'un quotient, on obtient $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} = +\infty$.

De plus $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, en utilisant la limite d'une fonction composée, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty.$$

Voir exercices

122 Pour s'entraîner

152 Pour travailler en autonomie

Utiliser la croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués :

- 1 $\frac{\ln(x)}{x+1}$ en $+\infty$. 2 $g(x) = x^2 - \ln(x)$ en $+\infty$.
3 $h(x) = x(\ln(x) - 1)$ en 0.

Solution commentée

- 1 On est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On écrit :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$ par limite d'un produit, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- 2 On est en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Comme x est non nul, on factorise par x^2 : $g(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (propriété (5)) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$; de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Par limite d'un produit, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty$ soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- 3 On est en présence d'une forme indéterminée « $0 \times \infty$ ».

On développe : $h(x) = x \ln(x) - x$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ (propriété (4)) et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Avec la règle sur la limite d'une somme, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

Vidéo 04:18

Calculer une limite par croissance comparée



Conseil

Pour calculer la limite en $+\infty$ d'une fonction combinant polynômes et logarithmes, on peut faire apparaître la forme $\frac{\ln(x)}{x^n}$.

Voir exercices

129 Pour s'entraîner

155 Pour travailler en autonomie

Étudier une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante, sans utiliser les propriétés de croissances comparées de la fonction exponentielle vues dans le chapitre 5.

PROPRIÉTÉS Pour tout nombre entier n strictement positif, on a :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$$

Bon à savoir !

Avant de démontrer un résultat pour tout entier n , on peut commencer par une valeur particulière avant de généraliser.

Bon à savoir !

Pour calculer une limite, il peut être intéressant de majorer, de minorer ou d'encadrer la fonction dont on cherche la limite.

RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

• On commence par démontrer la première limite pour $n=1$, soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$.

f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}}$ soit $f'(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$.

Comme $x \geq 1$, $\sqrt{x} \geq 1$ soit $1 - \sqrt{x} \leq 0$. De plus, $x \geq 1$ donc $x > 0$.

5 On en déduit que $f'(x) \leq 0$ sur $[1; +\infty[$, donc f est décroissante sur $[1; +\infty[$. De plus, $f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} = -2$.

Donc pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) \leq -2$, d'où $f(x) < 0$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	-2	$\longrightarrow$

On en déduit que $\ln(x) < 2\sqrt{x}$ et comme $0 \leq \ln(x)$ pour tout x de $[1; +\infty[$, on a : $0 \leq \ln(x) < 2\sqrt{x}$ pour tout x de $[1; +\infty[$.

10 En divisant chacun des membres de cette inégalité par x , on obtient :

$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ pour tout x de $[1; +\infty[$. De plus, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$,

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

• Pour tout entier $n \geq 2$, on a $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

15 • Pour tout réel x strictement positif :

$$x^n \ln(x) = -x^n \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^n}}, \text{ donc } x^n \ln(x) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}.$$

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ donc en utilisant la règle de la limite

d'une fonction composée, on obtient $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$.

QUESTIONS

1. Expliquer pourquoi on peut affirmer que f est dérivable sur $[1; +\infty[$ (ligne 3).
2. Justifier l'affirmation « comme $x \geq 1$, $\sqrt{x} \geq 1$ soit $1 - \sqrt{x} \leq 0$ » (ligne 4).
3. Expliquer ce qui permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (ligne 12).

Faire une démonstration

D1 Déterminer la limite de $\frac{\ln(x)}{x-1}$ en 1.

Piste : Penser à la définition du nombre dérivé de la fonction $\ln$ en 1.

Calcul mental

1 Calculer et simplifier :

a. $3 + 14 \times \frac{1}{7}$ b. $5 + 6 \times \frac{5}{3}$ c. $5 \times \frac{27-15}{2}$

2 Simplifier les expressions où n est un entier :

a. $\frac{3^{n+1}}{3^{n-1}}$ b. $\frac{2^{n+1}}{2^{-1} \times 2^3}$

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x^2 + 3$. Calculer :

a. $f(0)$ b. $f(5)$ c. $f(-2)$ d. $f(\sqrt{5})$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $x - 2 = \frac{1}{3}$

b. $5x + 4 = 7$

c. $\frac{3}{5}x = 9$

d. $7x - 2 = 3x + 5$

5 Simplifier les expressions où x est un réel :

a. $e^{3x-4} \times e^{2x+3}$

b. $\frac{e^{5x-3}}{e^{x+1}}$

c. $(e^{x+5})^2$

6 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x^3 - 5x$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = e^{3x} + 5x$ sur $\mathbb{R}$

Automatismes

Fonctions

7 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

La tangente au point d'abscisse 2 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x$ a pour équation $y = 7x + 4$.

8 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$:a. f est croissante sur $[0 ; 2]$.b. f est croissante sur $]-\infty ; 0[$.c. f est décroissante sur $[0 ; 3]$.d. f est positive sur $[3 ; +\infty[$.

9 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

La fonction g définie sur $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$ est la dérivée de la fonction f définie sur $]2 ; +\infty[$ par :

a. $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ b. $f(x) = \frac{-5}{x-2}$

c. $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ d. $f(x) = \frac{5}{x-2}$

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $e^{2x} - e = 0$

b. $\frac{e^{2x}}{e} > 1$

c. $e^{2x-5} \leq 1$

Géométrie

11 Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-1 ; 2)$ et $B(4 ; 4)$.a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.b. Donner l'équation réduite de la droite (AB) .c. Calculer la distance AB .

12 Question de méthode

On se place dans un repère du plan.

Comment faire pour démontrer que trois points dont on donne les coordonnées sont alignés ?

13 On sait que $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, calculer $\sin(x)$.

a. si $x \in [0 ; \pi]$

b. si $x \in [\pi ; 2\pi]$

Statistiques et probabilités

14 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

On a réalisé plusieurs fois l'expérience qui consiste à lancer simultanément trois pièces de monnaie et à noter le nombre de « pile » obtenus. On donne les résultats ci-dessous :

Nombre de « pile »	0	1	2	3
Effectif (Nombre de lancers)	2	9	11	3

La moyenne de cette série est :

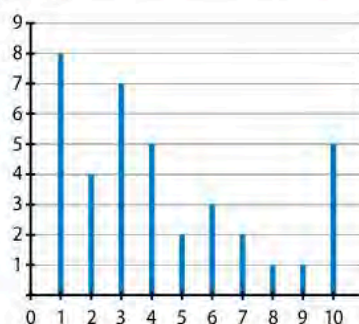
a. 1,5

b. 1,6

c. 3,875

d. 6,25

15 On considère la série donnée par le diagramme en bâton ci-dessous.



1. Déterminer, à 0,01 près, la moyenne de cette série.

2. Déterminer, à 0,01 près, l'écart-type de cette série.

3. Déterminer la médiane et les quartiles de cette série.

16 Dans une classe de terminale, il y a 55 % de garçons. 40 % des filles et 38 % des garçons sont demi-pensionnaires.

On choisit un élève au hasard dans cette classe et on note :

• F l'événement « l'élève choisi est un garçon » ;• D l'événement : « l'élève choisi est demi-pensionnaire ».

Construire un arbre pondéré en lien avec cette situation.

La fonction logarithme népérien

Questions flash

17 ORAL Pour quelles valeurs de x , $\ln(x)$ est-il défini ?

18 ORAL Donner la valeur de $e^{\ln(5)}$, $\ln(e^3)$ et $\ln(e^{-2})$.

19 ORAL VRAI/FAUX

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère du plan.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- a. $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.
b. Le point de coordonnées $(1; 0)$ appartient à $\mathcal{C}$.

20 Dans chacun des cas suivants, justifier pourquoi l'expression $f(x)$ est calculable pour tous réels x de I .

1. $f(x) = \ln(x+2)$ $I =]-2; +\infty[$.
2. $f(x) = \ln(9-3x)$ $I =]-\infty; 3[$.
3. $f(x) = \ln(x) + \ln(2-x)$ $I =]0; 2[$.

21 Dans chacun des cas, déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression $f(x)$ est calculable.

1. $f(x) = \ln(x-4)$ 2. $f(x) = \ln(3x+5)$

22 Comparer sans faire de calcul :

1. $\ln(7)$ et $\ln(11)$ 2. $\ln\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$ 3. $\ln(3)$ et $\ln(e)$

23 ORAL Sans les calculer, déterminer le signe de chacun des nombres suivants :

- a. $\ln(5)$ b. $\ln(0,9)$ c. $\ln\left(\frac{7}{8}\right)$
d. $\ln(\sqrt{2})$ e. $\ln(100)$ f. $\ln(3 \times 10^{-2})$

24 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $\ln(x)$ existe si et seulement si x est strictement positif.
2. $\ln(x)$ est supérieur à 1 pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
3. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

25 PYTHON Compléter et exécuter un programme

On considère le script incomplet de la fonction `signe_ln` écrit en langage Python.

```
1 def signe_ln(x):
2     if x ... :
3         return("Positif")
4     if x ... :
5         return("Nul")
6     if x ... :
7         return(...)
```

1. Compléter ce programme afin que l'appel `signe_ln(x)` pour un réel x strictement positif, renvoie un message indiquant si $\ln(x)$ est positif, nul ou négatif.

2. Que renvoie chacun des appels suivants ?

- a. `signe_ln(3)` b. `signe_ln(0,3)` c. `signe_ln(1)`

Dérivée et variations

Questions flash

26 ORAL Calculer les dérivées des fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

1. $f(x) = 3 \ln(x)$ 2. $g(x) = -\ln(x)$
3. $h(x) = \ln(x) + 5$ 4. $k(x) = \ln(x) + 2x$

27 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) + 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f .

28 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{x-1}{x}$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
2. En déduire les variations de f .

MATHS & SVT

29 On admet que, pour un âge x compris entre 15 et 60 ans, la capacité pulmonaire de l'être humain, exprimée en litres, peut être modélisée, sur l'intervalle $[15; 60]$, par la fonction $f(x) = -0,1x + 2\ln(2x)$.



1. Montrer que $f'(x) = \frac{2-0,1x}{x}$.
2. En déduire les variations de f .
3. À quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale ? Quelle est cette capacité maximale ?

Résoudre des équations et des inéquations

Questions flash

30 ORAL QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

L'équation $e^x = 5$:

- a. admet 5 comme solution.
b. admet e^5 comme solution.
c. admet $\ln(5)$ comme solution.
d. n'admet aucune solution.

31 ORAL Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 1$ 2. $e^x = 2$ 3. $e^x = 0$

32 Résoudre dans $]0; +\infty[$ les équations suivantes :

1. $\ln(x) = 13$ 2. $\ln(x) = 1$ 3. $\ln(x) = -1$

33 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $3e^x + 2 = 14$ 2. $11 - e^{2x+1} = 4$

34 Résoudre dans $]0; +\infty[$ les équations suivantes.

1. $3 \ln(5x) = -6$ 2. $10 - 3 \ln(4x) = 4$

35 **ALGO** Compléter un algorithme

1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a. $e^x = 3$ b. $e^x = -2$

2. Compléter l'algorithme ci-contre afin que la variable b contienne la solution de l'équation $e^x = a$ si elle existe, sinon un message indiquant que l'équation n'a pas de solution.

```

Si  $a > 0$ 
    Alors  $b \leftarrow \dots$ 
    Sinon  $b \leftarrow \dots$ 
Fin Si
    
```

MATHS & SVT

36 On a modélisé la fréquence cardiaque (en battements par minute) d'un coureur de 400 mètres par la formule $f(x) = 22 \ln(x+1) + 65$ où x représente la distance parcourue depuis le départ.

Au bout de combien de mètres la fréquence cardiaque de ce sportif est-elle égale à 164 battements par minutes ?

37 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^x > 3$ 2. $e^{2x} < 7$ 3. $e^x + 1 > 5$

38 Résoudre dans $]0; +\infty[$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(x) \geq \ln(3x)$ 2. $1 + 2 \ln(x) < 4$ 3. $\ln(x^2 + 9) > 0$

39 1. Résoudre l'inéquation $4 - \ln(x) > 0$.

2. En déduire le signe de $4 - \ln(x)$ suivant les valeurs de x .

40 Après avoir déterminé les conditions d'existence, déterminer le signe des expressions :

1. $\ln(x-6)$ 2. $\ln(5-3x)$ 3. $\ln(4-x)-2$

41 En utilisant un tableau de signes, déterminer le signe de l'expression $(5-x)\ln(x)$.

Propriétés algébriques du logarithme

Questions flash

42 **ORAL** 1. Exprimer $\ln(10)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$.

2. Exprimer $\ln\left(\frac{7}{3}\right)$ en fonction de $\ln(7)$ et $\ln(3)$.

3. Exprimer $\ln(\sqrt{11})$ en fonction de $\ln(11)$.

43 Exprimer en fonction de $\ln(2)$.

1. $\ln(8)$ 2. $\ln(\sqrt{8})$ 3. $\ln(\sqrt{8}e)$

44 1. Vérifier l'égalité $1\,000 = 2^3 \times 5^3$.

2. En déduire l'expression de $\ln(1\,000)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$.

45 Exprimer en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

1. $\ln(15e)$ 2. $\ln(45e^2)$ 3. $\ln\left(\frac{3 \times 25}{e^4}\right)$

46 Écrire les réels suivants en utilisant une seule fois le symbole $\ln$.

1. $5 \ln(2) + \ln(8) - \ln(4)$ 2. $\ln\left(\frac{e^2}{5}\right) + \ln(125)$

47 **ORAL** Utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour résoudre, dans $]0; +\infty[$, les équations suivantes.

1. $\ln(x) = \ln(3) + \ln(5)$ 2. $\ln(x) + \ln(6) = \ln(9)$

48 Utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour résoudre, dans $]0; +\infty[$, les inéquations suivantes.

1. $\ln(x) + \ln(3x) > \ln 75$ 2. $2 \ln(x) > -\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
3. $\ln(x) \leq 2 \ln(2) + \ln(3)$ 4. $2 \ln(x) \geq \ln(25) - \ln(16)$

Limites liées à la fonction logarithme

Questions flash

49 **ORAL** **QCM** Choisir la ou les bonnes réponses.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln(x)$:

- a. a pour limite 0. b. a pour limite $-\infty$.
c. a pour limite $+\infty$. d. n'admet pas de limite.

50 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (-5 \ln(x))$ 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) + 2)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \ln(x) - 3)$ 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(x) + 3)$

51 **ORAL** 1. Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction $\ln$?

2. En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) + x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)}$.

52 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 1 + \ln(x).$$

1. Justifier que la limite de f en 0 est égale à $-\infty$.
2. Justifier que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

53 Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par $f(x) = \frac{3}{\ln(x)}$.

1. Rappeler la limite de $\ln$ en 0 puis en déduire la limite de f en 0.
2. a. Donner le signe de $\ln(x)$ pour x de $]0; 1[$.
b. Déterminer la limite de f en 1.

54 Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 3[$ par : $g(x) = \ln(3-x)$.

1. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)$. b. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. a. Justifier que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (3-x) = 0^+$. b. En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} g(x)$.

55 1. Rappeler la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

2. En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} + 1 \right)$.

56 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 3x$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f(x) = x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 3 \right)$.
2. a. Rappeler la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.
b. En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - 3 \right)$.
c. Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.

La fonction logarithme népérien

57 Capacité 1, p. 237

Résoudre chacune des équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln(5x+1) = \ln(x)$ 2. $3 \ln(x) + 2 = 5$
 3. $e^{2x-5} = e$ 4. $4e^x - 3 = 9$

58 Capacité 1, p. 237

Résoudre chacune des inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $3 \ln(x) < 12$ 2. $6 - 3 \ln(x) \geq -3$
 3. $e^{x-4} > 3$ 4. $4 - 2e^{x-4} > 0$

59 Soit l'équation (E) : $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$.

Déterminer les conditions d'existence de cette équation, puis résoudre (E).

60 Soit l'inéquation (I) : $\ln(x^2 - 49) > 0$.

Déterminer les conditions d'existence de cette inéquation, puis résoudre (I).

Dans les exercices 61 à 63, déterminer les conditions d'existence puis résoudre les équations données.

- 61 1. $\ln(9 - x^2) = 0$ 2. $e^{\frac{x}{x+2}} = 3$
 62 1. $\ln(2x^2 - 7x + 6) = \ln(10)$ 2. $\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = 0$
 63 1. $\ln(x^2) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 2. $\ln(e^{2x} + 1) = 1$

Dans les exercices 64 à 66, déterminer les conditions d'existence puis résoudre les inéquations données.

- 64 1. $\ln(x-3) > 1$ 2. $\ln(x^2 + 5) \geq \ln(12)$
 65 1. $e^{2-x} \leq 3$ 2. $e^{x^2-1} > 2$
 66 1. $\ln(4x^2 - x) \leq \ln(3x)$ 2. $\ln(e^x - 1) \leq -1$

67 **FORME** Un logiciel de calcul formel a été utilisé pour résoudre une inéquation dont on obtient le résultat suivant.

```
1 resoudre(ln(x^2-x-6)<ln(3x-1), x)
      [(x>3)and(x<5)]
```

1. Écrire l'ensemble des solutions de cette inéquation sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.
 2. Justifier le résultat donné par le logiciel.

68 Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 2x - 15$.

1. Résoudre l'équation $P(x) = 0$, puis l'inéquation $P(x) < 0$.
 2. Dédire de la question 1. les solutions de l'équation :
 $(\ln(x))^2 - 2 \ln(x) - 15 = 0$.
 3. Dédire de la question 1. l'ensemble des solutions de l'inéquation : $e^{2x} - 2e^x - 15 < 0$.

Piste 2. : Poser $X = \ln(x)$. 3. : Poser $X = e^x$.

69 Résoudre les équations suivantes.

1. $(\ln(x))^2 + 2 \ln(x) = 3$ 2. $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$

Piste 2. : Poser $X = e^{2x}$.

70 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(\ln(x))^2 - 9 \ln(x) + 8 \geq 0$ 2. $3e^{2x} - 7e^x < -2$

MATHS & PHYSIQUE

71 PYTHON Comprendre un programme

Une entreprise de travaux publics utilise sur un chantier une machine de découpe.

À une distance de x mètres, le niveau sonore émis par la machine, exprimé en décibels, est modélisé par la fonction f définie sur $[0,1 ; 20]$ par : $f(x) = 95,14 - 8 \ln(x)$.

La législation en vigueur oblige à porter des protections individuelles contre le bruit dès que le niveau sonore est supérieur à 90 dB.

1. Un ouvrier de cette entreprise se situe à trois mètres de la machine.

- a. Doit-il porter des protections individuelles contre le bruit ?
 b. À quelle distance de la machine un ouvrier doit-il être pour ne pas avoir à porter de protections individuelles contre le bruit ?

2. On considère le programme Python ci-contre.

a. Quel est le rôle de la première fonction (lignes 3 à 5) ?

b. Quelle est la valeur retournée par l'appel `niveau()` ?

c. Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

```
1 from math import log
2
3 def f(x):
4     y = 95,14-8*log(x)
5     return y
6
7 def niveau():
8     x=0.1 ; y=f(0.1)
9     while y>=90:
10         x = x+0.1
11         y = f(x)
12     return(x)
```

72 PYTHON Écrire un programme

Écrire une fonction Python, de paramètre un réel a , et qui affiche la solution de l'équation $\ln(x) = a$.73 **LOGIQUE** Soit la proposition : « Si le réel a est solution de l'équation $\ln(x) + \ln(x-2) = \ln(8)$, alors a est solution de l'équation $\ln(x(x-2)) = \ln(8)$. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
 2. Écrire la réciproque de cette implication. Est-elle vraie ?

74 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. L'équation $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$ a une unique solution.
 2. $(\ln(x))^2 - 3 \ln(x) - 18 < 0$ si, et seulement si, $x \in]-3 ; 6[$.

Dérivée et variations

75 Capacité 2, p. 237

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 - \ln(x)$.

76 Capacité 2, p. 237

1. Justifier que, pour tout réel x de $]2; +\infty[$, on a $\frac{2x+3}{x-2} > 0$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{2x+3}{x-2}\right)$.

77 Soit f la fonction définie sur $[1; 11]$ par :

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 15 \ln(x).$$

1. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 15}{x}$ pour tout x de $[1; 11]$.

2. Dresser le tableau de variation de f .

78 Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x (e^x - 1).$$

79 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln(x).$$

1. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.

b. Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2. a. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire les variations de la fonction f .

MATHS & CHIMIE

80 Lors d'une réaction chimique, la concentration en moles par litre d'un produit est donnée en fonction du temps t (exprimé en minutes) par la fonction f définie pour $t \geq 0$ par : $f(t) = e^{-0,5t} - e^{-t}$.



a. À quel instant la concentration de ce produit est-elle maximale au cours de la réaction ?

b. À combien ce maximum est-il égal ?

81 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln(x)) \ln(x) \text{ et } \mathcal{C} \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Étudier les variations de f .

2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse e^2 .

3. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

82 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^3 + x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Déterminer une équation de T , la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

3. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .

MATHS & SES

83 Une entreprise produit et vend des pièces pour hélicoptères. Sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.

La fonction f définie sur l'intervalle $[1; 6]$ par :

$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln(x)$ modélise le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1; 6]$:

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 6]$.

3. En déduire le tableau de variation de f sur $[1; 6]$.

4. a. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ?

b. Calculer ce bénéfice maximal arrondi à l'euro près.

84 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $\ln$, a un réel strictement positif quelconque et A le point d'abscisse a de $\mathcal{C}$. On note T la tangente en A à $\mathcal{C}$.

1. Déterminer, en fonction de a , les coordonnées du point d'intersection de T avec l'axe des ordonnées.

2. En déduire une construction géométrique simple de la tangente T .

85 Une question ouverte

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$ et a un réel strictement positif.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse a .

Pour quelle(s) valeur(s) de a la tangente T passe-t-elle par l'origine du repère ?

Piste → Voir p. 466

86 1. Justifier que la fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$.

2. Écrire une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse 1.

3. En déduire que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$.

87 On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2. a. Étudier la convexité de la fonction f .

b. En déduire que pour tout x appartenant à $]-1; +\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$.

88 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Soit a et b deux réels strictement positifs, on note A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b tels que $A(a; \ln(a))$ et $B(b; \ln(b))$.

En utilisant la concavité de la fonction logarithme népérien, démontrer que : $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$.

89 VRAI/FAUX

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5; 10]$ par :

$$f(x) = -x + 2 + 3 \ln(x).$$

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

La courbe représentative de f est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

90 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1,5]$ par $f(x) = 9x^2(1 - 2 \ln(x)) + 10$.

1. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; 1,5]$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0; 1,5]$.

2. Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse e^{-1} .

91 LOGIQUE Soit f une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et la proposition : « Si $f(x) = \ln(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?

2. a. Énoncer la réciproque de cette proposition.

b. Cette proposition réciproque est-elle vraie ?

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

MATHS & PHYSIQUE

92 La magnitude apparente est une mesure de la puissance du rayonnement (l'éclat) d'un objet céleste observé depuis la Terre. Elle est donnée par la relation :

$$m = -\frac{2,5}{\ln(10)} \ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

où E est l'éclat de l'astre que l'on observe et E_0 est l'éclat de l'étoile Véga qui est prise en référence.

Autrement dit la magnitude apparente d'une étoile mesure le rapport d'éclat entre cette étoile et l'étoile Véga.

1. Quelle est la magnitude apparente de l'étoile Véga ?

2. L'étoile la plus brillante, après le Soleil, est Sirius dans la constellation du Grand Chien. Son éclat est 3,9 fois celui de Véga.

Calculer sa magnitude apparente.

3. La magnitude apparente du soleil est $-26,7$.

Calculer le rapport entre l'éclat apparent E_s du Soleil et E_0 celui de Véga.

4. Que peut-on dire d'une étoile qui a une magnitude apparente négative ?

5. a. Montrer que si m et m' sont les magnitudes apparentes de deux étoiles d'éclats respectifs E et E' , on a :

$$m < m' \text{ équivaut à } E > E'.$$

b. Interpréter ce résultat.



LE SAVIEZ-VOUS

Véga, également appelée Alpha Lyrae est la deuxième étoile la plus brillante du ciel de l'hémisphère nord. C'est une étoile relativement proche, elle se situe à environ 25 années-lumière de nous.

93 PYTHON Compléter un programme

1. a. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$.

b. Calculer $f(1)$, et en déduire le signe de $f'(x)$.

2. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 1 - x$.

b. Calculer $g(1)$, en déduire le signe de $g(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1.$$

4. a. Soit n un entier, $n \geq 2$. En posant $x = e^{\frac{1}{n}}$, montrer que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}.$$

b. Écrire l'encadrement de e obtenu pour $n = 2$.

5. a. Recopier et compléter le script de la fonction Python ci-contre afin que l'appel `encadre(p)` renvoie les bornes d'un encadrement de e d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-p} .

```
1 def encadre(p):
2     k = 2
3     a = 9/4; b = 4
4     while ... :
5         k = ...
6         a = ...
7         b = ...
8     return(a,b)
```

b. Programmer cette fonction et l'exécuter avec $p = 3$. Que constate-t-on ?

94 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel :

$$1 \leq u_n \leq e^2.$$

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$.

c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n .

d. Calculer la limite de la suite (u_n) .

4. VRAI/FAUX

Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0 .

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante.

b. Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq e^2$.

c. La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$.

Propriétés algébriques du logarithme

95 Capacité 3, p. 239

Exprimer en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$ chacun des nombres suivants :

a. $A = \ln(32)$ b. $B = \ln(600)$ c. $C = \ln(15) - 3 \ln(8)$

d. $D = \ln\left(\frac{81}{25}\right)$ e. $E = \ln\left(\frac{45e^2}{32}\right)$ f. $F = \ln\left(\frac{50}{3e}\right) + \ln(60)$

96 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

$\ln(128)$ est égal à :

- a. $\ln(2) + \ln(7)$ b. $7 \ln(2)$
c. $2 \ln(14)$ d. $\ln(120) + \ln(8)$

97 Capacité 3, p. 239

1. Simplifier l'expression $\ln(\sqrt{2} - 1) + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

2. Pour x réel appartenant à $]7; +\infty[$, on pose :

$$A = \ln(x - 7) - 2 \ln(x + 3).$$

Écrire A sous la forme du logarithme d'un quotient.

98 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Pour tout réel a strictement positif, $\frac{\ln(2a) + \ln(8a)}{2}$ est égal à :

- a. $\ln(4a)$ b. $\ln(5a)$ c. $\ln(16a)$ d. $\ln(8a^2)$

99 Montrer que $3 \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(5\sqrt{2} - 7)$ est un entier naturel.

100 1. Simplifier les expressions suivantes.

a. $A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

b. $B = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{8}{9}\right) + \ln\left(\frac{9}{10}\right)$

2. Soit n un entier naturel non nul. Simplifier :

$$D = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

101 Les fonctions f et g suivantes sont-elles égales ?

a. $f(x) = \ln(x + 1) + \ln(x)$ et $g(x) = \ln(x^2 + x)$

b. $f(x) = \ln(x(x - 1)^2) + \ln(x)$ et $g(x) = 2 \ln(x - 1) + \ln(x)$

102 Démontrer que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$:

a. $\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$

b. $\ln(\sqrt{e+x} - \sqrt{x}) + \ln(\sqrt{e+x} + \sqrt{x}) = 1$

103 Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = \frac{3}{2^n}$.

Quelle est la nature de la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln(u_n)$?

104 Une question ouverte

Que peut-on dire de la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \ln(u_n)$ où (u_n) est une suite géométrique de premier terme et de raison strictement positifs ?

Piste → Voir p. 466

105 LOGIQUE Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$.

Voici une proposition :

« Si f est la fonction logarithme népérien alors pour tous nombres réels a et b de $]0; +\infty[$, on a $f(ab) = f(a) + f(b)$. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?

2. a. Énoncer la proposition réciproque de cette proposition.

b. Cette proposition réciproque est-elle vraie ?

MATHS & PHYSIQUE

106 La troisième loi de Kepler affirme que, pour une planète de notre système solaire, le carré de sa période de révolution T (en années) autour du Soleil est proportionnel au cube de sa distance moyenne d au Soleil, c'est-à-dire : $T^2 = k d^3$.

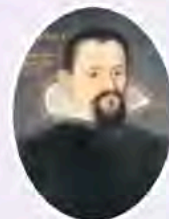


1. Écrire une relation entre les logarithmes népériens de T et de d .

2. Montrer que, dans un repère du plan, les points M de coordonnées $(\ln(d); \ln(T))$ sont alignés.

Point Histoire

Johannes Kepler (1571-1630) est un astronome allemand principalement connu pour les trois lois planétaires qui portent son nom et qui décrivent les propriétés principales du mouvement des planètes autour du Soleil.


107 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Pour tout réel a strictement positif :

$$\ln(a^7) - \ln(a^{-2}) = \ln(a^3) + \ln(a^6).$$

2. Pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(3x^2 + 15x) = \ln(3) + \ln(x) + \ln(x + 5).$$

108 Capacité 4, p. 239

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln(x - 4) + \ln(x - 2) = \ln(3)$

2. $\ln(2x^2 - 17x) = 2 \ln(3)$

109 Capacité 4, p. 239

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln(x) - \ln(5) \leq 3 \ln(2)$

2. $\ln(x - 5) + \ln(x + 9) \leq 2 \ln(3) + 3 \ln(2)$

110 Déterminer les conditions d'existence, puis résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(x - 2) + \ln(x - 32) = 6 \ln(2)$

2. $\ln((x - 2)(x - 32)) = 6 \ln(2)$

111 LOGIQUE Soit la proposition :

« Si a est solution de l'équation $\ln(x) + \ln(x - 1) = \ln(6)$, alors a est solution de l'équation $\ln(x(x - 1)) = \ln(6)$. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?

2. Écrire la réciproque de cette implication. Est-elle vraie ?

112 1. Montrer que, pour tout réel x :

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x-3)(2x^2 + 3x - 2).$$

2. Déterminer les conditions d'existence, puis résoudre l'équation : $2\ln(x) + \ln(2x-3) = \ln(11x-6)$.

113 Résoudre le système : $\begin{cases} x+y=30 \\ \ln(x) + \ln(y) = 3\ln(5) \end{cases}$

114 Déterminer les conditions d'existence, puis résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(3x^2 - x) \leq \ln(x) + \ln(2)$ 2. $2\ln(2x) \leq \ln(x^2 - 3x)$

115 Déterminer les conditions d'existence, puis résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(3x-1) + \ln(x+1) \leq \ln(5x-1)$

2. $\ln(3x-1) \leq \ln\left(\frac{1}{2x-1}\right) + \ln(2)$

116 Capacité 4, p. 239

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0,8^n \leq 0,12$.

117 Déterminer les plus petits entiers naturels n tels que :

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6}$ 2. $(1,15)^n \geq 2 \times 10^3$

118 1. Un parc de loisirs a reçu 3,5 millions de visiteurs en 2019. On suppose qu'à partir de 2020, la fréquentation de ce parc va diminuer de 2 % par an.

À partir de quelle année ce parc recevra-t-il moins de 3 millions de visiteurs ?



2. Un autre parc de loisirs a reçu 1,7 million de visiteurs en 2019. On suppose qu'à partir de 2020, la fréquentation de ce parc va augmenter de 2,5 % par an. À partir de quelle année ce parc recevra-t-il plus de 2,2 millions de visiteurs ?

3. À partir de quelle année le second parc recevra-t-il plus de visiteurs que le premier parc ?

119 PYTHON Compléter un programme

On considère ci-contre le script d'une fonction Python.

1. Compléter ce programme afin que l'appel `seuil()` retourne le plus petit entier naturel n_0 tel que $1,08^n \geq 10^4$.

2. Déterminer cet entier n_0 en résolvant une inéquation.

```
1 def seuil():
2     n=0
3     while ... :
4         n = ...
5     return(n)
```

120 1. Montrer, à l'aide de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ que, pour tout réel x strictement positif : $\ln(x) \leq x - 1$.

2. Soit a, b, c des réels strictement positifs et $m = \frac{a+b+c}{3}$.

En appliquant l'inégalité précédente aux réels $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ et $\frac{c}{m}$, montrer que : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$.

121 Une question ouverte

On considère l'équation (E_1) : $e^x - x^n = 0$, où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) : $\ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Piste → Voir p. 466

Limites et logarithme

122 Capacité 5, p. 241

1. Soit f la fonction définie sur $]0; 1[$ par $f(x) = \frac{3x+5}{\ln(x)}$.

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote verticale.

2. Soit g la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(\frac{5x}{2x-4}\right)$. Déterminer la limite de g en 2.

123 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{\ln(x)}.$$

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

124 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3\ln(x) - 2(\ln(x))^2.$$

1. a. Déterminer la limite de f en 0.

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Factoriser $f(x)$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

125 Soit h la fonction définie sur $]e; +\infty[$ par $h(x) = \frac{2\ln(x)+3}{\ln(x)-1}$.

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère.

1. Déterminer la limite de h en e . Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Vérifier que pour tout réel x de $]e; +\infty[$, $h(x) = \frac{2 + \frac{3}{\ln(x)}}{1 - \frac{1}{\ln(x)}}$.

b. En déduire la limite de h en $+\infty$, puis une deuxième asymptote pour $\mathcal{C}_h$.

126 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 - \sqrt{x}) \ln(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \sqrt{x}) \ln(x)$

127 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 3x + 2)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$

128 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln\left(\frac{3+x}{1-x}\right)$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \ln\left(\frac{2x+3}{4-x^2}\right)$

129 Capacité 6, p. 241

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués.

1. $g(x) = \frac{\ln(x)}{x+3}$ en $+\infty$
2. $f(x) = x^3 - \ln(x)$ en $+\infty$
3. $h(x) = x^3 \ln(x^3)$ en 0 ($x > 0$)
4. $k(x) = \frac{x}{x - \ln(x)}$ en 0 ($x > 0$)

130 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 3x}{2x^3}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2 + 2 \ln(x) - 3}{x^3}$

131 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(\sqrt{x})$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x)$

132 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{x+2}{x^2 \ln(x)} \right)$
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right)$

133 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 3 - \ln(x)$

134 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 5x}{3x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x+1}$

135 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^3} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x^2)} = +\infty$

136 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

137 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right).$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

138 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution pour tout réel m strictement positif.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite d d'équation $y = x$.
6. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites T et d .

MATHS & SVT

139 Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètres), mesuré à 1,30 m du sol, par la fonction f définie sur $]0; 1[$ par :

$f(x) = 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$, où x désigne le diamètre exprimé en mètres et $f(x)$ l'âge en années.



1. Démontrer que f est strictement croissante sur $]0; 1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

LE SAVIEZ-VOUS

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

MÉTHODE À L'ORAL
140 On considère l'équation (E) :

$$\ln(x+3) + \ln(x-5) = 2\ln(3) \text{ pour } x \text{ réel.}$$

1. Expliquer oralement pourquoi les conditions d'existence conduisent à résoudre (E) dans l'intervalle $]5; +\infty[$.
2. a. Expliquer oralement comment on transforme l'équation (E).
- b. Effectuer ces transformations et montrer que pour x de $]5; +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $x^2 - 2x - 24 = 0$.
3. Sachant que les racines du polynôme $x^2 - 2x - 24$ sont -4 et 6 , résoudre l'équation (E).

Problème de synthèse
141 CHERCHER = CALCULER

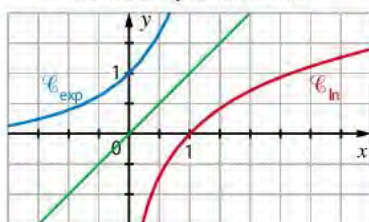
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a. Étudier la limite de f en 0.
- b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$?
- c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
- d. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}$.
- b. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- c. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
3. a. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont on précisera les coordonnées.
- b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

Courbe représentative



- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de $\ln$.

Lien avec la fonction exponentielle

- Pour tout réel x , $\ln(\exp(x)) = x$, ce qui s'écrit $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel x strictement positif, $\exp(\ln(x)) = x$, ce qui s'écrit $e^{\ln(x)} = x$.
- $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ et pour tout entier n , $\ln(e^n) = n$.

Relation fonctionnelle

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier n :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Logarithme népérien

- La fonction logarithme népérien que l'on note $\ln$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Pour $x > 0$, $y = \ln(x)$ équivaut à $e^y = x$.
- La fonction $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$.

Variations et conséquences

- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à $a < b$.
- $0 < x < 1$ équivaut à $\ln(x) < 0$.
- $x > 1$ équivaut à $\ln(x) > 0$.

Limites

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ • $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

Croissances comparées

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ • $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$

Pour tout entier n strictement positif

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ • $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$

Fonction dérivée

- Pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$.

Pour tout réel x de I , on a $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Faire le point avec des exercices corrigés

Transformer des écritures

* 142 ⌚ 15 min Capacité 3, p. 239

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les nombres suivants.

- a. $A = 2 \ln\left(\frac{1}{9}\right) - \ln(3\sqrt{3})$ b. $B = 2 \ln(243) - \ln(\sqrt{648})$
 c. $C = \ln(6e^5) - \ln(\sqrt{e})$ d. $D = \ln\left(\frac{e^2}{\sqrt{216}}\right)$

* 143 ⌚ 10 min Capacité 3, p. 239

Justifier l'égalité : $2 \ln(\sqrt{3} - 1) + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} + 4}{4}\right) = 0$.

* 144 ⌚ 5 min Capacité 3, p. 239

Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$2 \ln(x) - \ln(x^2 + 1) = \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\right).$$

* 145 ⌚ 15 min Capacité 3, p. 239

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$.

1. Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.
2. En déduire le signe de $f(x)$.

Résoudre des équations et des inéquations

* 146 ⌚ 5 min Capacité 1, p. 237

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1. $\ln(5 - x) = -2$ 2. $e^{x^2+1} = 3$

* 147 ⌚ 15 min Capacité 1, p. 237

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

1. $\ln(x^2 - 2x) \leq \ln(8)$ 2. $2e^{3x} - 5 \geq 0$
3. $(3 \ln(x) - 2)(5 - \ln(x)) < 0$

148 10 min Capacité 4, p. 239

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1. $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln(35)$.
2. $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln(x^2+5)$.

149 15 min Capacité 4, p. 239

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

1. $2 \ln(2x) \leq \ln(x^2 - 3x)$
2. $\ln(2x+1) + \ln(4-x) < \ln(7)$

150 15 min PYTHON Capacité 4, p. 239

En étudiant la croissance d'un bambou de taille initiale un mètre, on s'est aperçu que l'on pouvait modéliser sa taille en centimètres, au bout de n mois, par la suite (u_n) telle que $u_n = 500 \times 1,05^n - 400$, pour tout entier naturel n .

1. Compléter le script de la fonction Python donné ci-dessous afin que l'appel `bambou()` retourne le nombre de mois nécessaires à ce bambou pour atteindre ou dépasser 10 mètres.

```
1 def bambou():
2     n = 0
3     while ... :
4         ...
5     return(n)
```

2. Déterminer ce nombre de mois en résolvant une inéquation.

151 20 min Capacité 1, p. 237

Une grande enseigne a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ses offres promotionnelles après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction d'expression $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.

1. Quelle proportion de la population sera informée après trois jours ?
2. Après combien de jours la grande enseigne pourra-t-elle considérer que 90 % de la population est au courant de ces nouvelles offres ?

Calculer des limites

152 10 min Capacité 5, p. 241

Soit g la fonction définie sur $]0; e[$ par $g(x) = \frac{3x+2}{\ln(x)-1}$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. a. Déterminer la limite de g en e .
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.

153 10 min Capacité 5, p. 241

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Déterminer la limite de f en 0.
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.

154 15 min Capacité 5, p. 241

Soit f la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-9}{x^2+1}\right)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

155 15 min Capacité 6, p. 241

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x+1)^2 \ln(x+1)$
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

156 15 min Capacité 6, p. 241

Déterminer les limites :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\ln(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 1 - \ln(x)$

Étudier des fonctions

157 5 min Capacité 2, p. 237

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - 3x + 4.$$

158 15 min Capacités 2 et 5, pp. 237-241

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -2[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right).$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f .
2. Étudier les variations de la fonction f sur $]-\infty; -2[$.

159 25 min Capacités 2 et 5, pp. 237-241

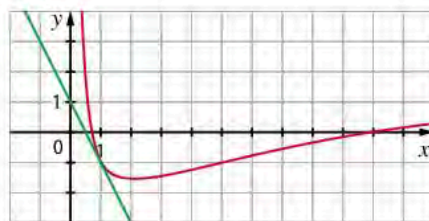
Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 4x - x \ln(x)$.

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de g .
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède deux solutions dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près.

160 30 min Capacités 2, 5 et 6, pp. 237-241

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$.

$\mathcal{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(1; -1)$.
 T passe par le point de coordonnées $(0; 1)$.

1. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
2. On sait que $f(x) = 2 \ln(x) + \frac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.
- a. Calculer $f'(x)$.
- b. Justifier alors que $a = 4$ et $b = -5$.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
4. Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.
5. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Résoudre une équation avec $\ln$

■ **Un exemple :** Résoudre l'équation $\ln(x+2) + \ln(6-x) = 2\ln(2) + \ln(3)$ (E).

Ma réflexion	→ Ma démarche
Quelles sont les conditions d'existence des expressions $\ln(x+2)$ et $\ln(6-x)$?	Toutes les expressions dont je calcule le logarithme népérien doivent être strictement positives. ► Expliquer pourquoi x doit appartenir à l'intervalle $]-2; 6[$.
Comment continuer ?	En utilisant la relation fonctionnelle et ses conséquences, je dois arriver à une équation de la forme $\ln(a) = \ln(b)$. ► Pourquoi le premier membre de l'équation peut-il s'écrire $\ln((x+2)(6-x))$? Écrire le second membre sous la forme $\ln(b)$.
Comment résoudre une équation de la forme $\ln(a) = \ln(b)$?	L'égalité $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$ lorsque a et b sont strictement positifs. ► Montrer que, pour $-2 < x < 6$, l'équation est équivalente à $(x+2)(6-x) = 12$.
Comment obtenir l'ensemble des solutions ?	On résout l'équation obtenue après simplification et on prend en considération les conditions d'existence. ► Résoudre l'équation $-x^2 + 4x = 0$, puis justifier que l'équation (E) a deux solutions que l'on précisera.

161 Résoudre l'équation $\ln(x+3) + \ln(x-5) = 2\ln(3)$.

162 Résoudre l'inéquation $\ln(x-7) + \ln(x+4) < 2\ln(2) + \ln(3)$.

163 Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 - 3x + 2) + \ln(2) \geq \ln(x+1)$.

PARCOURS 2 Calculer une dérivée d'une fonction liée à $\ln$

■ **Un exemple :** Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + \ln(x^2 - 1)$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Comment déterminer la formule de dérivation à appliquer ?	Je commence par observer la forme de $f(x)$: il s'agit d'une somme dont le second terme est de la forme $\ln(u(x))$. ► Identifier chacun des termes de cette somme et donner l'expression de $u(x)$.
Comment poursuivre ?	Je dois dériver chacune des fonctions de la somme. ► Rappeler la fonction dérivée de la fonction $\ln$ et la formule de dérivation de $\ln(u)$ lorsque u est une fonction dérivable, puis calculer $u'(x)$.
Comment terminer ?	J'applique la formule de dérivation d'une somme. ► Calculer $f'(x)$ et donner le résultat sous forme d'une écriture fractionnaire.
Quels moyens peut-on utiliser pour vérifier la cohérence du résultat ?	Je peux utiliser ma calculatrice. ► Remplacer x par deux ou trois valeurs dans l'expression de $f'(x)$ obtenue et vérifier que les résultats sont compatibles avec ceux obtenus en calculant les nombres dérivés correspondants avec la calculatrice.

164 Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = 2x \ln(x-1)$.

165 Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2 + 4\ln(x)$.

166 Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln(x) + 3}{x}$.

PARCOURS 3 Logarithmes et puissances

167 Chercher en autonomie

Puissance réelle d'un réel a strictement positif – Fonction $x \mapsto x^a$

Pour tout entier n et tout réel a strictement positif, on a $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

Ainsi $e^{\ln(a^n)} = e^{n \ln(a)}$ soit $a^n = e^{n \ln(a)}$.

Cette notion de puissance peut être étendue à tout exposant réel. Ainsi :

Pour tout réel a strictement positif et pour tout réel b , on pose $a^b = e^{b \ln(a)}$.

La puissance réelle d'un réel a étant l'exponentielle d'un nombre, c'est une quantité qui est toujours strictement positive.

1. Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs et tous réels b et c , on a :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } x^b \times x^c = x^{b+c} & \text{b. } x^{-b} = \frac{1}{x^b} & \text{c. } \frac{x^b}{x^c} = x^{b-c} \\ \text{d. } (x^b)^c = x^{b \times c} & \text{e. } x^b \times y^b = (xy)^b & \text{f. } \ln(x^b) = b \ln(x) \end{array}$$

2. a. Montrer que la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^\alpha$ (α réel fixé) est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que sa dérivée est $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

b. Construire le tableau de variation de la fonction f .

3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

4. On a représenté ci-contre la courbe représentative de quatre fonctions dont on donne l'expression :

$$f_1(x) = x^{-3,3}, f_2(x) = x^{-0,3}, f_3(x) = x^{0,3}, f_4(x) = x^{3,3}.$$

Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond.



A noter

Pour un réel a strictement positif, la fonction $x \mapsto a^x$ est appelée exponentielle de base a .

Piste 1. : On peut utiliser les propriétés algébriques des fonctions logarithme et exponentielle.

2. b. : Distinguer les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.

168 Application

Soit f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^x$ et $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

1. Pour chacune des fonctions f et g , étudier la limite en 0 et la limite en $+\infty$.

2. Étudier les variations des fonctions f et g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

PARCOURS 4 Calculs de limites

169 Chercher en autonomie

Limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2. Vérifier que, pour tout réel x strictement positif et tout n entier naturel non nul,

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}.$$

3. En utilisant le résultat des deux questions précédentes, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Piste 1. : Penser au taux d'accroissement entre 1 et $1+h$ de la fonction $\ln$.

3. : On pourra utiliser la limite d'une fonction composée.

170 Application : d'autres limites

1. Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ avec $u_n = n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ pour tout entier naturel n non nul.

171 = CALCULER REPRÉSENTER

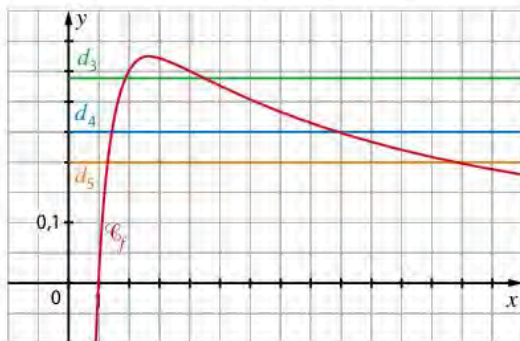
Famille d'équations

Le but de l'exercice est d'étudier l'équation (E_n) :

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n} \text{ pour } n \text{ entier naturel non nul.}$$

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f et déterminer son maximum.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'équation (E_n) : $f(x) = \frac{1}{n}$ possède, sur $[1; e]$, une unique solution notée α_n .
3. Sur le graphique ci-dessous sont tracées la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ainsi que les droites d_3 , d_4 et d_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$.



- a. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - b. Comparer, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
 - c. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - d. En déduire que la suite (α_n) converge.
4. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que $1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$ et que la suite (β_n) est croissante.
- a. Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (β_n) .

172 Un produit infini

Partie A : étude de fonctions

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$.
- b. En déduire le signe de $f(x)$.
2. a. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$.
- b. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$.
3. Justifier que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Partie B : encadrement et limite d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. En utilisant les questions précédentes, montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

3. En déduire la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

MATHS & PHYSIQUE

173 Niveau sonore

Le niveau sonore $N(I)$, en décibels (dB), d'un son d'intensité acoustique I exprimée en watts par mètre carré ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$), est donné par la formule :

$$N(I) = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right), \text{ où } I_0 \text{ désigne}$$

la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine et où $\log$ est la fonction logarithme décimal définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.



1. a. Calculer, en décibels, le niveau sonore $N(I)$ lorsque $I = I_0$.

b. Lors du décollage de la fusée Ariane, on a observé que $I = I_0 \times 10^{17}$. Calculer, en décibels, le niveau sonore correspondant.

2. Pour un marteau-piqueur, on a $N(I) = 110$.

Donner l'expression de l'intensité acoustique en fonction de I_0 .

3. On admet que les intensités acoustiques des sons s'additionnent. Le niveau sonore d'un violon est 70 dB.

Calculer, en décibels, le niveau sonore de dix violons identiques jouant ensemble.

4. Un isolant acoustique est vendu pour effectuer une atténuation du niveau sonore de 1,5 dB par centimètre d'épaisseur. L'épaisseur d'une cloison fabriquée avec ce matériau est de 10 cm. Cette cloison sépare deux pièces. Un son d'intensité acoustique notée I_B émis dans une pièce est atténué en un son d'intensité acoustique I_C dans l'autre pièce.

Donner la valeur arrondie à l'unité du rapport $\frac{I_B}{I_C}$.

Point Histoire

Le bel (B) et le décibel (dB) sont des unités utilisées pour exprimer le rapport de deux intensités. Cette unité a été nommée ainsi en l'honneur de l'inventeur canadien **Alexandre Graham Bell** (1847-1922), à qui l'on doit de nombreuses découvertes dans le domaine de la télécommunication.



174 CHERCHER RAISONNER

Ensemble de points

Pour tout réel p , on considère la fonction f_p définie sur $]0; +\infty[$ par $f_p(x) = x(p - \ln(x))$.

1. Montrer que f_p possède un maximum sur $]0; +\infty[$, atteint en une valeur x_p que l'on précisera.

2. On note S_p le point de la courbe représentative de f_p d'abscisse x_p .

Montrer que l'ensemble des points S_p , lorsque p parcourt $\mathbb{R}$, est une demi-droite.

Piste 2 : Ne pas oublier la réciproque.

175 PYTHON CALC

Retouche d'une image numérique

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris.

Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante : $x = 0$ pour le blanc ; $x = 1$ pour le noir ; $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

0,20	0,40	0,04	0,16	0,45	0,63
0,60	0,80	0,36	0,64	0,77	0,89

Image A

Image B

Image C

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes : $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$; f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$ et éclaircie si $f(x) < x$. Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessus.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessus.

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Tracer la courbe représentative de f_1 .

c. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$

a. Montrer que f_2 est une fonction de retouche.

b. On définit sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction g par :

$$g(x) = f_2(x) - x.$$

Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$:

$$g'(x) = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}.$$

c. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$, et démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e - 2}{e - 1}$. Montrer qu'une valeur arrondie au centième de ce maximum est 0,12.

d. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α et de β d'amplitude 0,01.

3. On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

On considère le programme donné ci-dessous.

```
1 from math import log,e
2
3 def f(x):
4     y = log(1+(e-1)*x)
5     return(y)
6
7 def retouche():
8     c = 0
9     for k in range(101):
10         x = k/100
11         y = f(x)
12         ecart = abs(x-y)
13         if ecart >= 0.05:
14             c = c+1
15     return(c)
```

On rappelle que la fonction `log` en Python désigne le logarithme népérien.

a. Quel est le rôle de la fonction `retouche` ?

b. Quelle valeur est retournée lors de l'appel `retouche()` ?

MATHS & SES

176 MODÉLISER COMMUNIQUER

Un truc de banquier

Les banquiers calculent le temps approximatif de doublement d'un capital, placé à intérêts composés, en utilisant la règle suivante : « Si le taux d'intérêt est égal à t %, le capital double au bout de $\frac{70}{t}$ années. »

On admet que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

Pour une démonstration de cette inégalité, voir l'exercice 172 partie A.

1. a. Déterminer une majoration de l'erreur commise lors de l'approximation de $\ln(1 + x)$ par x .

b. Vérifier que l'erreur commise est inférieure à 0,01 lorsque $x \leq 0,14$.

3. On note C_n la valeur d'un capital C_0 placé à intérêts composés au taux annuel $\frac{t}{100}$ pendant n années.

Exprimer, en fonction de t , le nombre d'années n nécessaires au doublement du capital C_0 .

4. Justifier le calcul des banquiers pour les petites valeurs du taux telles que $t \leq 14$.

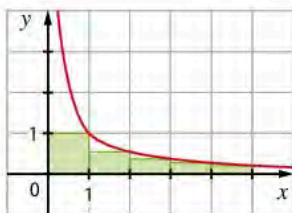
5. Énoncer des règles similaires permettant de déterminer le temps nécessaire pour qu'un capital placé à intérêts composés au taux annuel t triple, décuple.

177 PYTHON Compléter un programme

La constante d'Euler-Mascheroni

On se propose d'étudier la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Un terme u_n de cette suite peut s'interpréter comme la somme des aires des n rectangles inscrits sous la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.



1. En utilisant les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; 1[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$, démontrer que pour tout x dans $] -1 ; 1[$, $\ln(1+x) < x$.

2. a. En posant $x = \frac{1}{k}$, démontrer que pour tout entier naturel k non nul, on a : $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ (1).

b. En posant $x = -\frac{1}{k+1}$, démontrer que pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$ (2).

3. a. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \dots, n$ et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

b. En déduire que la suite (u_n) diverge.

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = u_n - \ln(n)$.

a. Montrer que, pour tout entier strictement positif n , $v_n \geq 0$.

b. Montrer que, pour tout entier strictement positif n , la suite (v_n) est décroissante.

On pourra utiliser l'inégalité (2).

5. Montrer que la suite (v_n) est convergente.

6. a. Compléter la fonction Python ci-contre pour que l'appel `euler(n)` renvoie le n -ième terme de la suite (v_n) .

```
1 from math import log
2
3 def euler(n):
4     u = 0
5     for k in range(1, n+1):
6         u += 1/k
7     return u - log(n)
```

b. Tester cette fonction avec $n = 10^p$, pour p allant de 3 à 6,

et en déduire une valeur approchée de la limite de la suite (v_n) .

LE SAVIEZ-VOUS

La suite (u_n) est appelée série harmonique. La limite γ de la suite (v_n) est appelée constante d'Euler-Mascheroni, et joue un grand rôle en mathématiques. On ignore toujours si γ est ou non un nombre rationnel.

TRAVAIL EN GROUPE

178 Quand on évoque la puissance d'un tremblement de terre, on donne souvent comme mesure une magnitude selon l'échelle de Richter.

Faire un exposé expliquant le principe de fonctionnement de cette échelle et expliquer pourquoi le tremblement de terre le plus puissant jamais enregistré en 1960 au Chili, avec une magnitude de 9,5, a libéré environ 11 millions fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 4,8, qui s'est produit en 2019 en Martinique.

MATHS & SVT

179 Le dosage de l'acidité d'une solution aqueuse, nommé pH (potentiel hydrogène), est défini par une relation faisant intervenir un logarithme décimal.

Faire un exposé expliquant ce qu'est le logarithme décimal, expliquer le principe de la mesure d'un pH et comment évolue le pH d'une solution dont la concentration a décuplé.

Prise d'initiatives

180 Soit n un entier naturel non nul.

1. Simplifier : $u_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

2. La suite (u_n) est-elle convergente ?

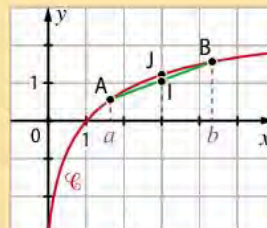
181 Soit k un réel avec $k > 0$. On considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $f_k(x) = x - k \ln(x)$.

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Donner, selon les valeurs de k , le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_k$ avec l'axe des abscisses.

182 Déterminer la plus courte distance entre la courbe représentative de la fonction $\ln$ et l'origine du repère orthonormé dans lequel elle est représentée.

183 On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \ln(x)$. A et B sont deux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b telles que $0 < a < b$.



I est le milieu de $[AB]$ et J est le point de $\mathcal{C}$ de même abscisse que I.

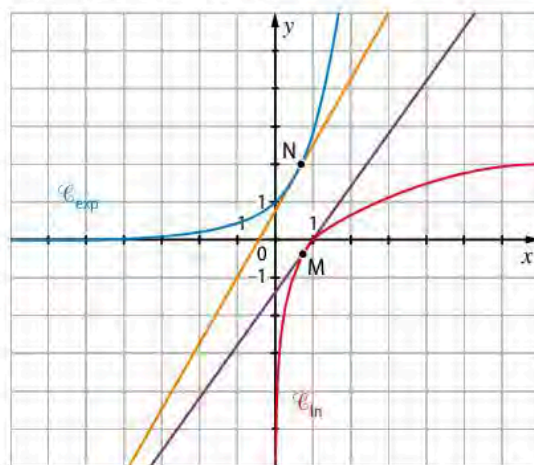
Démontrer que pour tous points A et B de $\mathcal{C}$, I est toujours « au-dessous » de J.

TP1 Problèmes de tangentes



On souhaite étudier les positions relatives de différentes tangentes aux courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle.

On note $\mathcal{C}_{\ln}$ la courbe représentative de la fonction $\ln$ dans un repère et $\mathcal{C}_{\exp}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans ce même repère.



Partie A

Soit a un réel strictement positif. On note :

- M le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_{\ln}$ et T_M la tangente en M à $\mathcal{C}_{\ln}$;
- N le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_{\exp}$ et T_N la tangente en N à $\mathcal{C}_{\exp}$.

On souhaite déterminer s'il existe des réels a tels que T_M soit parallèle à T_N .

1. a. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- b. Conjecturer le nombre de réels a répondant au problème et en donner une valeur approchée à 0,1 près.
2. a. Montrer que T_M et T_N sont parallèles si et seulement si le réel a est solution de l'équation (E) : $e^x - \frac{1}{x} = 0$.
- b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$ et en déduire que l'équation (E) a une unique solution notée α .
- c. Répondre alors au problème posé.
4. a. Préciser le signe de $h(x)$ en fonction des valeurs de x .
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

On souhaite maintenant déterminer si les courbes $\mathcal{C}_{\ln}$ et $\mathcal{C}_{\exp}$ ont des tangentes communes.

Soit A un point de $\mathcal{C}_{\ln}$, a l'abscisse de A et T_A la tangente en A à $\mathcal{C}_{\ln}$.

Soit B un point de $\mathcal{C}_{\exp}$, b l'abscisse de B et T_B la tangente en B à $\mathcal{C}_{\exp}$.

1. À l'aide du logiciel de géométrie dynamique, conjecturer l'existence de points A et B tels que T_A et T_B soient confondues.
2. Déterminer une équation de chacune des droites T_A et T_B , en fonction des réels a et b .
3. Démontrer que les droites T_A et T_B sont confondues si et seulement si les réels a et b vérifient :

$$\begin{cases} e^b = \frac{1}{a} \\ e^b(1-b) = \ln(a) - 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} e^b = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}(1 + \ln(a)) = \ln(a) - 1 \end{cases}$$

4. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x} - \ln(x) + 1$.

- a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{-(\ln(x) + x)}{x^2}$.
- b. Montrer que l'inéquation $\ln(x) + x > 0$ équivaut à $h(x) > 0$, où h est la fonction étudiée dans la partie A.
- c. En déduire les variations de la fonction f .
- d. Justifier alors l'existence de deux tangentes communes aux courbes $\mathcal{C}_{\ln}$ et $\mathcal{C}_{\exp}$.
Préciser pour chacune d'elles, une valeur approchée à 0,01 près de l'abscisse du point A.

TP2 Algorithme de Briggs

GÉOMÉTRIE

MODÉLISER

RAISONNER

On se propose d'étudier une des méthodes employées par Henry Briggs pour établir ses tables de logarithmes.

A Étude préliminaire

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un élément de I .

Rappeler la limite du quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

2. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par $g(x) = \ln(x)$

a. Calculer $g'(x)$ puis $g'(1)$.

b. En déduire : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Pour un réel h très proche de 0, on peut alors écrire : $\ln(1+h) \approx h$.

B Étude de l'algorithme

On va se servir de l'approximation vue à la partie A, avec un réel h tel que $|h| < 0,001$, afin de déterminer une valeur approchée du logarithme népérien d'un nombre réel a strictement positif.

L'idée est basée sur la propriété : $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Puis on itère le processus : $\ln(\sqrt{\sqrt{x}}) = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{4} \ln(x)$, etc.

Pour cela, on considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = a$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . Donner les résultats sous la forme $a^{\left(\frac{1}{p}\right)}$.

2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

3. a. Exprimer v_n en fonction de n .

b. En déduire une expression de u_n sous la forme $a^{\left(\frac{1}{p}\right)}$.

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

5. En utilisant l'approximation $\ln(1+h) \approx h$, justifier que, pour tout entier n « assez grand », on a l'approximation $\ln(u_n) \approx u_n - 1$.

6. Montrer que, pour tout entier n « assez grand », $\ln(u_n^{2^n}) \approx 2^n \left(a^{\left(\frac{1}{2^n}\right)} - 1 \right)$.

7. En déduire que, pour tout entier n « assez grand », $\ln(a) \approx 2^n \left(a^{\left(\frac{1}{2^n}\right)} - 1 \right)$.

C Programmation de l'algorithme

On donne le script incomplet d'une fonction Python.

1. Recopier et compléter ce script afin que l'appel `briggs(a)`, où a est un réel strictement positif, renvoie une valeur approchée de $\ln(a)$ par la méthode décrite dans la partie B.

2. Que peut-on dire de l'écart entre la valeur contenue dans la variable `u` et le réel 1 en sortie de la boucle « while » ?

3. Exécuter la fonction avec différentes valeurs de a et comparer le résultat obtenu avec la valeur du logarithme affichée par la calculatrice.

4. Que se passe-t-il si, à la ligne 5, on remplace la valeur 0,001 par 0,000 1, puis par 10^{-6} ?



Point Histoire



Henry Briggs (1556-1630) est un mathématicien anglais qui publie en 1624 son ouvrage *Arithmetica logarithmica* dans lequel on trouve des tables du logarithme décimal très précises. Il a ainsi établi les tables de logarithmes pour 30 000 entrées avec 14 décimales pour chaque logarithme.

```
1 from math import sqrt
2
3 def briggs(a):
4     u=a ; n=0
5     while abs(u-1)>=0.001:
6         n=n+1
7         u=...
8     b=...
9     return(b)
```


Question

Pourquoi et comment ont été créés les logarithmes ?

Enjeu de la question

Au début du XVII^e siècle, les mathématiciens cherchent des méthodes pour effectuer les calculs plus rapidement. En effet suite au développement de plusieurs disciplines, en particulier l'astronomie et la navigation, les besoins en calculs vont en grandissant.



6581251	13810721	28912416	24830446
6932885	12911050	18927046	24929630
7084110	13011594	19027872	25130704
7185126	13111727	19128403	25135967
7285733	13212257	19228330	25240140
7386032	13312385	19328510	25340312
7486923	13412710	19428780	25440483
7587506	13513233	19529203	25540654
7688581	13613554	19629226	25740824
7789646	13713672	19729447	25740992
7890209	13813988	19829907	25841162
7990763	13914301	19929883	25941330
8091309	14014613	20030101	26041497
8191849	14114922	20130320	26141664
8292381	14215229	20230533	26241830
8392908	14315534	20330750	26341996
8493428	14415836	20430963	26442162
8593942	14516137	20531173	26542325
8694450	14616433	20631387	26642488
8794952	14716732	20731597	26742651
8895448	14817026	20831806	26842813
8995939	14917319	20932015	26942975
9096424	15017609	21032222	27043136
9196904	15117895	21132428	27143297
9297379	15218184	21232634	27243457
9397848	15318469	21332838	27343616
9498313	15418752	21433041	27443773
9598772	15519033	21533244	27543930
9699227	15619314	21633445	27644089
9799677	15719595	21733646	27744248
9899913	15819866	21833846	27844404
9999944	15920140	21934046	27944560

Plan possible

1. Introduction : les besoins en calcul au début du XVII^e siècle (astronomie, trigonométrie, etc.)
2. Remplacement des multiplications par des additions : le logarithme décimal
3. L'aire sous l'hyperbole : le logarithme népérien
4. Principe de fonctionnement des tables de logarithmiques

Questions d'approfondissement possibles

Donner deux propriétés que l'on déduit de la relation fondamentale et les démontrer.

Quel est le lien entre le logarithme décimal et le logarithme népérien ?

Comment définit-on la fonction exponentielle en première et quel est son lien avec la fonction logarithme népérien ?

Donner le code Python de l'algorithme de Briggs.

Poursuite d'études et projet professionnel

Pourquoi étudier les logarithmes ?

On les utilise pour construire des échelles de mesure adaptées à de nombreux phénomènes chimiques ou physiques dont la croissance est qualifiée d'exponentielle.

Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude des logarithmes est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : classes préparatoires, licences scientifiques, IUT scientifiques, écoles d'ingénieur.

Un exemple de métier ?

L'**astrophysicien(ne)** étudie la physique et les propriétés des objets célestes (planètes, étoiles, galaxies). Il (elle) doit avant tout observer. Pour cela, il(elle) dispose d'instruments de mesure perfectionnés : télescopes, interféromètres, satellites ou sondes spatiales.

Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 140, 178, 179

Les mots-clés

Fonction logarithme • Fonction exponentielle
• Suites arithmétiques ou géométriques
• Limites • Primitives • Équations différentielles

Support de présentation possible

• Recherche d'une fonction f vérifiant : $f(ab) = f(a) + f(b)$ pour tous réels a et b positifs

• John Napier (ou Neper) (1550–1617)

Il trouve un moyen de remplacer les multiplications par des additions, ce qui diminue fortement les temps de calcul.

• Algorithme de Briggs

• Le logarithme décimal

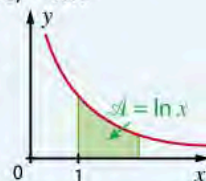
Considérons les deux progressions :

$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots ; n$

$1 ; 10 ; 10^2 ; 10^3 ; 10^4 ; \dots ; 10^n$

À chaque terme de la progression géométrique, on fait correspondre le terme de même rang de la progression arithmétique, on définit ainsi la fonction logarithme en base 10. On a : $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1 \dots$

• Construction du logarithme népérien par quadrature de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$



Cette page fait le point sur les capacités relatives au tableur, liées à ce chapitre, qui peuvent être posées au Bac.

UN EXEMPLE

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

On cherche à calculer les différents termes de la suite et à déterminer le premier indice n pour lequel $u_n < 0,6$.

La colonne A contient les indices n strictement positifs.

La colonne B doit contenir, sur la ligne d'indice n , la valeur de $\frac{1}{n}$.

La colonne C doit contenir, sur la ligne d'indice n , la somme partielle des inverses des indices : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

La colonne D doit contenir les différents termes de la suite (u_n) .

La colonne E sera complétée par recopie vers le bas de la formule saisie en E2.

Fichier Tableur

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

E2	A	B	C	D	E
1	n	$1/n$	$\Sigma 1/n$	u_n	Test
2	1	1	1	1	non
3	2	0,5	1,5	0,806853	
4	3	0,33333	1,83333	0,734721	
5	4	0,25	2,08333	0,697039	
6	5	0,2	2,28333	0,673895	
7	6	0,16667	2,45	0,658241	
8	7	0,14286	2,59286	0,646947	

LES QUESTIONS QUI PEUVENT ÊTRE POSÉES LE JOUR DU BAC

Écrire une formule

1. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B2 pour obtenir la colonne B par recopie vers le bas ?

Déterminer une formule obtenue par recopie

2. On a saisi dans la cellule C2 la formule `=SOMME(BS2:B2)`, puis on l'a recopiée vers le bas. Quelle formule contient la cellule C8 ?

Méthode

Pour déterminer une formule obtenue par recopie, on utilise le fait que quand le symbole \$ précède le numéro d'une ligne, ce numéro est inchangé par recopie vers le bas.

Choisir une formule parmi plusieurs formules

3. Parmi les formules ci-dessous, quelle(s) formule(s), destinée(s) à être recopiée(s) vers le bas, peut-on saisir dans la cellule D3 pour obtenir les termes de la suite (u_n) ?

- a. `=B3-A3`
- b. `=B3-LN (A3)`
- c. `=C3-A3`
- d. `=C3-LN (A3)`

Déterminer un résultat donné par une formule

4. On recopie vers le bas la formule saisie dans la cellule E2. Quelle valeur est alors affichée dans la cellule E8 ?

RÉPONSES

1. La colonne B contient sur la ligne d'indice n , la valeur de $\frac{1}{n}$. La formule requise est ainsi `=1/A2`. Celle-ci se recopiera dans la cellule B3 en `=1/A3`...

2. Lorsque dans l'adresse d'une cellule, le signe \$ précède le numéro d'une ligne, ce dernier est inchangé par recopie vers le bas, sinon il est incrémenté de 1 à chaque recopie vers la cellule du dessous. Ainsi la formule sera recopiée dans la cellule C8 en `=SOMME(BS2:B8)`.

3. Pour obtenir la valeur du terme de rang n de la suite (u_n) il faut soustraire $\ln(n)$ à la somme $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ qui est calculée dans la colonne C ; la valeur de n se trouvant dans la colonne A. Seule la formule de la réponse d. est exacte. Les formules mathématiques associées aux différentes propositions sont, pour tout $n \geq 1$:

- proposition a : $u_n = \frac{1}{n} - n$;
- proposition b : $u_n = \frac{1}{n} - \ln(n)$;
- proposition c : $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - n$;
- proposition d : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

4. La formule est recopiée dans la cellule E8 en `=SI(D8<0,6;"oui";"non")`. Cette formule permet d'afficher « oui » si la valeur affichée dans la cellule D8 est strictement inférieure à 0,6, et d'afficher « non » dans le cas contraire. La valeur affichée en D8 est environ égale à 0,646947 donc la valeur affichée en E8 est « non ».

THÈMES

- Fonction logarithme népérien
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Intersection de deux courbes

ÉNONCÉ

- Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.
 - Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
 - En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x .
- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$.
 - Déterminer la limite de la fonction f en 0.
 - Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la question 1.
 - En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ
ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. a. Pour étudier les variations d'une fonction, on dérive cette fonction, puis on étudie le signe de cette dérivée. u est la somme de deux fonctions dont le premier terme est la fonction $\ln$.

Capacité 2, p. 237

b. On ne sait pas résoudre l'équation $u(x) = 0$, mais on peut démontrer qu'elle a une unique solution en appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. On vérifie les trois hypothèses de ce corollaire et pour cela on utilise le résultat de la question précédente.

Chapitre 6, capacité 3, p. 205

c. On utilise la stricte croissance de la fonction u et le fait que $u(\alpha) = 0$.

2. a. On utilise un théorème sur la limite d'un produit et sur la limite de $\ln$ en 0.

Capacité 5, p. 241

b. f est la somme d'un produit de deux fonctions et d'une fonction constante. Pour dériver le premier terme de cette somme, on applique la formule : $(uv)' = u'v + uv'$. Pour parvenir au résultat donné dans l'énoncé, penser à réduire au même dénominateur x^2 .

Capacité 2, p. 237

c. Le signe de $u(x)$ a été étudié dans la question 1., ce qui permet d'obtenir le signe de $f'(x)$.

SOLUTION COMMENTÉE

1. a. u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $u'(x) = \frac{1}{x} + 1$.
 $x > 0$, donc $\frac{1}{x} > 0$ et $\frac{1}{x} + 1 > 1 > 0$.
 Ainsi $u'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.
 Donc u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b. La fonction u est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$; de plus, $u(2) \approx -0,31$ et $u(3) \approx 1,10$ donc $u(2) < 0 < u(3)$.
 Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α sur $]0; +\infty[$.
 On en déduit également que cette solution α est comprise entre 2 et 3.

c. La fonction u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 Donc pour $x < \alpha$, on a $u(x) < u(\alpha)$, soit $u(x) < 0$, car $u(\alpha) = 0$.
 Et pour $x > \alpha$, $u(x) > u(\alpha)$, soit $u(x) > 0$.

2. a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$, d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x) - 2) = -\infty$.
 Avec un théorème sur la limite d'un produit : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et
 $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$
 donc $f'(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ et
 $f'(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x^2} + \frac{x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$.

c. x^2 est strictement positif sur $]0; +\infty[$, donc $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$.
 Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$ et $f'(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.
 f est donc décroissante sur $]0; \alpha[$ et croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

Sujet A ⌚ 40 min

CALCULER

RAISONNER



- THÈMES** • Fonction exponentielle
 • Fonction logarithme népérien
 • Convexité – Point d'inflexion

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ▶ Capacités 1 et 4 pp. 237-239

Question 3. ▶ Capacité 4 p. 239

Question 5. ▶ Capacité 2 p. 237

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. L'équation $\ln(5) + \ln(x+1) = 1$ a pour solution :

- a. $x = e - 6$ b. $x = -1$ c. $x = \frac{1}{5}e - 1$ d. $x = -0,5$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 \ln(x) - x$. Le nombre $f'(2)$ est égal à :

- a. -1 b. 0 c. $2 \ln(2) - 2$ d. $2 \ln(2) - 1$

3. Le plus petit entier naturel n solution de l'inéquation $2^n > 175$ est :

- a. $\ln\left(\frac{175}{2}\right)$ b. 7 c. 8 d. $\ln(175) - \ln(2)$

4. On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = (x+1) \ln(x)$.

- a. $g'(x) = \frac{1}{x}$ b. $g'(x) = 1 + \ln(x)$
 c. $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d. $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln(x)$

Pour les questions 5 à 7, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 3]$ par $f(x) = x^2(1 - \ln(x))$.On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.5. Sur l'intervalle $[1; 3]$:

- a. f est convexe b. f est décroissante
 c. f' est décroissante d. f' est positive

6. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse e s'écrit :

- a. $y = -x + e$ b. $y = -ex$ c. $y = -ex + e^2$

7. $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse est :

- a. 1 b. e c. $\frac{1}{e}$ d. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

Sujet B ⌚ 30 min

CHERCHER

CALCULER

CALC

- THÈMES** • Fonction logarithme népérien
 • Étude des variations d'une fonction
 • Calcul de limites
 • Croissances comparées
 • Théorème des valeurs intermédiaires

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ▶ Capacité 5 p. 241

Question 2. ▶ Capacités 3 et 6 pp. 239-241

Question 3. ▶ Capacité 2 p. 237

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.2. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 4 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2.$$

b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.3. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.c. Calculer $f(1)$ et $f(e^2)$.

On obtient alors le tableau de variation ci-dessous.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		0	$\frac{4}{e^2}$	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Sujet C ⌚ 40 min

RAISONNER

REPRÉSENTER

PYTHON

- THÈMES** • Fonction logarithme népérien

- Étude des variations d'une fonction
- Calcul de limites
- Démonstration par récurrence
- Limite de suite, convergence

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question A. 1. ▶ Capacité 1 p. 237

Question A. 2 et 3. ▶ Capacités 2 et 5 pp. 237-241

Question A. 4. ▶ Chapitre 4, capacité 2 p. 129

Question B. 3. ▶ Chapitre 4, capacités 7 et 8 p. 135

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.2. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.

4. On considère la fonction Python suivante.

```
1 from math import log
2
3 def valeur(A):
4     N = 0
5     while N-log(N**2+1) < A:
6         N = N+1
7     return(N)
```

a. Quel est le rôle de cette fonction ?

b. Déterminer la valeur retournée lors de l'appel valeur(100).

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0 ; 1]$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n) .

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note l la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de l .

Sujet D 30 min

MODÉLISER CALCULER CALC

THÈMES • Fonction logarithme népérien
• Étude des variations d'une fonction
• Algorithmique

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions 1. et 2. ► Capacités 1 et 2 p. 237
Question 2. ► Chapitre 6, capacité 3 p. 205

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 9]$ par $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x)$.

On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 9]$ et on note f' sa fonction dérivée. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 9]$, on a $f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2. a. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1 ; 9]$.

b. Justifier que, sur l'intervalle $[1 ; 9]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α .

c. Donner un encadrement au centième près de α .

d. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
X ← 1
Y ← 7,5
Tant que Y > 5
    X ← X + 0,01
    Y ← 0,5X² - 7X + 14 + 6 × ln(X)
Fin Tant que
```

À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable X ?

3. Pour quelle quantité de pneus, le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est-il minimal ?

À combien s'élève-t-il ?

Sujet E 45 min

COMMUNIQUER REPRÉSENTER PYTHON

THÈMES • Fonction logarithme népérien

• Étude des variations d'une fonction

• Calculs de limites

• Programmation

• Théorème des valeurs intermédiaires

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions 2. b. ► Capacité 5 p. 241

Question 3. ► Chapitre 6, capacité 3 p. 205

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

• les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1 ; 0)$, $(1 ; 2)$, $(0 ; 2)$;

• la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en B ;

• il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x , $f(x) = \frac{a + b\ln(x)}{x}$.

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x ,

$$f'(x) = \frac{(b-a) - b\ln(x)}{x^2}.$$

c. En déduire les réels a et b .

2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln(x)$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}.$$

c. En déduire le tableau de variation de la fonction f .

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4. On donne ci-contre le script d'une fonction Python.

a. Que représentent les valeurs retournées par la fonction calcul ?

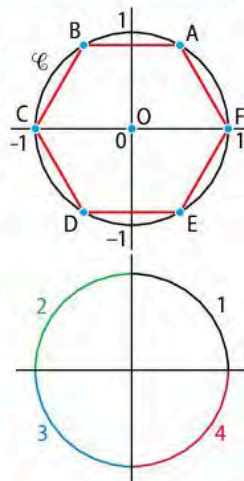
b. Modifier la fonction calcul pour que l'appel calcul() retourne les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} .

```
1 from math import log
2
3 def calcul():
4     a=0 ; b=1
5     while b-a > 0.1:
6         m=(a+b)/2
7         y=2/m+2*log(m)/m
8         if y < 1:
9             a=m
10        else:
11            b=m
12    return(a,b)
```


Utiliser le cercle trigonométrique

1 On considère les six points suivants, A, B, C, D, E et F, sur le cercle trigonométrique ci-contre. L'hexagone ABCDEF est régulier, ce qui signifie que les six triangles OAB, OBC, ..., OFA sont équilatéraux.

Associer chacun de ces points de façon unique à l'un des réels suivants : $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.



2 On considère le cercle trigonométrique ci-contre, partagé en quatre arcs de même mesure.

Indiquer sur quel arc de cercle se trouve le point image par enroulement de la droite numérique de chacun des réels suivants.

- a. $\frac{25\pi}{4}$ b. $\frac{16\pi}{3}$ c. $\frac{7\pi}{4}$ d. $-\frac{5\pi}{8}$

Calculer le cosinus et le sinus d'un réel

3 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$ a. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $-\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 2. $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$ a. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 3. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$ a. $-\sqrt{2}$ b. 0 c. $\sqrt{2}$ d. $\sqrt{3}$

4 Soit x un réel de l'intervalle $[-\pi; 0]$ tel que $\cos x = 0,8$. Calculer la valeur exacte de $\sin x$.

Utiliser les propriétés des fonctions cosinus et sinus

5 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Pour tout réel x , $\sin(x + 2020\pi) = \sin x$.
 2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + 3$. La fonction f est impaire.
 3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$. Pour tout réel x , on a $f(x + 2\pi) = f(x)$.

6 PYTHON On considère la fonction Python dont on donne le script ci-contre.

```
from math import*
def liste(n):
    return([i*pi/n for i in range(n+1)])
```

a. Que retourne l'appel `liste(2)` ? et `liste(4)` ?

b. Donner une interprétation graphique sur le cercle trigonométrique de la liste retournée par cette fonction.

7 PYTHON Soit la fonction f dont on donne le script ci-contre, en langage Python. Que retourne $f(\pi/6)$?

```
from math import*
def f(x):
    a=1-cos(x)**2
    b=sqrt(a)
    return b
```



TRIGONOMÉTRIQUES

CHAPITRE

8



Les fonctions cosinus et sinus permettent de décrire la propagation de toute sortes d'ondes. En particulier, elles modélisent les sons produits par les instruments de musique, ou encore l'onde d'une pierre lancée dans une flaque d'eau et que l'on peut voir se propager. C'est à travers leur étude que nous comprenons mieux le monde qui nous entoure.

Voir exercice 80 page 278

LES NOTIONS DU CHAPITRE

- Fonctions sinus et cosinus
- Équations et inéquations trigonométriques



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	p 273
Animations	pp. 268, 269, 270, 272
Corrigés détaillés	pp. 282, 283, 290

Activité 1

Objectif

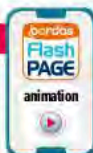
Découvrir la courbe de la fonction cosinus.

Cours 1

Les fonctions sinus et cosinus

Animation

Courbes des fonctions sinus et cosinus



Point par point, la courbe d'une fonction

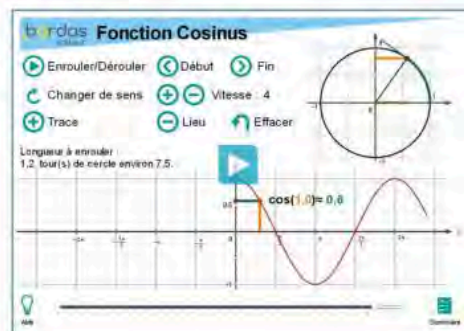
1 Recopier et compléter le tableau suivant.

Réel a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(a)$	...	...	...	...	...

2 À l'aide du tableau ci-dessus, placer les six points de coordonnées $(a ; \cos(a))$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On pourra prendre comme échelle 3 cm pour $\frac{\pi}{2}$ unités sur l'axe des abscisses, et 3 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

3 Placer tous les points de coordonnées $(a ; \cos(a))$ avec les valeurs présentées dans l'animation.

4 Tracer alors une courbe passant par tous ces points de la façon la plus régulière possible. Cette courbe est celle de la fonction **cosinus**.



Activité 2

Objectif

Découvrir la dérivée de la fonction sinus.

Cours 1

Les fonctions sinus et cosinus

Fichier GeoGebra / Cabri

Disponible en ligne sur lycee.editions-bordas.fr

GÉOMÉTRIE Du sinus au cosinus

1 a. Avec un logiciel de géométrie dynamique, on trace la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$.

b. On crée un point A sur cette courbe, puis on construit la tangente a en A à la courbe $\mathcal{C}$.

2 Soit B le point de même abscisse que A et dont l'ordonnée est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en M.

a. Placer B en utilisant l'instruction : $B=(x(a), \text{Pente}(a))$.

b. Activer la trace de B et déplacer le point A. Quelle courbe connue semble se dessiner ?

3 Conjecturer l'expression de la fonction dérivée de f .

Activité 3

Objectif

Étudier une fonction trigonométrique liée à une situation concrète.

Cours 1

Les fonctions sinus et cosinus

Portée d'une balle de golf

On s'intéresse à la trajectoire d'une balle de golf lancée depuis un point O du sol à la vitesse initiale $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$).

On admet qu'une équation de la trajectoire dans un repère orthonormé d'origine O et dont l'axe des abscisses est porté par le sol est donnée par : $y = -\frac{0,05}{(\cos(\alpha))^2} x^2 + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} x$.

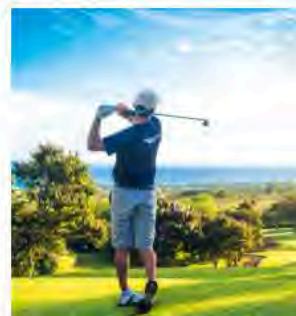
1 Montrer que l'abscisse du point M où la balle atteint le sol est $x_0 = 20 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$.

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(\alpha) = 20 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$. Montrer que $f'(\alpha) = 20(2 \cos^2(\alpha) - 1)$.

3 a. Justifier, à l'aide des variations de la fonction cosinus que, pour $x \leq \frac{\pi}{4}$, $\cos(\alpha) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, et que pour $x \geq \frac{\pi}{4}$, $\cos(\alpha) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. En déduire la valeur de α pour laquelle l'abscisse de M est maximale.

c. Calculer alors cette abscisse. On l'appelle la **portée** de ce lancer.



Activité 4

Objectif

Résoudre une équation trigonométrique.

Cours 2
Équations et inéquations
trigonométriques

Animation

Équation
 $\cos(x) = a$
et inéquation
 $\cos(x) \leq a$



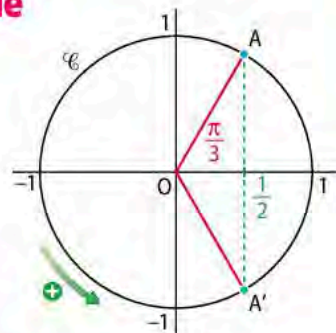
GÉOMÉTRIE Une équation trigonométrique

1 Soit l'équation $\cos x = 0,5$, avec x appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

a. De quel angle remarquable le nombre réel 0,5 est-il le cosinus ?

b. Sur le cercle trigonométrique ci-contre, on a placé le point A, associé au nombre réel $\frac{\pi}{3}$ et le point A', symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

c. En déduire les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$ de l'équation $\cos x = 0,5$.



2 On s'intéresse à présent à l'équation $\cos x = 0,5$, avec x appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$.

a. Le point A' est associé à un unique réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$. Quel est ce réel ?

b. En déduire les solutions appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi]$ de l'équation $\cos x = 0,5$.

3 Retrouver ces résultats avec un logiciel de géométrie dynamique, en graduant l'axe horizontal de $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6}$, et en traçant la courbe représentative de la fonction cosinus et la droite d'équation $y = 0,5$.

Activité 5

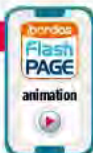
Objectif

Découvrir deux méthodes de résolution d'une inéquation trigonométrique.

Cours 2
Équations et inéquations
trigonométriques

Animation

Équation
 $\cos(x) = a$
et inéquation
 $\cos(x) \leq a$



Deux méthodes pour une inéquation

1 Dans l'intervalle $[0; 2\pi]$, les solutions de l'équation $\cos(x) = -0,5$ sont $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. Quelles sont les solutions de cette équation dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$?

2 On considère l'inéquation (I) : $\cos(x) \leq -0,5$.

Sur le cercle trigonométrique ci-contre, on fait figurer les points M et N associés aux solutions de l'équation $\cos(x) = -0,5$.

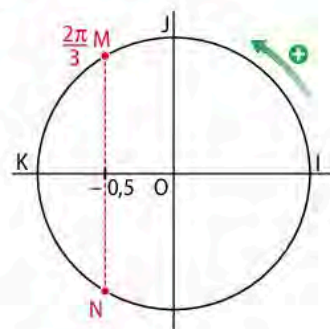
a. Recopier ce cercle et colorer les points du cercle associés aux réels dont le cosinus est inférieur à $-0,5$.

b. À quel réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$ est associé le point N ?

c. En partant du point I associé au réel 0, « parcourir le cercle » dans le sens positif et repérer au fur et à mesure les réels auxquels sont associés les points colorés.

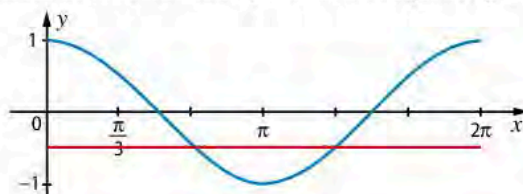
En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

d. Après avoir indiqué à quel réel de l'intervalle $[-\pi; \pi]$ est associé le point N, procéder de la même façon que dans la question c. en partant cette fois du point K associé au réel $-\pi$. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.



3 On se propose maintenant de résoudre l'inéquation (I) dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ en utilisant la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[0; 2\pi]$.

On a représenté ci-dessous cette courbe ainsi que la droite d'équation $y = -0,5$.



Par la lecture graphique, retrouver en justifiant la réponse apportée à la question 2.c.

1. Fonctions sinus et cosinus

Propriétés des fonctions sinus et cosinus

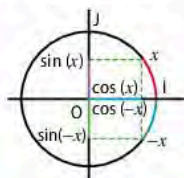
Animation

Le cercle trigonométrique



À noter

Pour un réel x , on lit $\sin(x)$, $\sin(-x)$, $\cos(x)$ et $\cos(-x)$ sur le cercle trigonométrique.



CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

(1) (admise) Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

(2) (admise) Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

PÉRIODICITÉ Pour tout réel x , $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques**, de période 2π .

Conséquence : Pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle d'amplitude 2π , puis de la compléter par des translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$. Il en est de même pour la courbe représentative de la fonction cosinus.

PARITÉ Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$.

On dit que la fonction sinus est **impaire** et que la fonction cosinus est **paire**.

Conséquence : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère O .

Celle de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

PROPRIÉTÉ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors, les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos[u(x)]$ et $g(x) = \sin[u(x)]$ sont dérivables sur I et, pour tout réel x de I , on a :

$$f'(x) = -u'(x) \sin[u(x)] \quad \text{et} \quad g'(x) = u'(x) \cos[u(x)].$$

DÉMONSTRATION

On utilise le théorème de dérivation d'une fonction composée (voir chapitre 5, p. 162).

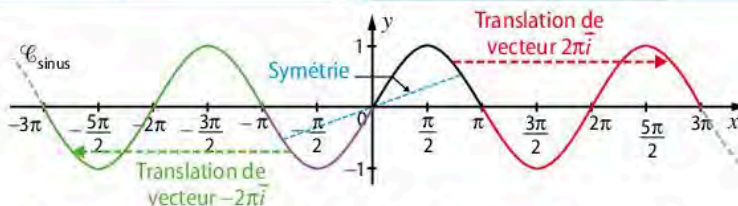
EXEMPLE : f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x^2)$ et $g(x) = \sin(4x + 1)$. Alors, pour tout réel x , on a $f'(x) = -2x \sin(x^2)$ et $g'(x) = 4 \cos(4x + 1)$.

Courbes représentatives

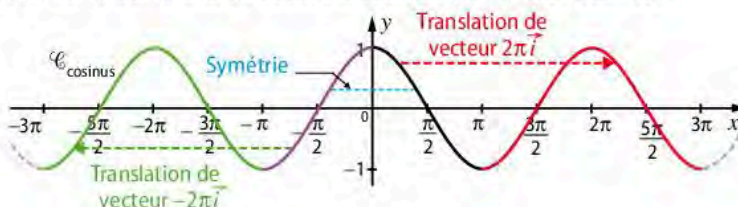
Pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus et celle de la fonction cosinus, il suffit de les étudier sur $[0; \pi]$, puis de tenir compte des conséquences graphiques de la périodicité et de la parité de chaque fonction.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	+	-
$\cos(x)$	1	0	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	+	0	-
$\sin(x)$	0	1	0



En suivant la même démarche, on obtient la courbe de la fonction cosinus :



Animation

Courbes des fonctions sinus et cosinus



Vocabulaire

Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont appelées des **sinusoïdes**.

CAPACITÉ

1

Calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique

Dans chacun des cas, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1 $f(x) = \sin(x) \times \cos(x)$

2 $f(x) = \frac{\sin(x)}{3 + \sin(x)}$

3 $f(x) = \cos(-50x + 70)$

Méthode

Pour déterminer la dérivée d'une fonction, on commence par identifier la forme de cette fonction (produit, quotient).

Voir exercices

58 Pour s'entraîner

116 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

1 f est de la forme $u \times v$, où u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$. Ainsi, $f' = u' \times v + u \times v'$ avec $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

Donc $f'(x) = \cos(x) \times \cos(x) + \sin(x) \times (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

2 f est de la forme $\frac{u}{v}$, où u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 3 + \sin(x)$. Ainsi, $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{\cos(x) \times (3 + \sin(x)) - \sin(x) \times \cos(x)}{(3 + \sin(x))^2} = \frac{3\cos(x)}{(3 + \sin(x))^2}.$$

3 $f(x)$ est de la forme $\cos(u(x))$, avec $u(x) = -50x + 70$.

$f'(x) = u'(x) \sin(u(x))$, avec $u'(x) = -50$. Donc $f'(x) = -50 \sin(-50x + 70)$.

CAPACITÉ

2

Étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x) + 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1 a. Étudier la parité de f .b. Montrer que f est périodique de période 2π .c. Justifier pourquoi il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = [0; \pi]$.2 Étudier les variations de f sur I .3 Représenter f sur $[-\pi; 3\pi]$.

Conseil

Pour compléter la courbe d'une fonction paire et périodique, on réalise une symétrie puis les translations nécessaires.

Solution commentée

1 a. Pour tout réel x , on a : $f(-x) = \sin^2(-x) - 2\cos(-x) + 1$.

Or, $\sin^2(-x) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$, donc $f(-x) = f(x)$: f est paire.

b. Pour tout réel x , on a : $f(x + 2\pi) = \sin^2(x + 2\pi) - 2\cos(x + 2\pi) + 1 = f(x)$, car $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. Donc f est périodique de période 2π .

c. D'après b., on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[-\pi; \pi]$. D'après a., on peut de plus restreindre l'étude à l'intervalle $I = [0; \pi]$.

2 La fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ est de la forme u^2 , avec $u(x) = \sin(x)$. Sa dérivée est donc $2uu'$, soit $x \mapsto 2\sin(x)\cos(x)$.

Pour tout réel x de I , on a : $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x) = 2\sin(x)(\cos(x) + 1)$.

$f'(x) = 0$ équivaut à $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = -1$, ce qui équivaut à $x = 0$ ou $x = \pi$.

De plus, pour tout x de I , $\sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) + 1 \geq 0$

(car $\cos(x) \geq -1$ pour tout x), donc $f'(x) \geq 0$ sur I .

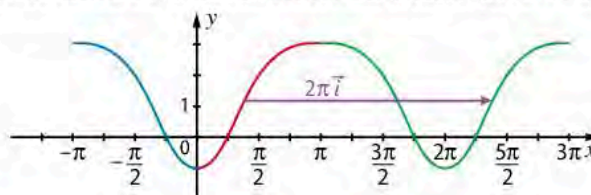
Par conséquent, la fonction f est croissante sur I .

On a $f(0) = -1$ et $f(\pi) = 3$.

On peut dresser ci-contre le tableau de variation de f sur I .

x	0	π	
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	-1		3

3 On commence par représenter la partie de $\mathcal{C}$ sur $[0; \pi]$ (en rouge) puis on trace sa courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (en bleu) puis on complète par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ la réunion des courbes précédentes (en vert).



Voir exercices

102 Pour s'entraîner

120 Pour travailler en autonomie

2. Équations et inéquations trigonométriques

Résolution de l'équation $\cos(x) = a$

On va résoudre graphiquement l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$, puis dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

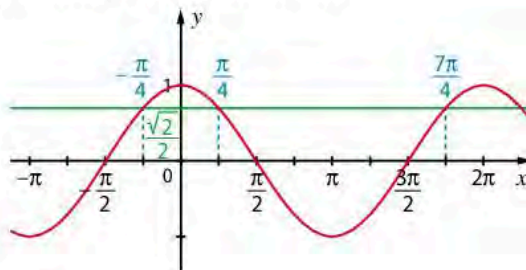
• **Méthode 1 : À l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus**

On trace la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les abscisses des points d'intersection de cette droite et de la courbe représentative de la fonction cosinus sont les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

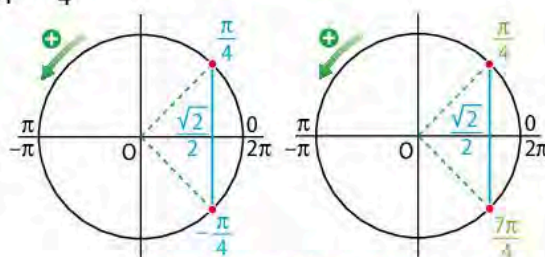
Les solutions de cette équation dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ sont $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$;

les solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.



• **Méthode 2 : À l'aide du cercle trigonométrique**

On place les points du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$, puis on repère les réels auxquels sont associés ces points.



Dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$
 Dans l'intervalle $[0; 2\pi]$

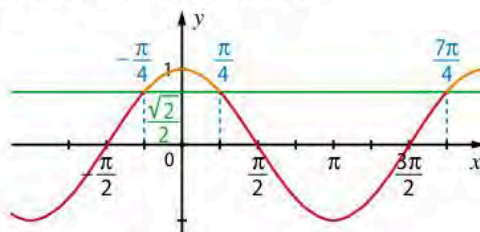
Résolution de l'inéquation $\cos(x) \leq a$

On va résoudre graphiquement l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$, puis dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

• **Méthode 1 : À l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus**

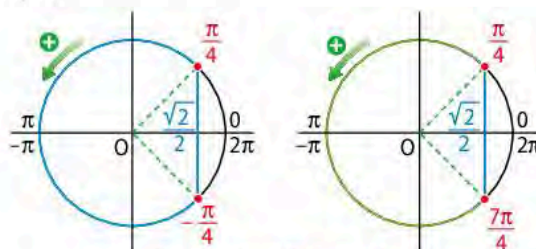
On colore (en orange) tous les points de la courbe dont l'ordonnée est inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Leurs abscisses sont les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'ensemble des solutions de cette inéquation dans $[-\pi; \pi]$ est :

$$\left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]; \text{ celui dans l'intervalle } [0; 2\pi] \text{ est } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right].$$



• **Méthode 2 : À l'aide du cercle trigonométrique**

On colore les points du cercle trigonométrique associés à un réel dont le cosinus est inférieur ou égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire qui ont une abscisse inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$
 Dans l'intervalle $[0; 2\pi]$

Animation

Équation
 $\cos(x) = a$
 et inéquation
 $\cos(x) \leq a$



À noter

Pour résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique, on utilise généralement le cercle trigonométrique.

Vidéo 08.04

Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$ sur $[-\pi; \pi]$



CAPACITÉ

3

Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$ sur $[-\pi; \pi]$

- 1 Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
- 2 Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution commentée

- 1 On commence par placer les deux points A et B d'abscisse $\frac{1}{2}$ du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ alors les réels associés aux points A et B sont $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

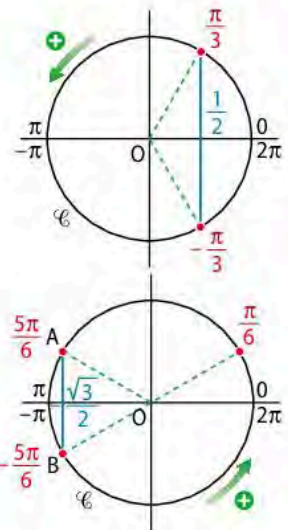
Les solutions de cette équation sont $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

- 2 On commence par placer les deux points A et B d'abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ de $\mathcal{C}$.

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, donc $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{5\pi}{6}$.

Par conséquent, les réels associés aux points A et B sont $-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Les solutions de cette équation sont $-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.



Voir exercices

83 Pour s'entraîner

123 Pour travailler en autonomie

Vidéo 08.04

Résoudre une inéquation du type $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi; \pi]$



CAPACITÉ

4

Résoudre une inéquation du type $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi; \pi]$

- 1 Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2 Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation $\cos(x) \leq -\frac{1}{2}$.

Solution commentée

- 1 On place les deux points A et B d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$ du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

Les réels associés aux points A et B sont $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ puisque $\cos \frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On colore ensuite en rouge l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ associés à un réel x tel que $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire ceux dont l'abscisse est inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit l'ensemble des solutions : $\left[-\pi; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$.

- 2 On place les deux points A et B d'abscisse $-\frac{1}{2}$ du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

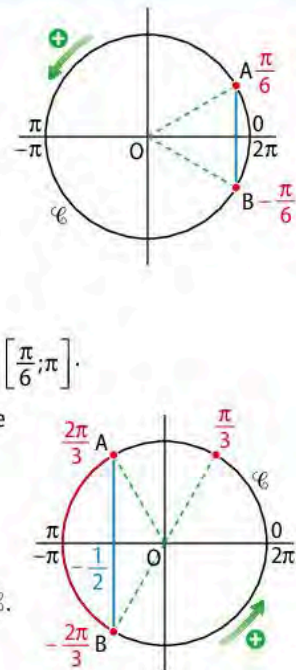
$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, donc $-\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$.

Les réels associés aux points A et B sont $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

On colore ensuite en rouge l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ tels que $\cos(x) \leq -\frac{1}{2}$.

On en déduit l'ensemble des solutions :

$\left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.



Conseil

Pour résoudre une inéquation du type $\cos(x) \leq a$, on peut colorer les arcs solutions du cercle trigonométrique.

Voir exercices

94 Pour s'entraîner

124 Pour travailler en autonomie

Calcul mental

- 1 Calculer : a. $3 + 5 \times 4$ b. $1^2 - 2^2 + 3^2$
- 2 Calculer : a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$
- 3 Calculer : a. $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ b. $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$
- 4 Simplifier les expressions suivantes, où x est un réel.
 a. $e^{3x} \times e^8$ b. $(e^{x+1})^2$
 c. $e^{-x} (e^{5x} + e^{-2x})$ d. $(e^x + e^{-x}) (e^x - e^{-x})$
- 5 Convertir :
 a. 3,75 m en cm b. 25 m² en cm²
 c. 420 mm en cm d. 97 m en km

- 6 Écrire sous la forme d'une puissance de 10 :
 a. un milliard b. cent milliers
 c. cent millions d. un dix-millième
- 7 Calculer $x^2 - 3y$ dans les cas suivants :
 a. $x = -4$ et $y = 2$ b. $x = 3$ et $y = -1$
- 8 Soit n un entier non nul.
 Réduire sous la forme d'un seul quotient.
 a. $n + \frac{n}{3}$ b. $\frac{4n}{5} - \frac{n}{3}$ c. $\frac{n}{2} - \frac{2}{n}$
- 9 Simplifier :
 a. $\sqrt{2} + \sqrt{32}$ b. $2\sqrt{12} - 5\sqrt{3}$
 c. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ d. $\sqrt{64 + 36}$

Automatismes

Évolutions et pourcentages

- 10 Le prix d'un article est passé en un mois de 4 € à 4,22 €. Calculer le pourcentage d'augmentation de cet article.
- 11 En avril, le prix d'un DVD était de 30 €. En mai, il a baissé de 20 %. Calculer son prix en mai.
- 12 Un capital est placé à intérêts composés au taux de 3 % pendant 5 ans. Calculer le pourcentage global d'évolution de ce capital.
- 13 Soit la suite géométrique (U_n) de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Déterminer le terme général de cette suite.

14 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Après augmentation de 20 %, un objet coûte 960 €. L'objet coûtait au départ 708 €.
2. Un prix augmente de 25 %. Pour retrouver le prix initial, il faut diminuer le prix de 20 %.

Fonctions

- 15 Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.
- 16 Montrer que, pour tout réel x , on a :
 $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.
- 17 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f dans un repère en son point d'abscisse 4.

18 Question de méthode

Expliquer comment on détermine la position relative d'une droite et de la courbe représentative d'une fonction.

Algorithmique et programmation

- 19 Déterminer la valeur de c à la suite des instructions suivantes quand on affecte aux variables a et b respectivement 8 et 2 en début d'algorithme.

$a \leftarrow a/b$
 $b \leftarrow b/a$
 $c \leftarrow a*b$

Pour les exercices 20 à 22, les programmes donnés sont écrits en langage Python.

- 20 Indiquer ce que retourne l'appel `exam(12,8)`.

```
def exam(x,y):
    m=(2*x+3*y)/5
    if m>=10:
        r="reçu"
    else:
        r="éliminé"
    return(r)
```

- 21 Indiquer ce que retourne l'appel `puiss(2,20)`.

```
def puiss(a,b):
    i=0
    while a**i<=b:
        i=i+1
    return i
```

- 22 Indiquer ce que retourne l'appel `f(3)`.

```
def f(n):
    s=0
    for i in range(n):
        s=s+i**2
    return s
```


Dérivées de fonctions trigonométriques

Questions flash

- 23 ORAL** Donner l'expression de $f'(x)$.
- a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x$.
- b. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.

Pour les exercices **24 à 28**, déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

24 $f(x) = 5 + \cos x$ **25** $f(x) = 6 - \sin x$

26 $f(x) = \cos x - \sin x$ **27** $f(x) = 5 \sin x - 3 \cos x$

28 $f(x) = 3x + 4 \cos x$

- 29** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x)$.
- a. f est de la forme $\cos(u)$: donner l'expression de la fonction u .
- b. Donner l'expression de $(\cos(u))'$ en fonction de u et u' .
- c. Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.

- 30** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(7x + 35)$.
- a. f est de la forme $\sin(u)$: donner l'expression de la fonction u .
- b. Donner l'expression de $(\sin(u))'$ en fonction de u et u' .
- c. Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.

- 31** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x^2 + 1)$.
- a. f est de la forme $\cos(u)$: donner l'expression de la fonction u .
- b. Donner l'expression de $(\sin(u))'$ en fonction de u et u' .
- c. Calculer $u'(x)$, puis $f'(x)$.

32 Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

- a. $f(x) = \cos(4x) - \sin(2x)$
- b. $f(x) = \cos(50 - 2020x)$
- c. $f(x) = 10 \cos(30x) + 30 \cos(10x)$

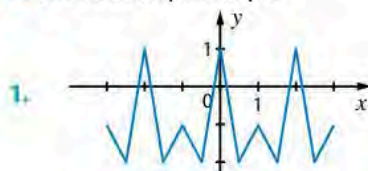
Parité et périodicité

Questions flash

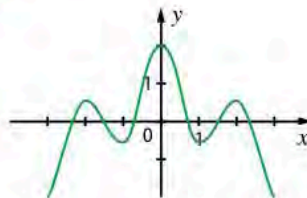
- 33 ORAL** Indiquer ce que signifie la proposition donnée.
- a. La fonction sin est impaire.
- b. La fonction cosinus est périodique, de période 2π .

34 Parmi les courbes suivantes, indiquer celles qui peuvent représenter :

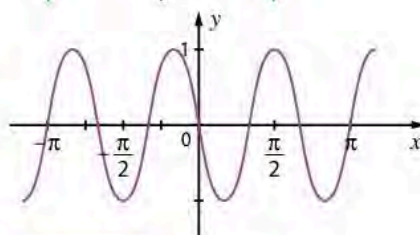
- a. une fonction paire ou impaire ;
- b. une fonction périodique.



2.



3.



35 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- La fonction sinus est périodique de période π .
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 \cos(2x)$ est paire.
- La courbe représentative de la fonction cosinus est invariante par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$, où k est un entier.

36 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

- Pour tout réel x , $\sin(-x)$ est égal à :
a. $-\sin(x)$ b. $\sin(x)$ c. $\cos x$
- Pour tout réel x , $\sin(x + 2\pi)$ est égal à :
a. $\sin(x)$ b. $-\sin(x)$ c. $\sin(x) + 2\pi$

37 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \sin x$.

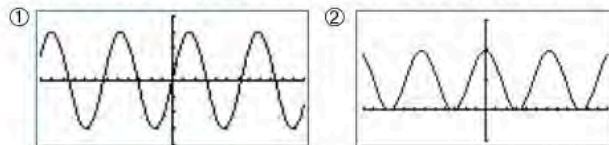
- a. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
- b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère ?
2. a. Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
- b. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

38 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -8 \cos x$.

- a. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
- b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère ?
2. a. Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
- b. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

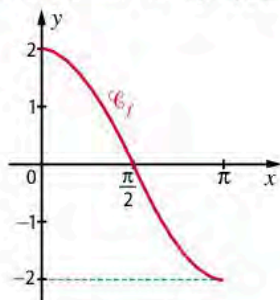
39 **CALC** f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = 3 \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x) + 1$.

Avec la calculatrice, on a obtenu les courbes ci-dessous :



- Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de f ?
- Exprimer $g(-x)$ en fonction de $g(x)$. Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de g ?
- En utilisant les résultats des questions précédentes, attribuer à chaque fonction sa courbe représentative.
- Vérifier la réponse, en représentant sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$, ces deux fonctions sur une calculatrice.

40 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \cos(x)$.

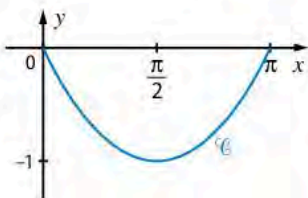


Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-contre dans un repère orthogonal sur l'intervalle $[0; \pi]$.

1. Reproduire $\mathcal{C}_f$.
2. a. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
b. Interpréter ce résultat.
- c. Compléter $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; 0]$ en justifiant le tracé.
3. a. Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
b. Compléter $\mathcal{C}_f$ sur $[\pi; 3\pi]$ en justifiant le tracé.

41 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\sin(x)$.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-contre dans un repère orthogonal sur l'intervalle $[0; \pi]$.



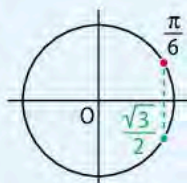
1. Reproduire $\mathcal{C}_f$.
2. a. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
b. Interpréter ce résultat.
- c. Compléter $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi; 0]$ en justifiant le tracé.
3. a. Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
b. Compléter $\mathcal{C}_f$ sur $[\pi; 3\pi]$ en justifiant le tracé.

Équations et inéquations trigonométriques

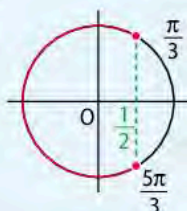
Questions flash

42 **ORAL** 1. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\cos x = 1$.
2. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$, puis dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\sin x = 0$.

43 1. Sur le cercle ci-contre, le point rouge est associé à un réel x tel que $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



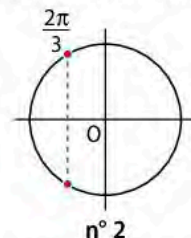
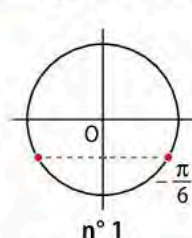
2. Sur le cercle ci-contre, l'arc de cercle rouge représente les points associés aux réels x tels que $\cos x \leq \frac{1}{2}$.



Déterminer dans $[0; 2\pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation :

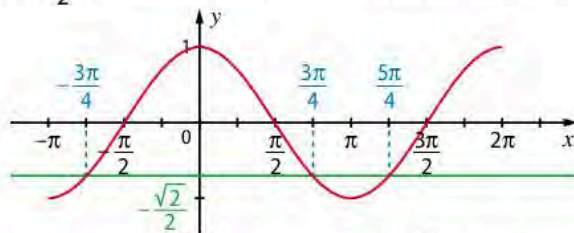
$$\cos x \leq \frac{1}{2}$$

44 1. Indiquer sur quel cercle ci-dessous, l'ensemble des points rouges est bien associé aux réels x tels que $\cos(x) = -0,5$.



2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq 0,5$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

45 On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction cosinus dans un repère et la droite d'équation $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



1. Lire la solution de l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ indiquée sur le graphique.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ l'équation :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Résoudre dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ l'équation :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

46 À l'aide des figures données, compléter les propositions.

a. Si $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

alors

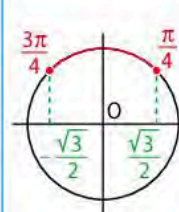
$$\dots \leq \cos x \leq \dots$$



b. Si $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$

alors

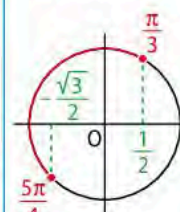
$$\dots \leq \cos x \leq \dots$$



c. Si $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

alors

$$\dots \leq \cos x \leq \dots$$



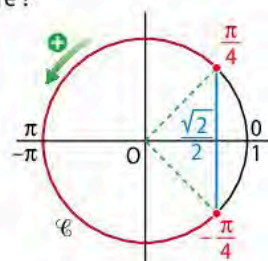
47 On donne les inégalités suivantes. Laquelle est vérifiée par les réels x auxquels on a associé l'arc de cercle rouge sur le cercle trigonométrique ci-contre ?

a. $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

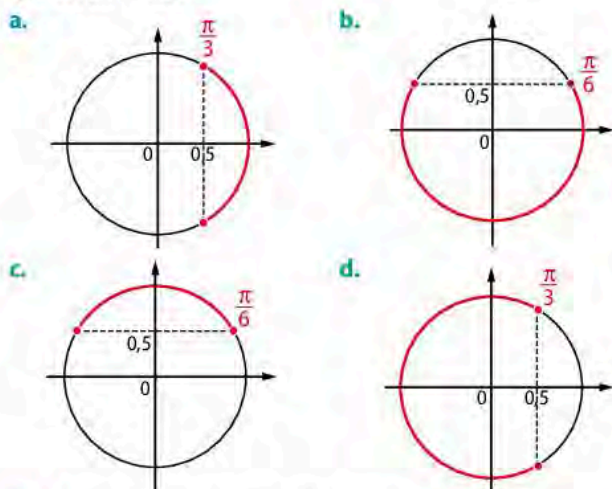
b. $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos(x) \leq \frac{\pi}{4}$

d. $\cos(x) \leq -\frac{\pi}{4}$



48 1. Indiquer sur quel cercle ci-dessous l'arc de cercle rouge correspond à l'ensemble des points associés aux réels x tels que $\cos(x) \leq 0,5$.



2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq 0,5$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.

49 a. Vérifier que $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ sont solutions de l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Recopier et compléter le tableau de signes suivant.

x	0	...		...	2π
$\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	0	...

Étude de fonctions trigonométriques

Questions flash

50 **ORAL** À l'aide de la propriété « $-1 \leq \cos x \leq 1$ », donner un encadrement des expressions suivantes.

- a. $1 - \cos x$ b. $2 + \cos x$ c. $5 \cos x$

51 La fonction f est définie sur $I = [0; 2\pi]$ par :

$$f(x) = 5x + 2 \sin x$$

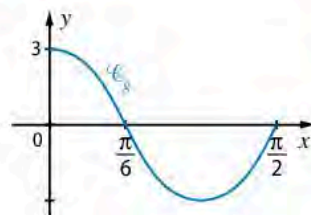
- Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x .
- a. Montrer que, pour tout réel x dans I , $f'(x) \geq 3$.
- b. En déduire le signe de $f'(x)$.
- c. Dresser le tableau de variation de f sur I .

52 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - 3 \sin x$. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère.

- Exprimer $f(-x)$ et $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
- Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $I = [0; \pi]$.
- Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x .
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur I .
- Dresser le tableau de variation de f sur I .
- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ sur I et la compléter ensuite sur $[-\pi; 0]$, puis sur $[\pi; 3\pi]$.

53 La fonction g est définie sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

par $g(x) = 3 \cos(3x)$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est donnée ci-contre.



- Par lecture graphique, déterminer le signe de $g(x)$ sur I .
- f est la fonction définie sur I par $f(x) = \sin(3x)$.
 - Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à I .
 - En utilisant la question 1., dresser le tableau de variation de f sur I . On précisera la valeur de chaque extremum.

54 La fonction f est définie sur $[0; \pi]$ par $f'(x) = \cos(x)$.

- Donner l'expression de $f'(x)$ puis de $f''(x)$.
- Déterminer le signe de $f''(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Justifier que f est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

55 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sin(x) + 2}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où 1 cm représente une unité sur l'axe des abscisses et 4 cm représentent une unité sur l'axe des ordonnées.

- a. Montrer que f est périodique de période 2π .
- b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?
- c. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; 2\pi]$.
- a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
- b. Montrer que $f'(x)$ a le signe de $-\cos(x)$ sur $[0; 2\pi]$.
- c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$.
- Représenter la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

56 a et b sont deux nombres réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$.

Sa courbe représentative dans le plan passe par les points $A(0; 6)$ et $B\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$.

- a. Justifier que a est égal à 6.
- b. Déterminer l'expression de f .
- a. Montrer que f est périodique de période 2π .
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.

57 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ par :

$$f(x) = 2 \sin(x) - x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan.

- a. Montrer que f est impaire.
- b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?
- a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
- b. Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$.
- c. Résoudre l'inéquation $\cos(x) > \frac{1}{2}$.
- d. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
- Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère du plan.

Dérivées de fonctions trigonométriques

Pour les exercices 58 à 68, f et g sont deux fonctions définies sur I . Déterminer l'expression de $f'(x)$ et de $g'(x)$ en fonction de x , f' et g' étant les fonctions dérivées des fonctions f et g .

58 Capacité 1, p. 271

$$f(x) = x \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x \sin(x) \quad \text{et} \quad I = \mathbb{R}.$$

$$59 \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\cos(x)}{x} \quad \text{et} \quad I =]0; +\infty[.$$

$$60 \quad f(x) = \cos(x+2) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(7-x) \quad \text{et} \quad I = \mathbb{R}.$$

$$61 \quad f(x) = e^x \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^x \sin(x) \quad \text{et} \quad I = \mathbb{R}.$$

$$62 \quad f(x) = e^{-x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x} \sin(x) \quad \text{et} \quad I = \mathbb{R}.$$

$$63 \quad f(x) = \sqrt{x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x} \sin(x) \quad \text{et} \quad I =]0; +\infty[.$$

$$64 \quad f(x) = \frac{1}{\sin(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad I =]0; \frac{\pi}{2}[.$$

$$65 \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \text{et} \quad I =]0; \frac{\pi}{2}[.$$

$$66 \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)+2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin(x)+5}{\cos(x)+5} \quad \text{et} \quad I = \mathbb{R}.$$

$$67 \quad f(x) = \cos(4x+2) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(9-2x) \quad \text{et} \quad I = \mathbb{R}.$$

$$68 \quad f(x) = \cos(x^2+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad I =]0; +\infty[.$$

69 Déterminer les dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x) + 4 \sin(2x)$.

70 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe respective.

Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$ et la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ sont parallèles.

Pour les exercices 71 et 72, déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x , pour x dans $\mathbb{R}$.

$$71 \quad \text{a. } f(x) = \cos^2(x) \quad \text{b. } f(x) = x e^{\sin(x)}$$

$$72 \quad \text{a. } f(x) = \sin^3(x) \quad \text{b. } f(x) = \sin^2(x) \cos(x)$$

73 LOGIQUE Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée. Soit la proposition : « Si f est telle que $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?

2. Énoncer la réciproque de cette proposition et indiquer si elle est vraie.

74 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \cos(3x)$. Montrer qu'il existe un réel c tel que, pour tout réel x , on a : $f''(x) + c f(x) = 0$.

75 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4 \sin(3x) - 3 \cos(2x).$$

Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x , on a $f''(x) + a f'(x) + b f(x) = 0$.

76 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) \cos(x)$.

$$\text{Alors } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \sin^2(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 5 + \cos^2(x).$$

Pour tout réel x , $f'(x) = -g'(x)$.

3. Les fonctions $x \mapsto \sin(x^3)$ et $x \mapsto (\sin(x))^3$ ont la même dérivée.

Parité et périodicité

Pour les exercices 77 à 79, montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période 2π , étudier l'éventuelle parité de f et interpréter graphiquement les résultats.

$$77 \quad f(x) = 3 \sin(x) + \cos(x)$$

$$78 \quad f(x) = 5 \sin^2 x - 6 \sin(x)$$

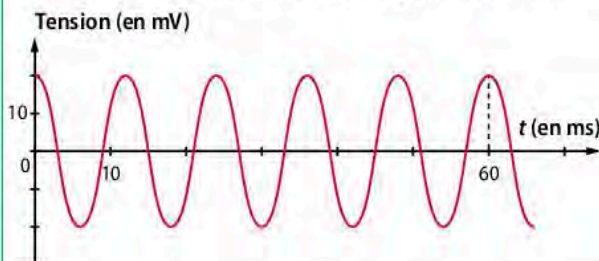
$$79 \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 3}$$

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

80 Le didjeridoo est un instrument de musique utilisé par les aborigènes d'Australie.

Il s'agit d'une trompe en bois d'eucalyptus évidée.

Un enregistrement du son de base d'un didjeridoo donne l'oscillogramme ci-dessous.



1. Déterminer par lecture graphique, la valeur de la période T du son de base (en ms).

2. On admet que l'oscillogramme représente la fonction f telle que $f(x) = 20 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Vérifier par un calcul la valeur de T déterminée dans la question 1.

3. Déterminer la valeur exacte des abscisses des points où l'oscillogramme coupe l'axe des abscisses entre 0 et 20.

81 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- La négation de la proposition « f est paire » est « f est impaire ».
- Si la fonction f est périodique de période 2π , alors pour tout réel x , on a $f(x + 2020\pi) = f(x)$.

82 Une question ouverte

On considère une fonction f impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

Piste → Voir p. 466

Équations trigonométriques

Pour les exercices 83 à 86, résoudre les équations données dans $[-\pi; \pi]$ puis dans $[0; 2\pi]$.

83 Capacité 3, p. 273

a. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ b. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

84 a. $2 \cos(x) = \sqrt{3}$ b. $2 \cos(x) = 1$

85 a. $\cos(x) = 1$ b. $\cos(x) = -1$

86 a. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

87 Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $\cos(2x) = 0,5$.

88 Résoudre dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\cos(4x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

89  **ALC** 1. Sur un cercle trigonométrique, placer les points associés aux solutions de l'équation $\cos(x) = 0,8$.

2. À l'aide de la calculatrice en mode radian, donner une valeur approchée à 0,01 près des solutions de cette équation dans $[0; 2\pi]$.

Piste 2 : Les commandes **Arccos** (Texas), **Acs** (Casio) et **acos** (Numworks) donnent une valeur de x dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Pour les exercices 90 et 91, résoudre dans $[-\pi; \pi]$ les équations données en effectuant le changement de variable $X = \cos(x)$.

90 $2 \cos^2(x) + 9 \cos(x) + 4 = 0$ 91 $4 \cos^2(x) - 3 = 0$

92 1. Montrer que : $12 + 8\sqrt{2} = (2 + 2\sqrt{2})^2$

2. Résoudre l'équation $4X^2 + (2 - 2\sqrt{2})X - \sqrt{2} = 0$.

3. Résoudre dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ puis dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'équation :

$$4 \cos^2(x) + (2 - 2\sqrt{2}) \cos(x) - \sqrt{2} = 0.$$

93 Une question ouverte

Combien de solutions l'équation $\cos(\cos(x)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a-t-elle dans l'intervalle $[0; 2\pi]$?

Piste → Voir p. 466

Inéquations trigonométriques

Pour les exercices 94 et 95, résoudre les inéquations données dans $]-\pi; \pi]$ puis dans $[0; 2\pi[$.

94 Capacité 4, p. 273

a. $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ b. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

95 a. $-2 \cos(x) \leq \sqrt{2}$ b. $-2 \cos(x) \geq \sqrt{3}$

96 Dans chacun des cas suivants, déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1. $f(x) = \cos(x) + 1$ 2. $f(x) = \sin(x) - 4$

3. $f(x) = 1 - \cos(x)$ 4. $f(x) = 6 - \sin(x)$

Pour les exercices 97 à 99, étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, puis sur $[0; 2\pi]$.

97 $f(x) = 1 + \sqrt{2} \cos(x)$ 98 $f(x) = -2 \cos(x) + \sqrt{2}$

99 $f(x) = -4 \cos(x) + 2\sqrt{3}$

100 La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par :
 $f(x) = 2 \cos^2(x) - \cos(x)$.

1. Étudier le signe de $2 \cos(x) - 1$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

2. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Piste 2 : Commencer par factoriser $f(x)$.

101 1. Factoriser $P(X) = X^2 + 2X - 3$.

2. En déduire la factorisation de $f(x) = \cos^2(x) + 2 \cos(x) - 3$.

3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Étude de fonctions trigonométriques

102 Capacité 2, p. 271

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{2} \sin^2 x + 2 \cos(x).$$

1. a. Étudier l'éventuelle parité de f .

b. Montrer que f est périodique, de période 2π .

c. Justifier pourquoi il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{I}$.

3. Représenter la fonction f sur $[-\pi; 3\pi]$.

103 Soit f la fonction telle que $f'(x) = \frac{2}{3 + 2 \cos(x)}$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Exprimer $f(-x)$ et $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

b. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $\mathbb{I} = [0; \pi]$.

3. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et étudier son signe sur $\mathbb{I}$.

4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{I}$.

5. Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{I}$ et la compléter sur $[-\pi; 0]$, puis sur $[\pi; 3\pi]$.

104 On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$f(x) = 2 \sin(x) - x \cos(x)$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en 0.

2. Montrer que f est convexe sur I .

3. En déduire que, pour tout réel x de I , on a :

$$2 \sin(x) - x \cos(x) \geq x.$$

105 Soit f la fonction définie sur $I = [0; \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ en $\frac{\pi}{3}$.

2. Montrer que f est concave sur I .

3. En déduire que, pour tout réel x de I , on a :

$$\sin(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

106 a. Montrer que la courbe représentant dans le plan la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = e^x \sin(x)$ admet un point d'inflexion.

b. Donner ses coordonnées.

107 On considère le trapèze isocèle $ABCD$ ci-contre, avec $AB = AD = BC = 1$. H est le projeté orthogonal de A sur $[CD]$.

On note α la mesure de l'angle $\widehat{ADC}$. On veut déterminer la valeur de α telle que l'aire de ce trapèze soit maximale.

1. Déterminer la hauteur AH du trapèze en fonction de α .

2. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du trapèze est définie, pour α dans l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, par $\mathcal{A}(\alpha) = \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$.

3. Montrer que la dérivée $\mathcal{A}'$ de la fonction $\mathcal{A}$ est définie par :

$$\mathcal{A}'(\alpha) = 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1.$$

4. **a.** Factoriser le polynôme $2X^2 + X - 1$.

b. En déduire une factorisation de $\mathcal{A}'(\alpha)$.

5. Étudier le signe de $\mathcal{A}'(\alpha)$ suivant les valeurs de α et dresser le tableau de variation de $\mathcal{A}$.

6. Conclure.

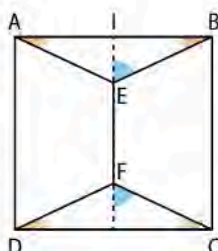
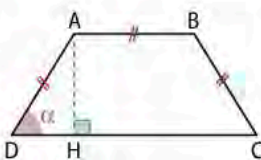
108 Quatre villes sont situées aux quatre sommets d'un carré de côté 150 km. On se propose de les relier par un réseau d'autoroutes de longueur totale minimale. Pour simplifier les calculs, on convient que le côté du carré est égal à 1. Le réseau peut être schématisé comme ci-contre.

Les points A, B, C et D sont les quatre sommets du carré, les points E et F sont les points de jonction des autoroutes, et le point I est le milieu de $[AB]$.

On désigne par α une mesure en radians de l'angle $\widehat{IEB}$ ($\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$) et par $f(\alpha)$ la longueur totale du réseau.

1. **a.** Exprimer IE et EB en fonction de α .

b. Montrer que $EF = \frac{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.



c. En déduire : $f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha) - \cos(\alpha) + 2}{\sin(\alpha)}$.

2. **a.** Montrer que $f'(\alpha) = \frac{1 - 2 \cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$.

b. En déduire que f admet un minimum et préciser en quelle valeur il est atteint.

c. Calculer la longueur totale minimale du réseau.

109 On considère la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par :

$$f(x) = \cos(x) \sin(x).$$

1. **a.** Montrer que, pour tout réel x , on a $f'(x) = 2 \cos^2(x) - 1$.

b. Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = 2 \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

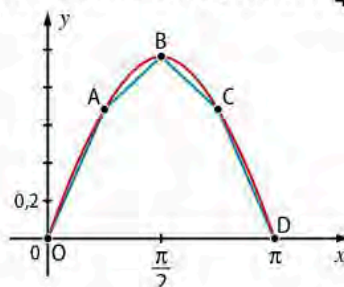
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

4. Tracer la courbe représentative de f .

110  **Compléter un programme**

La figure ci-dessous donne la représentation graphique de la fonction sinus sur $[0; \pi]$. Les points O, A, B, C et D sont les points de la courbe d'abscisses respectives $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ et π .



1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D .

2. Calculer la longueur $OABCD$, notée l_4 , et en donner une valeur approchée au millièm.

3. Talya a écrit en langage Python le programme ci-dessous, permettant d'avoir une valeur approchée de la longueur l_n lorsque l'intervalle $[0; \pi]$ est subdivisé en n intervalles de même amplitude.

a. Compléter la ligne 9.

b. Programmer et exécuter ce script. Donner une valeur approchée à 10^{-3} de l_{10} et de l_{100} .

```
from math import *

def longueur(n):
    l=pi/n
    L=0
    for k in range(0,n):
        a=k*l
        b=a+l
        L+=sin(b)-sin(a)
    return L
```

111 On va démontrer que, pour tout réel x de $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{3 \sin(x)}{2 + \cos(x)} \leq x \leq \frac{2 \cos(x) + 1}{3 \cos(x)} \sin(x)$ puis d'utiliser cet encadrement pour donner une valeur approchée de π .

1. On considère la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \frac{3 \sin(x)}{2 + \cos(x)} - x.$$

a. Montrer que, pour tout réel x de I , on a :

$$f'(x) = \frac{(\cos(x) + 1)(3 - \cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de f sur I puis son signe.

2. On considère la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = \frac{2 \cos(x) + 1}{\cos(x)} \sin(x) - x.$$

a. Montrer que, pour tout réel x de I , on a :

$$g'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2 (2 \cos(x) + 1)}{3 (\cos(x))^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de g sur I puis son signe.

3. Conclure.

4. En utilisant les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{6}$ et l'encadrement précédent, déterminer une valeur approchée de $\frac{\pi}{6}$ puis de π .

Point Histoire

Au ^{xvi}^e siècle, des mathématiciens comme Christian Huygens et Willebrord Snell entreprennent de calculer des valeurs décimales approchées de π par des méthodes trigonométriques élémentaires. L'encadrement proposé dans cet exercice est celui de Snell.



Christian Huygens Willebrord Snell

MATHS & PHYSIQUE

112 Un pendule simple de longueur l et de masse m est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 très petit. À l'instant $t = 0$, on l'abandonne sans vitesse initiale.

La masse est alors animée d'un mouvement périodique. On note $\theta(t)$ l'élongation angulaire à l'instant t .

θ_0 étant très petit, on peut estimer que l'élongation est donnée en fonction du temps par $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$, où θ_0 est exprimé en radians.

1. Déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\theta'(t)$ à l'instant t .

2. Sachant que la vitesse angulaire est nulle à l'instant $t = 0$, déterminer la valeur de φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

3. Montrer que T défini par $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est une période de la fonction θ .



MÉTHODE À L'ORAL

113 1. On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 \cos(x) - 7 \sin^2(x).$$

Expliquer la marche à suivre pour montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à un intervalle d'amplitude 2π , puis à un intervalle d'amplitude π .

2. Soit l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Expliquer la marche à suivre :

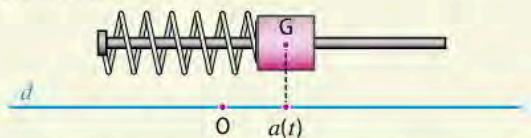
a. pour résoudre cette équation dans $[-\pi; \pi]$;

b. pour résoudre cette inéquation dans $[0; 2\pi[$.

MATHS & PHYSIQUE

114 Un solide accroché à un ressort peut glisser sans frottements sur une tige horizontale.

Lorsque le solide est à l'équilibre, son centre d'inertie G se situe à la verticale du point O , origine de l'axe des abscisses d . L'unité est le mètre.



Le solide est écarté de 10 cm de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. On considère la fonction a qui à tout réel t positif associe l'abscisse de G à l'instant t (en secondes).

On admet que $a(t) = a_0 \sin(2\pi t + \varphi)$, où a_0 et φ sont des nombres réels et $0 \leq \varphi \leq \pi$.

1. a. Déterminer l'expression de la vitesse $a'(t)$ en fonction de t .

b. Sachant que la vitesse est nulle à l'instant $t = 0$, et que le solide a pour abscisse 0,1, déterminer la valeur de φ et celle de a_0 .

2. Exprimer $a(t + 1)$ en fonction de $a(t)$. Que peut-on en déduire ?

3. a. Vérifier que pour tout réel t positif :

$$a'(t) = 0,2\pi \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

b. Déterminer le signe de $a'(t)$ sur l'intervalle $[0; 0,5]$, puis sur l'intervalle $[0,5; 1]$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction a sur l'intervalle $[0; 1]$.

4. a. Tracer la courbe représentative de la fonction a sur l'intervalle $[0; 2]$, en prenant comme unités graphiques : 1 cm pour 0,25 en abscisses et 2 cm pour 0,1 en ordonnées.

b. Déterminer à quels instants on a :

a. $a(t) = 0$

b. $a(t) = -0,1$

c. $a(t) = 0,05$

Problème de synthèse

115 = CALCULER RAISONNER

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où 3 cm représentent π unités sur l'axe des abscisses et 2 cm représentent une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Démontrer que f est périodique de période 2π .

b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?

3. a. Démontrer que f est impaire.

b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?

4. À l'aide des questions 2.a. et 3.a., montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.

5. a. Montrer que, pour tout réel x , on a $f'(x) = \frac{1 + 2 \cos(x)}{(2 + \cos(x))^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.

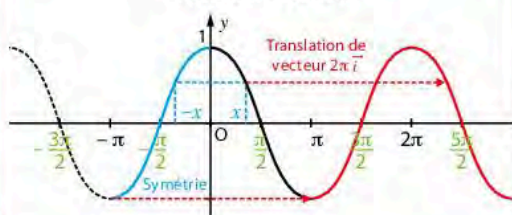
c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

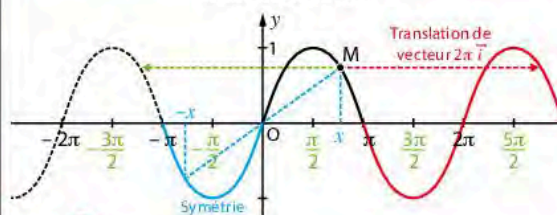
L'essentiel

Représentations graphiques

Fonction cosinus



Fonction sinus



Fonctions trigonométriques

Parité

Pour tout réel x ,
 $\cos(-x) = \cos(x)$
 et $\sin(-x) = -\sin(x)$

Périodicité

Pour tout réel x ,
 $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
 et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Propriétés

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$
 $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
 $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Dérivées

Pour tout réel x , $\cos'(x) = -\sin(x)$
 et $\sin'(x) = \cos(x)$
 $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$

Tableaux de variation

Fonction cosinus

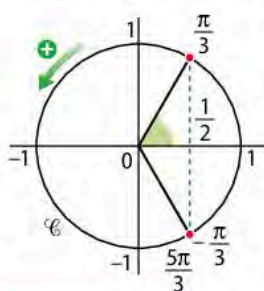
x	0	π
$\cos(x)$	1	-1

Fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0

Résolution d'équations et d'inéquations

Dans $[-\pi; \pi]$, l'équation $\cos(x) = 0,5$
 a pour solutions $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.



Dans $[-\pi; \pi]$, l'inéquation $\cos(x) \leq -0,5$ a pour
 ensemble solution $S = [-\pi; -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi]$.



Faire le point avec des exercices corrigés

Calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique

* 116 ⚙️ 5 min Capacité 1, p. 271

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \cos(x) + 2 \sin(x)$.

- Calculer $f'(x)$.
- Montrer que, pour tout réel x , on a : $2f''(x) + 3f'(x) = 13 \cos(x)$.

* 117 ⚙️ 5 min Capacités 1 et 3, pp. 271-273

Soit f la fonction définie sur $[0; 2\pi]$ par $f(x) = 2 \sin(x) + x + 1$.
 On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

* 118 ⚙️ 5 min Capacité 1, p. 271

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \cos(4x) + 5 \sin(3x)$.
 On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- Calculer $f'(x)$.
- Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ aux points A et B d'abscisses respectives 0 et π .

* 119 ⚙️ 15 min Capacité 1, p. 271

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \cos(x) + x^2 - 2$.
 On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et par T la tangente à $\mathcal{C}$ à l'origine.

- Déterminer une équation de T .
- Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
- a. En déduire que, pour tout réel x , on a $f(x) \geq 0$.
 b. En déduire une minoration de $\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Utiliser la parité et la périodicité

* 120 10 min Capacité 2, p. 271

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$.

- Rappeler le sens de variation de f sur $[0; 2\pi]$.
- Préciser la propriété de parité ou de périodicité qui permet d'obtenir, à l'aide de la question 1., le sens de variation de f sur les intervalles suivants :
a. $[2\pi; 4\pi]$ b. $[-2\pi; 0]$ c. $[-4\pi; -2\pi]$
- Dresser le tableau de variation de f sur chacun des intervalles précédents.

* 121 15 min Capacité 2, p. 271

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Pour tout réel x , $\cos(x + 4\pi) = \cos(x)$.
- Quel que soit le réel a , la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + a$ est paire.
- Il existe au moins un réel b tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + bx^2$ soit impaire.
- La courbe représentative dans un repère de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin(x)$ est symétrique par rapport à l'origine.

* 122 15 min Capacité 2, p. 271

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Pour tout réel x , $\cos(x) + 2 \cos(-x) + 3 \cos(x + 6\pi)$ est égal à :

- $2 \cos(x)$
- $6 \cos(x)$
- 0
- $7 \cos(x)$

Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique

* 123 10 min Capacité 3, p. 273

Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ les équations suivantes.

- $2 \cos(x) = \sqrt{2}$
- $8 \cos(x) + 4\sqrt{3} = 0$
- $3 \cos(x) + 3 = 0$
- $-2 \cos(x) - \sqrt{2} = 0$

* 124 15 min Capacité 4, p. 273

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les inéquations suivantes.

- $2 \cos(x) \leq \sqrt{3}$
- $4 \cos(x) + 2\sqrt{2} \leq 0$
- $6 \cos(x) \leq 3$
- $-6 \cos(x) + 3\sqrt{2} \geq 0$

* 125 10 min Capacité 4, p. 273

On considère la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par :

$$f(x) = 2 \cos^2(x) + \cos(x).$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan.

Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

* 126 10 min Capacité 4, p. 273

- Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $I = [-\pi; \pi]$,
 $2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 = (2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$.
- Étudier sur I le signe de $2 \cos(x) - 1$, puis celui de $\cos(x) + 1$.
- Résoudre dans I l'inéquation $2 \cos^2(x) + \cos(x) \geq 1$.

Étudier une fonction trigonométrique

* 127 20 min Capacités 1, 2 et 4, pp. 271-273

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; 2\pi]$ par $f(x) = x + \cos(x) \sin(x) - 4 \sin(x)$.

- a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle I on a :

$$f'(x) = 2 \cos(x) (\cos(x) - 2)$$

- b. En déduire le sens de variation de f sur I .
- a. Calculer $f''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle I .
- b. Étudier la convexité de f sur I . Sa courbe représentative a-t-elle un point d'inflexion sur I ?

* 128 20 min Capacités 1, 2 et 4, pp. 271-273

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x) + \cos(x)$.

- Montrer que f est paire.
- Montrer que f est périodique de période 2π .
- Montrer que, pour tout réel x , on a $f''(x) = -\sin(x) (2 \cos(x) + 1)$.
- a. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
- b. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
- a. Représenter graphiquement la fonction f sur $[0; \pi]$ dans un repère.
- b. Compléter le tracé sur $[-\pi; \pi]$ puis sur $[\pi; 2\pi]$, en justifiant la construction.

* 129 20 min Capacités 1, 2 et 4, pp. 271-273

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3 \sin(x)}{\cos(x) - 2}$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- a. Montrer que f est impaire.
- b. Montrer que f est périodique de période 2π .
- c. Interpréter graphiquement les deux résultats précédents.
- d. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0; \pi]$.
- a. Calculer $f'(x)$, pour x réel.
- b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
- c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
- d. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.

* 130 20 min Capacité 3, p. 273

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 \cos^2(x) - 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- a. Démontrer que, pour tout réel x , $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.
- b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- c. Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.
- On note d_1 et d_2 les droites d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = x + 1$.
Déterminer sur $[0; 2\pi]$ les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite d_1 , puis avec la droite d_2 .

* 131 15 min Capacités 1, 2 et 4, pp. 271-273

Soit f la fonction définie sur $I = [0; \pi]$ par :

$$f(x) = x \cos(x) - \sin(x) + 1.$$

- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur I .
- Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur I .

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique

■ **Un exemple :** Donner l'expression des dérivées des fonctions f , g et h suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
 $f(x) = 4 \cos(x) - 5 \sin(x)$; $g(x) = x \cos(x)$; $h(x) = \cos(5x + 4)$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que dois-je faire pour la fonction f ?	Je dois calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique. ► Donner la dérivée des fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$.
Comment terminer le calcul pour la fonction f ?	J'en déduis la dérivée des fonctions $x \mapsto 4 \cos(x)$ et $x \mapsto -5 \sin(x)$. ► Donner le résultat en ajoutant les deux dérivées calculées.
Comment démarrer pour la fonction g ?	Je reconnais que g est sous la forme d'un produit de fonctions $u \times v$. ► Identifier $u(x)$ et $v(x)$.
Comment terminer le calcul pour la fonction g ?	J'applique la formule de la dérivée d'un produit de fonctions. ► Donner cette formule, puis calculer $g'(x)$.
Quelle forme puis-je reconnaître pour la fonction h ?	Je reconnais que h est sous la forme $h = \cos(u)$. ► Identifier $u(x)$.
Comment terminer le calcul pour la fonction h ?	Je donne l'expression de h' en fonction de u , u' et $\sin$. ► Donner l'expression de $u'(x)$, puis calculer $h'(x)$.

132 Dans chacun des cas suivants, donner l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = -2 \cos(x) + 9 \sin(x)$

2. $f(x) = x^2 \sin(x)$

3. $f(x) = \cos(7 - 5x)$

4. $f(x) = \sin(10x - 1)$

5. $f(x) = \frac{1}{\cos(x) + 5}$

6. $f(x) = 8 \sin^2(x)$

PARCOURS 2 Résoudre une équation de la forme $\cos(x) = a$

■ **Un exemple :** Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ puis dans $[0 ; 2\pi]$ l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que me demande-t-on ?	Je dois résoudre une équation trigonométrique sur un intervalle. ► Préciser cette équation et cet intervalle.
Comment démarrer ?	Je trace le cercle trigonométrique. ► Dans un repère orthonormé, dessiner ce cercle et placer le point correspondant aux réels $-\pi$ et π .
Comment continuer ?	Je place sur l'axe des abscisses le point dont l'abscisse est le réel a donné. ► Placer sur cet axe le réel $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Construire les deux points du cercle associé à ce réel.
Comment poursuivre ?	J'utilise le tableau des valeurs remarquables pour trouver la première solution. ► Donner le réel α de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire la première solution x_1 .
Comment conclure ?	Je trouve l'autre solution dans l'intervalle donné. ► Sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, que peut-on dire de l'autre solution x_2 ? La donner. Sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, expliquer pourquoi on doit ajouter 2π à x_2 pour obtenir la seconde solution. Conclure.

133 Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ puis dans $[0 ; 2\pi]$ l'équation donnée.

1. $\cos(x) = 0,5$

2. $\cos(x) = -0,5$

3. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

PARCOURS 3 Fonction tangente

134 Étude de la fonction tangente

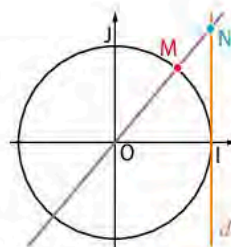
La fonction tangente est définie pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. a. Montrer que la fonction $\tan$ est une fonction impaire.
- b. Montrer que la fonction tangente est une fonction périodique, de période π .
- c. En quelles valeurs de l'intervalle $[-\pi; \pi]$ la fonction tangente n'est-elle pas définie ?
- d. En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction tangente sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
2. a. Déterminer la limite de la fonction tangente en $\frac{\pi}{2}$.
- b. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. a. Donner, pour tout réel x dans l'intervalle I , l'expression de $\tan'(x)$.
- b. Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur I .
4. a. Donner l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
- b. Étudier la convexité de la fonction tangente sur I , puis sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
- c. La courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$?
- d. En déduire le signe de $g(x) = \tan(x) - x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Tracer T et $\mathcal{C}_f$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, puis sur $\left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

135 Interprétation géométrique de $\tan(a)$

Soit a un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et M le point associé à ce réel sur le cercle trigonométrique. On note d la droite d'équation $x = 1$ et N le point d'intersection des droites (OM) et d .

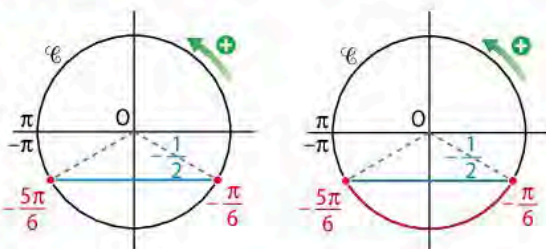
1. Justifier que ces droites sont bien sécantes.
2. Déterminer une équation de la droite (OM) , puis les coordonnées de N .
3. En déduire une interprétation géométrique du nombre $\tan(a)$ à l'aide du cercle trigonométrique.
4. Application : résoudre l'équation $\tan(x) = 1$, puis l'inéquation $\tan(x) \geq 1$ à l'aide du cercle trigonométrique.

PARCOURS 4 Équation $\sin(x) = k$ et inéquation $\sin(x) < k$

136 Résolution avec le cercle trigonométrique

On procède de la même façon que pour les équations et inéquations liées à la fonction cosinus, en utilisant le cercle trigonométrique.

1. Soit l'équation $\sin(x) = -0,5$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
- a. Placer les deux points d'ordonnée $-0,5$ du cercle trigonométrique.
- b. Quels sont les réels associés à ces deux points ?
- c. En déduire les solutions de l'équation donnée.
2. Soit l'inéquation $\sin(x) < -0,5$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
- a. Colorer les points du cercle associés à un réel dont le sinus est strictement inférieur à $-0,5$.
- b. En déduire les solutions de l'inéquation donnée.



137 Application

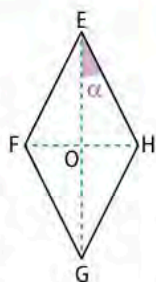
Résoudre dans $[-\pi; \pi]$, puis dans $[0; 2\pi]$, les équations et inéquations suivantes.

- a. $\sin(x) = 0,5$
- b. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c. $\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- d. $\sin(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

138 CHERCHER = CALCULER

Périmètre des losanges d'aire fixe

On considère un losange EFGH de centre O. On note p le périmètre de ce losange, $\mathcal{A}$ son aire et α une mesure en radians de l'angle OEH, avec α dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.



1. a. Exprimer OE et OH en fonction de p et de α .

b. Démontrer que $\mathcal{A} = \frac{p^2}{8} \sin(\alpha) \cos(\alpha)$.

2. a. Exprimer p en fonction de $\mathcal{A}$.

b. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $f(\alpha) = \sqrt{\frac{8\mathcal{A}}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}}$, où $\mathcal{A}$ est un réel positif donné.

Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.

c. Démontrer que, pour tout réel α de $]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$f'(\alpha) = \sqrt{2\mathcal{A}} \frac{\sqrt{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}}{(\sin(\alpha)\cos(\alpha))^2} (1 - 2\cos^2(\alpha)).$$

d. Construire le tableau de variation de la fonction g .

e. Quel est le losange d'aire $\mathcal{A}$ qui a un périmètre minimal ?

139 Tangentes parallèles

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $I = [0; \pi]$ par $f(x) = 1 + 2\sin(x)$ et $g(x) = -2\sin(x) - 2(x)$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes respectives dans un repère.

1. Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$.

2. Dresser leur tableau de variation de f et de g sur I .

3. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4. Déterminer les points M de $\mathcal{C}_f$ et N de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse tels que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M soit parallèle à la tangente à $\mathcal{C}_g$ en N.

140 Encadrement du sinus

On considère les fonctions f , g et h définies sur $[0; \pi]$ respectivement par $f(x) = x - \sin(x)$; $g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos(x)$ et

$$h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin(x).$$

1. a. Étudier le sens de variation de f sur $[0; \pi]$.

b. En déduire le signe de f sur $[0; \pi]$.

2. Faire de même pour les fonctions g et h .

3. En déduire que, pour tout x de $[0; \pi]$, on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$

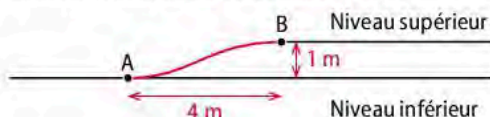
141 MODÉLISER = CALCULER

Une rampe d'accès

Dans un cinéma, deux parties sont à des niveaux différents, le dénivelé étant d'un mètre. On désire créer une rampe d'accès reliant les deux plateformes.

On se place dans un repère orthonormé d'origine A tel que le point B a pour coordonnées (4 ; 1).

Le profil de la rampe d'accès est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$.



La courbe $\mathcal{C}$ doit vérifier les contraintes suivantes :

- elle doit passer par les points A et B ;
- ses tangentes aux points A et B doivent être « horizontales ».

On définit la fonction f par $f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{4}x + c\right)$, où a , b et c sont des réels ($0 \leq c \leq \pi$).

1. Déterminer les valeurs des réels a , b et c tels que la courbe $\mathcal{C}$ réponde aux contraintes données.

2. Soit M un point de $\mathcal{C}$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M est appelé la **pente de la rampe d'accès** au point M.

a. Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près, de la pente de la rampe au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1.

b. En quel point la pente de la rampe est-elle maximale ?

Piste 2.b. : Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[0; 4]$.

TRAVAIL EN GROUPE

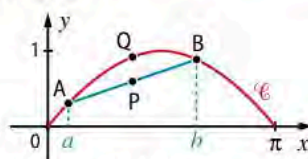
142 Une inégalité de convexité

La fonction f est définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Soit deux points A et B de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b ; P est le milieu du segment [AB] et Q est le point de $\mathcal{C}$ de même abscisse que P.

1. Étudier la concavité de f sur $[0; \pi]$ et en déduire une inégalité entre $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\frac{\sin(a) + \sin(b)}{2}$.

2. Rechercher et exposer d'autres inégalités de convexité faisant intervenir des fonctions trigonométriques.



Prise d'initiatives

143 Le profil d'un course de montagne est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = 0,75 - \sin(x) \cos(x)$, l'unité étant le kilomètre. En quel(s) point(s) de la courbe la pente du parcours est-elle la plus grande ?

144 On considère l'équation (E) : $\cos(x) = x^2$.

a. Démontrer que l'équation (E) a une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0; \pi]$.

b. Donner un encadrement de x_0 à 0,01 près.

TP1 Tuyaux de récupération d'eaux de pluie

GÉOMÉTRIE

MODÉLISER

CALCULER

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

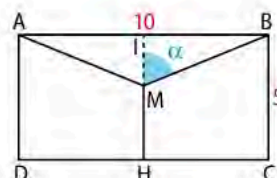
On donne ci-contre le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètres.

Sur ce plan :

- $AB = 10$ et $BC = 5$;
- le point I est le milieu du segment $[AB]$;
- $[AM]$ et $[BM]$ représentent les deux premiers tuyaux ;
- $[MH]$ représente le troisième tuyau ;
- (MH) est la médiatrice de $[DC]$.

On souhaite trouver la position du point sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

On prend comme variable α la mesure en radians de l'angle $\widehat{IMB}$.



A Conjecture

1. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour simuler la situation décrite précédemment.
2. Conjecturer une valeur approchée au degré près de la valeur de l'angle α qui rend minimale la longueur des tuyaux, ainsi qu'une valeur approchée au centième de la longueur minimale totale des tuyaux.

B Validation de la conjecture

1. Justifier que $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$.
2. On définit sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction g par $g(\alpha) = MA + MB + MH$.

Montrer que l'on a : $g(\alpha) = \frac{6 \sin(\alpha) - 5 \cos(\alpha) + 10}{\sin(\alpha)}$.

3. Montrer que la dérivée de g a pour expression : $g'(\alpha) = \frac{5(1 - 2 \cos(\alpha))}{(\sin(\alpha))^2}$.
4. Déterminer la valeur exacte de α qui minimise la longueur des tuyaux.

TP2 Paravent chinois

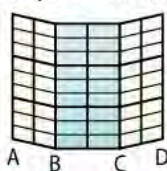
GÉOMÉTRIE

MODÉLISER

RAISONNER

Un paravent chinois se compose de trois panneaux rectangulaires de mêmes dimensions.

Les petits côtés, qui sont en contact avec le sol, mesurent un mètre.



Ce paravent découpe sur le sol un trapèze $ABCD$. On suppose que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ ont la même mesure et que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Ce polygone s'appelle le « polygone de sustentation ».

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ qui assure au polygone de sustentation une aire maximale.

A Conjecture

1. Dans un logiciel de géométrie dynamique, construire un trapèze $ABCD$ tel que $AB = BC = CD$ et (AD) parallèle à (BC) , et le point H , projeté orthogonal du point B sur la droite (AD) . On note t l'angle $\widehat{ABH}$ (compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$).

2. Conjecturer la valeur du réel t pour laquelle l'aire s du trapèze est maximum.
3. Visualiser, à l'aide du logiciel, l'ensemble des points M de coordonnées $(t; s)$.

B Validation de la conjecture

1. Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = [1 + \sin(t)] \cos(t)$.

Montrer que $f(t)$ représente l'aire du trapèze $ABCD$.

2. Vérifier à l'aide du logiciel que le point M est sur la courbe représentative de la fonction f .
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Conclure sur la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ qui assure au polygone de sustentation une aire maximale.

Question

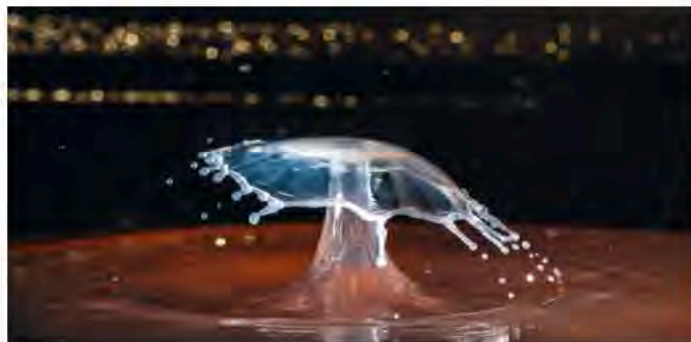
Comment les mathématiques permettent-elles de modéliser un phénomène périodique ?

Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercice 113, 142

Enjeu de la question

La modélisation à l'aide de fonctions trigonométriques d'un phénomène périodique est un problème important en physique. Elle a de nombreuses applications en électricité, acoustique, optique, météorologie, cryptographie, médecine, etc.



Plan possible

1. Présentation de quelques phénomènes périodiques
2. Principe de deux oscillateurs harmoniques : le système masse-ressort et oscillations libres d'un circuit LC
3. Système masse-ressort : résolution
4. Conclusion (limites des modèles et avantages)

Les mots-clés

Équations différentielles du second ordre
 • Fonctions trigonométriques • Période, fréquence, longueur d'onde

Support de présentation possible

- Le système masse-ressort est constitué d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k contraint de se déplacer dans une seule direction. Si la position de la masse (par rapport à celle où elle est au repos) est notée $x(t)$, alors celle-ci est solution de l'équation différentielle du second ordre $x'' + \frac{k}{m}x = 0$.
- La charge q d'un condensateur de capacité électrique C , dans une bobine d'inductance L , est solution de l'équation différentielle du second ordre $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$.
- Solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$: $y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, avec A et B réels



Questions d'approfondissement possibles

Calculer la dérivée des fonctions : $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

Expliquer la parité des fonctions sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique.

Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$?

Comment peut-on déterminer la phase d'une fonction trigonométrique de la forme $t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t)$?

Poursuite d'études et projet professionnel

• Pourquoi étudier les fonctions trigonométriques ?

Les fonctions trigonométriques sont importantes pour modéliser des phénomènes périodiques et interviennent en électricité, acoustique, optique, météorologie, cryptographie, médecine, etc.

• Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude des fonctions trigonométriques est approfondie dans toutes les formations scientifiques de l'enseignement supérieur : CPGE, licences scientifiques, IUT, écoles d'ingénieur, BTS industriels.

• Un exemple de métier ?

Sans un(e) ingénieur(e) du son, un concert ne serait qu'un brouhaha où seuls les instruments les plus puissants se feraient entendre. Grâce à lui (elle), cela devient un ensemble de sons équilibrés, nuancés, agréables à écouter. Ses connaissances techniques, scientifiques et artistiques, l'aident à capter et mixer des sons et effectuer des montages.

THÈMES

- Fonction trigonométrique
- Équation et inéquation trigonométrique

ÉNONCÉ CALCULER RAISONNER

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x) + \sqrt{2} \cos(x)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- Étudier la parité de f . En déduire une conséquence graphique pour $\mathcal{C}$.
- Montrer que f est périodique de période 2π . En déduire une conséquence graphique pour $\mathcal{C}$.
- Justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = [0; \pi]$.
- a. Montrer que, pour tout réel x de I : $f'(x) = 2 \sin(x) \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.
b. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- Représenter f sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ
ET CHOISIR LES MÉTHODES

SOLUTION COMMENTÉE

1. On calcule $f(-x)$ et on compare à $f(x)$.

Capacité 2, p. 271

1. $f(-x) = [\sin(-x)]^2 + \sqrt{2} \cos(-x) = [-\sin(x)]^2 + \sqrt{2} \cos(x)$.
 $f(-x) = \sin^2(x) + \sqrt{2} \cos(x) = f(x)$. Donc f est une fonction paire.
La courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

2. On calcule $f(x + 2\pi)$ et on compare à $f(x)$.

Capacité 2, p. 271

2. $f(x + 2\pi) = [\sin(x + 2\pi)]^2 + \sqrt{2} \cos(x + 2\pi) = [\sin(x)]^2 + \sqrt{2} \cos(x + 2\pi) = \sin^2(x) + \sqrt{2} \cos(x) = f(x)$. Ainsi f est périodique de période 2π .
La courbe $\mathcal{C}$ est donc invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

3. On utilise simultanément les résultats précédents.

Capacité 3, p. 271

3. D'après 2., on peut restreindre l'étude à tout intervalle d'amplitude 2π : on peut choisir l'intervalle $[-\pi; \pi]$, qui est de plus un intervalle centré en 0. D'après 1., on peut de plus restreindre cet intervalle à l'intervalle $[0; \pi]$.

4. a. On reconnaît la forme u^2 dans l'expression de $f(x)$.

Capacité 2, p. 271

4. a. $\sin^2(x)$ est de la forme $u^2(x)$ avec $u(x) = \sin(x)$. Or $(u^2)' = 2u'u$.
 $f'(x) = 2 \sin'(x) \times \sin(x) + \sqrt{2} \cos'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) + \sqrt{2} (-\sin(x))$
 $f'(x) = 2 \cos(x) \sin(x) - \sqrt{2} \sin(x) = 2 \sin(x) \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

b. On étudie les variations de f en étudiant le signe de $f'(x)$.
On résout une équation du type $\cos(x) = a$ pour déterminer les solutions de $f'(x) = 0$.
On résout une inéquation de type $\cos(x) \leq a$ pour déterminer le signe de $f'(x)$.

Capacités 1, 3 et 4, pp. 271-273

b. $f'(x) = 0$ équivaut à $\sin(x) \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$, ce qui équivaut à :

$\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dans l'intervalle I , la première équation a pour solutions 0 et π et la seconde équation a pour solution $\frac{\pi}{4}$.

Pour tout x de I , $\sin(x) \geq 0$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

À l'aide d'un cercle trigonométrique, on obtient que, pour x dans I ,

$\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$ et $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

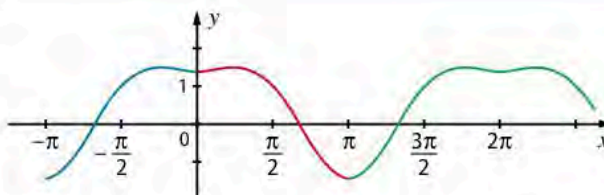
Donc $f'(x)$ est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$. Ainsi, f est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\sqrt{2}$

5. On utilise les transformations trouvées plus haut pour passer de $\mathcal{C}_1$ tracée sur $[0; \pi]$ à la partie de $\mathcal{C}$ tracée sur $[-\pi; 3\pi]$.

Capacité 2, p. 271

5. On commence par représenter la partie $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ (en rouge) puis on trace la courbe symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des ordonnées (en bleu) puis on complète par une translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ (en vert).



Sujet A 40 min CALCULER RAISONNER

THÈMES • Fonctions trigonométriques
• Équation et inéquation trigonométriques

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 1. et 2. b. ► Capacité 2 p. 271

Question 3. ► Capacité 1 p. 271

Question 4. b. ► Capacités 3 et 4 p. 273

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x) \cos(x) - \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.1. a. Montrer que la fonction f est impaire.b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?2. a. Montrer que f est périodique, de période 2π .b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?3. Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = 2 \cos^2(x) - \cos(x) - 1.$$

4. a. Factoriser $2X^2 - X - 1$, puis $f'(x)$.b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.5. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.6. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$ en détaillant la démarche. Unités graphiques : 3 cm représentent π sur l'axe des abscisses et 2 cm représentent 1 sur l'axe des ordonnées.**Sujet B** 40 min

RAISONNER CHERCHER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL

THÈMES • Fonctions trigonométriques
• Convexité

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 1. ► Capacité 2 p. 271

Question 2. ► Capacité 2 p. 271

Question 3. ► Capacité 1 p. 271

Question 4. ► Capacité 2 p. 271

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2}x + 2 \sin(x)$.1. La fonction f est impaire.2. La fonction f est périodique de période 2π .3. La fonction f est croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.4. La fonction f est concave sur $[\pi; 2\pi]$.5. La limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.6. La limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ est égale à $\sqrt{2}$.**Sujet C** 40 min CALCULER RAISONNER

THÈMES • Fonctions trigonométriques
• Équation et inéquation trigonométriques

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 1. ► Capacité 1 p. 271

Question 2. b. ► Capacité 3 p. 273

On cherche à montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle

$$I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \text{ on a l'inégalité } 2 \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \geq 3x.$$

1. On définit la fonction f sur I par :

$$f(x) = 2 \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 3x.$$

Montrer que $f'(x)$ a le même signe que :

$$2 \cos^3(x) - 3 \cos^2(x) + 1.$$

2. On considère la fonction P définie sur $[0; 1]$ par :

$$P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$$

a. Étudier les variations de P sur $[0; 1]$.b. Montrer que, pour tout réel X de $[0; 1]$, on a $P(X) \geq 0$.3. En déduire les variations de f sur I , puis conclure.**Sujet D** 40 min

MODÉLISER CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL

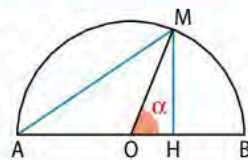
THÈMES • Fonctions trigonométriques
• Optimisation

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 2. ► Capacité 1 p. 271

Question 3. ► Capacités 3 et 4 p. 273

Sur la figure ci-dessous, M est un point du cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1 et H est son projeté orthogonal sur $[AB]$. On désigne par α la mesure en radians de l'angle $\widehat{BOM}$ avec $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle AHM est donnée, en fonction de α , par $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(\alpha) (1 + \cos(\alpha))$.2. Montrer que l'on a $\mathcal{A}'(\alpha) = \cos^2(\alpha) + \frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{1}{2}$.3. a. Factoriser le polynôme $P(X) = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$.b. En déduire une factorisation de $\mathcal{A}'(\alpha)$.4. Étudier le signe de $\mathcal{A}'(\alpha)$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.5. Dresser le tableau de variation de $\mathcal{A}$ sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.6. En déduire la position de M pour laquelle l'aire AHM est maximale et préciser sa valeur.

Sujet E 40 min CALCULER RAISONNER

THÈMES • Fonctions trigonométriques

CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE

Questions 1., 2. et 3. ► Capacité 2 p. 271

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{3}x - 2 \sin(x).$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{C}_1$ sa courbe représentative sur $[0; 2\pi]$.

1. a. Exprimer, pour tout réel x , $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
b. En déduire comment construire la partie $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{C}$ sur $[-2\pi; 0]$ connaissant $\mathcal{C}_1$.
2. a. Exprimer, pour tout réel x , $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, où M et M' sont deux points de $\mathcal{C}$, d'affixes respectives x et $x + 2\pi$, est un vecteur constant.
- c. En déduire comment on peut construire la partie $\mathcal{C}_3$ de $\mathcal{C}$ sur $[2\pi; 4\pi]$ connaissant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
3. Étudier les variations de f sur $[0; 2\pi]$.
4. Tracer la partie de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[-2\pi; 4\pi]$. Unités graphiques : 1 cm représente $\frac{\pi}{6}$ sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 5 sur l'axe des ordonnées.

Sujet F 40 min MODÉLISER CHERCHER

THÈMES • Fonctions trigonométriques
• Extremum d'une fonction

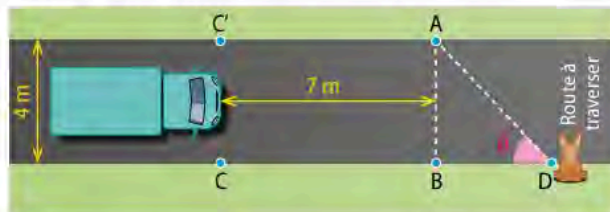
CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 3. a. ► Capacité 1 p. 271
Question 3. b. ► Capacité 4 p. 273

Un lapin souhaite traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h.

Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à... 30 km/h.

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.



Le lapin part de A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BDA}$, avec $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (en radians).

1. a. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ .
b. Montrer que le temps t_1 , en minutes, mis par le lapin pour parcourir la distance AD est égal à $\frac{1}{125 \sin(\theta)}$.
- c. Déterminer le temps t_2 , en minutes, mis par le camion pour parcourir la distance CD.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{4}{\sin(\theta)}.$$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3. a. Montrer que $f'(\theta) = \frac{4 \cos(\theta) - 2}{(\sin(\theta))^2}$.
b. En déduire les variations de f sur I .
4. Le lapin aura-t-il traversé la route avant le passage du camion ? Justifier.

Sujet G 40 min CHERCHER REPRÉSENTER

THÈMES • Fonctions trigonométriques
• Théorèmes des valeurs intermédiaires

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions A. 1. et B. 1. ► Chapitre 5, capacité 7 p. 173
Questions A. 2. et B. 2. ► Capacité 2 p. 271
Questions B. 2. et C. 1. ► Capacité 1 p. 271
Question A. 3. ► Chapitre 6, capacités 3 et 4 p. 205
Questions A. 1. et B. 1. ► Chapitre 6, capacité 8 p. 209

Partie A

La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x - \cos(x)$.

1. Déterminer les limites de la fonction u en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
b. Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α .
4. En déduire le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2 \sin(x)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, où u est la fonction définie dans la partie A.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Partie C

On considère les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ d'équations respectives $y = x^2$ et $y = 2 \sin(x)$ dans un repère du plan.

Soit T la tangente à $\mathcal{P}$ en son point d'abscisse α et D la tangente à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse α , où α est le réel défini dans la partie A.

1. Démontrer que T et D sont parallèles.
2. Existe-t-il un réel a , différent de α , tel que la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a et la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a soient parallèles ? Justifier.

► Calculer la dérivée d'une fonction

1 Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies de la façon suivante :

a. $f(x) = 4x^2 - \frac{5}{x} + 2x^{-3}$ sur $]0; +\infty[$

b. $g(x) = (4x - 5)^3$ sur $\mathbb{R}$

c. $h(x) = e^{5x+6}$ sur $\mathbb{R}$

d. $i(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ sur $\mathbb{R}$

e. $j(x) = \sqrt{3-2x}$ sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$

f. $k(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ sur $\mathbb{R}$

2 Soit les fonctions u et v définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(2x+2) \text{ et } v(x) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

a. Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.

b. Expliquer pourquoi il existe un réel k tel que, pour tout réel $x > 0$, $u(x) = v(x) + k$.

c. Calculer $u(1)$ et $v(1)$, puis en déduire k .

3 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. Deux fonctions ayant la même dérivée sur un intervalle I sont égales sur I .

b. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$ vérifie, pour tout réel x , $f'(x) = -f(x)$.

► Transformer une expression algébrique

4 Démontrer que, pour tout réel x différent de 2 : $\frac{7-2x}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 2$.

5 Déterminer le réel k tel que, pour tout réel x différent de $\frac{1}{2}$: $\frac{7}{2x-1} = k \times \frac{2}{2x-1}$.

6 Démontrer que, pour tout réel x : $\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

► Déterminer une fonction satisfaisant des conditions

7 QCM Choisir la bonne réponse.

Soit f une fonction dérivable sur $[0; 1]$ vérifiant $f'(x) = 0$ pour tout réel x de $[0; 1]$ et telle que $f(0) = 1$. Alors :

a. $f(x) = x$

b. $f(x) = 1$

c. $f(x) = x + 1$

d. $f(x) = 0$

8 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit f une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et telle que $f'(x) = -(f(x))^2$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$. Alors, on peut avoir :

a. $f(x) = \frac{1}{x}$

b. $f(x) = \frac{1}{x+5}$

c. $f(x) = -\frac{2}{x}$

d. $f(x) = -\frac{1}{x}$

9 Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = ke^{2x-1}$, où k est un réel. Déterminer la fonction f_0 de E telle que $f_0(3) = 2$.

10 Soit deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout réel x , $u'(x) = v'(x)$. Que peut-on dire de la fonction $u - v$?





La vitesse d'un parachutiste en fonction du temps t avant l'ouverture du parachute peut être modélisée par une fonction v qui vérifie, d'après des lois de la physique, l'équation $mv'(t) + 0,3125 v(t) = 9,81 m$, où m est la masse totale du parachutiste et de son parachute. Cette équation, dont l'inconnue est la fonction v , est une équation différentielle. Ce type d'équations intervient dans beaucoup de phénomènes scientifiques.

Voir exercice 122 page 310

LES NOTIONS DU CHAPITRE

- ▶ Primitives d'une fonction continue
- ▶ Équation différentielle $y' = ay$
- ▶ Équation différentielle $y' = ay + b$
- ▶ Équation différentielle $y' = ay + f$



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

- Vidéos pp. 297, 299, 301
- Corrigés détaillés pp. 312, 314, 324, 325

Activité 1

Objectif

Découvrir une équation différentielle.

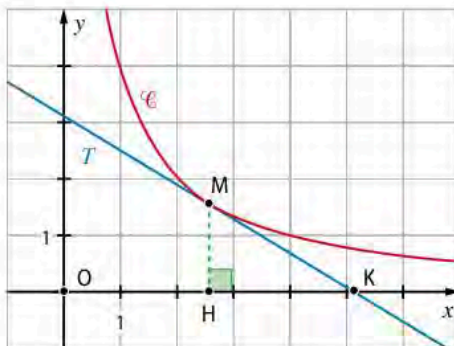
Cours 1

Primitives d'une fonction

Recherche d'une courbe vérifiant une propriété

On veut résoudre le problème géométrique suivant :

« Existe-t-il une courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que, pour tout point M de cette courbe $\mathcal{C}$, son projeté orthogonal H sur l'axe des abscisses soit le milieu de $[OK]$, où K est le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en M avec l'axe des abscisses ? »



Soit f une telle fonction, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et M un point quelconque de $\mathcal{C}$ d'abscisse a .

- 1 Expliquer pourquoi on doit avoir $f'(a) \neq 0$.
- 2 a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point M .
b. Montrer que le point K a pour abscisse $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

- 3 Montrer que la fonction f doit vérifier la relation suivante :

$$a f'(a) + f(a) = 0 \text{ pour tout réel } a \text{ tel que } f'(a) \neq 0.$$

Cette équation, dans laquelle l'inconnue est la fonction f , est appelée équation différentielle.

- 4 a. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x f(x)$.
b. En déduire $g'(a)$, puis $f(a)$ pour tout réel a non nul.
c. Répondre à la question posée au départ.

Activité 2

Objectif

Découvrir des primitives des fonctions de référence.

Cours 2

Recherche des primitives d'une fonction

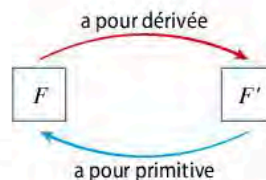
De qui suis-je la dérivée ?

- 1 Calculer la dérivée de chacune des fonctions F, G, H, I suivantes :

- a. $F(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$
- b. $G(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$
- c. $H(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$
- d. $I(x) = \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$

On passe de F à F' par un calcul de dérivée.

L'opération qui fait passer de F' à F consiste à déterminer une primitive de F' .



- 2 a. Donner une primitive de la fonction j définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = 2x$, puis de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x$.
b. Donner une autre primitive de j et de k .
c. Déterminer une primitive de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 3x^2$, puis de la fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = x^2$.
d. Déterminer une primitive de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$.
e. Déterminer une primitive de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Activité 3

Objectif

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$.

Cours 3

Équations différentielles
 $y' = ay$ et $y' = ay + f$

Rentrée atmosphérique d'un satellite

En raison de frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches basses de l'atmosphère : on appelle cet événement une « rentrée atmosphérique ».

Le temps, exprimé en jours, avant la rentrée atmosphérique d'un satellite d'un certain type dépend de l'altitude h de son orbite, exprimée en kilomètres.

Ce temps est modélisé par une fonction ϕ de la variable h , dérivable sur $[0; +\infty[$ et solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 0,025y = 0$.



- 1 Montrer que la fonction v telle que $v(h) = e^{0,025h}$ est une solution de (E).
- 2 Soit ϕ une solution de (E), et u la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $u(h) = e^{-0,025h} \phi(h)$.
 - a. Vérifier que $u'(h) = e^{-0,025h} (\phi'(h) - 0,025 \phi(h))$.
 - b. Justifier que u est une fonction constante.
 - c. En déduire que $\phi(h) = Ce^{0,025h}$, où C est une constante réelle.
- 3 Pour un satellite de ce type dont l'orbite est à l'altitude 800 kilomètres, le temps avant la rentrée atmosphérique est de 2 000 jours. Calculer $\phi(800)$, et en déduire la fonction ϕ .

Activité 4

Objectif

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$.

Cours 3

Équations différentielles
 $y' = ay$ et $y' = ay + f$

Échauffement d'un fil électrique par effet Joule

Un fil électrique parcouru par un courant d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps.

On note $f(t)$ la température, exprimée en degrés Celsius, du fil à l'instant t , exprimé en secondes, avec $t \geq 0$.

On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,05y = 2$.



- 1 Montrer que la fonction $g : t \mapsto 40$ est une solution de (E).
- 2 Soit h une solution de (E).
 - a. Montrer que $h'(t) - g'(t) + 0,05(h(t) - g(t)) = 0$ pour tout réel positif t .
 - b. En déduire que la fonction $h - g$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay$. Préciser la valeur de a . La résoudre et en déduire l'expression de h .
- 3 a. À l'instant $t = 0$, la température du fil est celle du milieu ambiant, soit 18°C . En déduire $f(t)$ pour $t \geq 0$.
 - b. Quelle est la température du fil au bout d'une minute ?

1. Primitives d'une fonction

Équation différentielle $y' = f$

La description de nombreux phénomènes physiques peut être modélisée par une relation entre une fonction g et sa dérivée g' : rechercher cette fonction g revient à résoudre une équation différentielle.

Notation

On écrit généralement y à la place de $f(x)$ et y' à la place de $f'(x)$ dans les équations différentielles.

À noter

L'inconnue d'une équation différentielle est une fonction.

DÉFINITION Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I : $g'(x) = f(x)$.

EXEMPLE : Soit l'équation différentielle $y' = 2x$, pour x élément de $\mathbb{R}$.

La fonction g telle que $g(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = 2x$.

Donc g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2x$.

Plus généralement, une **équation différentielle du 1^{er} ordre** est une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable f , sa dérivée f' et la variable x . L'inconnue de cette équation est la fonction f .

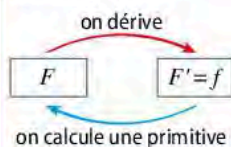
EXEMPLES : $y' = x^3 + 1$, $xy' + 2y = e^x$, $5y' + xy^2 = \sin(x)$ et $2y' - y = 1$ sont des équations différentielles du 1^{er} ordre.

Primitives d'une fonction

Toute fonction solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = f$ s'appelle une primitive de f sur I .

À noter

La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation :



DÉFINITION Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si, pour tout réel x de I : $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x .

La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^2 + 5$ est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉS

- (1) Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I . (voir chapitre 10 p. 338)
- (2) Soit f une fonction continue sur I . Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME (propriété 2)

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I .

Alors, pour tout réel x de I , on a $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

On en déduit : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit $(F - G)'(x) = 0$ pour tout réel x de I . La fonction $F - G$ a une dérivée nulle sur I , elle est donc constante sur I .

On nomme k cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = k$ pour tout x de I , ce qui montre que ces deux primitives diffèrent d'une constante.

PROPRIÉTÉ Soit f une fonction admettant une primitive F sur I .

Alors, pour tout réel k , la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I , et toute primitive de f sur I est de ce type.

DÉMONSTRATION

G est bien une primitive de f sur I . En effet, $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$ pour tout réel x de I , ce qui prouve que G a une dérivée f . Soit H une primitive de f .

D'après la propriété précédente, $H(x) - F(x) = k$, où k est un réel, et ainsi : $H(x) = F(x) + k$.

EXEMPLE : Puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme : $F(x) = x^2 + k$, avec k réel.

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

- 1 Soit l'équation différentielle $y' = 4x - 3$, pour x réel.
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est une solution de cette équation.
- 2 Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4$, pour x réel.
Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - 2$ est une solution de cette équation.
- 3 Soit l'équation différentielle (E') : $xy' + y = 6x + 1$, pour x réel.
Déterminer les réels a et b de façon que la fonction $h : x \mapsto ax + b$ soit une solution de cette équation.

Méthode

Pour vérifier qu'une fonction f est solution d'une équation différentielle du premier ordre, on calcule d'abord $f'(x)$, puis on remplace $f(x)$ et $f'(x)$ dans l'équation.

Solution commentée

- 1 Pour tout réel x : $f'(x) = 2 \times 2x - 3 + 0 = 4x - 3$.
Puisque $f'(x) = 4x - 3$ pour tout réel x , f est une solution de l'équation différentielle $y' = 4x - 3$.
- 2 Pour tout réel x : $g'(x) = 2e^{2x}$.
D'où : $g'(x) - 2g(x) = 2e^{2x} - 2(e^{2x} - 2) = 2e^{2x} - 2e^{2x} + 4 = 4$.
Puisque $g'(x) - 2g(x) = 4$ pour tout réel x , g est une solution de l'équation (E).
- 3 Pour tout réel x : $h'(x) = a$.
 h est une solution de l'équation (E') si et seulement si, pour tout réel x :

$$xh'(x) + h(x) = 6x + 1$$
soit $ax + ax + b = 6x + 1$
soit $2ax + b = 6x + 1$.
Si $2a = 6$ et $b = 1$, cette égalité est vérifiée pour tout réel x .
On obtient une fonction h solution en prenant $a = 3$ et $b = 1$.
Une solution de l'équation (E') est donc la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x + 1$.

Voir exercices

- 50 Pour s'entraîner
140 Pour travailler en autonomie

Vidéo 01:53

Vérifier qu'une fonction est une primitive



Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

- 1 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ et $g(x) = (x-1)e^x$.
 - a. Montrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 - b. En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
- 2 Soit f et g les fonctions définies sur $]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \text{ et } g(x) = 2x + 5 \ln(x-2).$$
 - a. Montrer que g est une primitive de f sur $]2; +\infty[$.
 - b. Déterminer la primitive de f sur $]2; +\infty[$ qui s'annule en 3.

Solution commentée

- 1 a. Pour tout réel x : $g'(x) = (x-1)e^x + e^x = (x-1+1)e^x = xe^x$.
Puisque $g'(x) = f(x)$ pour tout réel x , g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b. Puisque g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est formé des fonctions de la forme $x \mapsto (x-1)e^x + k$, avec k réel.
- 2 a. Pour tout réel x : $g'(x) = 2 + 5 \times \frac{1}{x-2} = \frac{2(x-2) + 5}{x-2} = \frac{2x+1}{x-2}$.
Puisque $g'(x) = f(x)$ pour tout réel x de $]2; +\infty[$, g est une primitive de f sur $]2; +\infty[$.
b. On écrit d'abord la forme générale des primitives de f sur $]2; +\infty[$:
 $F(x) = g(x) + k$, avec k réel, soit $F(x) = 2x + 5 \ln(x-2) + k$.
On cherche F telle que $F(3) = 0$, soit $2 \times 3 + 5 \ln(1) + k = 0$, soit $k = -6$.
La primitive cherchée a pour expression : $F(x) = 2x + 5 \ln(x-2) - 6$.

Méthode

Pour montrer qu'une fonction g est une primitive d'une fonction donnée f , on dérive g et on montre que $g' = f$.

Voir exercices

- 51 Pour s'entraîner
131 Pour travailler en autonomie

2. Recherche des primitives d'une fonction

Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient le tableau ci-dessous.

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ pour n entier différent de -1 et 0	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ lorsque $n > 0$ $] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$ lorsque $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

À noter

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$.

À noter

Pour vérifier ces formules, il suffit de montrer que la dérivée de F est égale à f .

Primitives de fonctions ayant des formes remarquables

En utilisant les formules de dérivation d'une somme et d'un produit de fonction par un réel, ainsi que la formule de dérivation d'une fonction composée, on obtient des méthodes de calcul de primitives des fonctions ayant une forme remarquable.

PROPRIÉTÉS Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur l'intervalle I , k un réel quelconque et n un entier différent de -1 et 0 .

- (1) Une primitive de kf est kF , avec F une primitive de f .
- (2) Une primitive de $f + g$ est $F + G$ avec F une primitive de f et G une primitive de g .
- (3) Une primitive de $u' \times e^u$ est e^u .
- (4) Une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$, avec u ne s'annulant pas dans le cas où n est négatif.
- (5) Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(x) > 0$ sur I , est $2\sqrt{u}$.
- (6) Une primitive de $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) > 0$ sur I , est $\ln(u)$.
- (7) Une primitive de $u' \cos(u)$ est $\sin(u)$.
- (8) Une primitive de $u' \sin(u)$ est $-\cos(u)$.

DÉMONSTRATIONS

- (1) $(kF)' = kF' = kf$, donc une primitive de kf est kF .
- (2) $(F + G)' = F' + G' = f + g$, donc une primitive de $f + g$ est $F + G$.
- (3) $(e^u)' = u' \times e^u$, donc une primitive de $u' \times e^u$ est e^u .
- (4) $\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1} \times (n+1)u' \times u^n = u' \times u^n$, donc une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$.
- (5) $(2\sqrt{u})' = 2 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.
- (6), (7) et (8) Ce sont des conséquences des formules de dérivation suivantes :
 $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$, $(\sin(u))' = u' \cos(u)$ et $(-\cos(u))' = u' \sin(u)$.

À noter

Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) \neq 0$ sur I est $-\frac{1}{u}$.

À noter

Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(ax)$, avec $a \neq 0$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax)$.

Vidéo 09.34
Calculer une
primitive (1)



CAPACITÉ

3

Calculer une primitive en utilisant les fonctions de référence

- 1 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 9$.
- 2 Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}$.

Solution commentée

- 1 f est de la forme $u + v + w$ avec $u(x) = x^2$, $v(x) = -4x$ et $w(x) = 9$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F = U + V + W$ où U, V, W sont définies sur $\mathbb{R}$ par $U(x) = \frac{1}{3}x^3$, $V(x) = -4 \times \frac{1}{2}x^2$ et $W(x) = 9x$.

Donc, pour tout réel x : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x$.

- 2 f est de la forme $u + v$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{4}{x^3}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F = U + V$ où

$U(x) = \ln(x)$ et V est une primitive de v sur $]0; +\infty[$. On a : $v(x) = -4 \times \frac{1}{x^3} = -4 \times x^{-3}$.

D'où une primitive de v : $V(x) = -4 \times \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} = -4 \times \frac{1}{-2} x^{-2} = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$.

On en déduit : $F(x) = \ln(x) + \frac{2}{x^2}$.

Voir exercices

69 Pour s'entraîner

134 Pour travailler en autonomie

Vidéo 06.54
Calculer une
primitive (2)



CAPACITÉ

4

Calculer une primitive en utilisant une fonction composée

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^+$ de chacune des fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

- 1 $f(x) = 6x(x^2 - 1)^3$ 2 $g(x) = \frac{5}{2x+3}$ 3 $h(x) = e^{2x+1}$ 4 $i(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+4}}$

Solution commentée

- 1 f est de la forme d'un produit dont l'un des facteurs est une expression à l'exposant 3 : on cherche donc à faire apparaître la forme $u' \times u^3$.

Ici, $u(x) = x^2 - 1$, donc $u'(x) = 2x$.

On écrit : $f(x) = 3 \times 2x \times (x^2 - 1)^3 = 3 \times u'(x) \times u^3(x)$.

Une primitive de $u' u^3$ est $\frac{1}{4} u^4$, donc une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F(x) = 3 \times \frac{1}{4} u^4(x)$, c'est-à-dire $F(x) = \frac{3}{4} (x^2 - 1)^4$.

- 2 g est de la forme d'un quotient : on cherche à faire apparaître la forme $\frac{u'}{u}$.

Ici, $u(x) = 2x + 3$, $u(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}^+$ et $u'(x) = 2$.

On écrit alors : $g(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2}{2x+3} = \frac{5}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Or, une primitive de $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$ est $\ln(u)$. Donc une primitive de g est la fonction G définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $G(x) = \frac{5}{2} \ln(2x+3)$.

- 3 On fait apparaître la forme $u' e^u$ dans l'expression de h , en posant $u(x) = 2x + 1$, ce qui donne $u'(x) = 2$. On a : $h(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$.

Une primitive de $u' e^u$ est e^u , donc une primitive de h est la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \frac{1}{2} \times e^{2x+1}$.

- 4 i a la forme d'un quotient dont le dénominateur est une racine carrée : on cherche à faire apparaître la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. Ici, $u(x) = 3x + 4$, et $u(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}^+$, avec $u'(x) = 3$.

Alors : $i(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$. Ainsi, une primitive de i sur $\mathbb{R}^+$ est la fonction I

telle que $I(x) = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3x+4} = \frac{4}{3} \sqrt{3x+4}$.

Voir exercices

81 Pour s'entraîner

135 Pour travailler en autonomie

3. Équations différentielles

$y' = ay$ et $y' = ay + f$

Équation différentielle $y' = ay$

Vocabulaire

On dit que $x \mapsto Ce^{ax}$ est la solution générale de l'équation $y' = ay$.

LOGIQUE

On raisonne ici par double inclusion. En appelant A l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ et B l'ensemble des solutions de l'équation, on montre $A \subset B$ puis $B \subset A$ pour avoir $A = B$.

PROPRIÉTÉ Soit a un réel.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = af(x)$. Puisque $f'(x) = af(x)$ pour tout réel x , f est bien solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle (E) $y' = ay$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) - ae^{-ax} \times f(x)$.

Puisque f est solution de (E), $f'(x) = af(x)$ pour tout réel x et ainsi :

$$g'(x) = e^{-ax} \times af(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0.$$

La fonction g est constante, soit $e^{-ax} \times f(x) = C$, avec C réel.

Puisque e^{-ax} est différent de 0 pour tout réel x , on obtient :

$$f(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}.$$

EXEMPLE : Soit l'équation différentielle $y' = 2y$, pour x élément de $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, où C est un réel.

On peut représenter les courbes des fonctions solutions : ces courbes se partagent en deux groupes, selon le signe de a , et elles sont toutes asymptotes à l'axe des abscisses.



Vocabulaire

L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Démonstration de cette propriété
Voir page 302

Vocabulaire

$y' = ay$ est l'équation homogène associée à l'équation $y' = ay + b$.

Vocabulaire

On dit qu'on obtient la solution générale de l'équation différentielle.

Équations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

L'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) a toujours une solution particulière constante.

En effet, la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = -\frac{b}{a}$ est solution puisque, pour tout réel x ,

$$f_0'(x) = 0 \text{ et } a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0.$$

PROPRIÉTÉ Soit a et b des réels, a non nul.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation $y' = ay$ et f_0 la solution particulière constante de (E).

EXEMPLE : L'équation différentielle $y' = 2y + 6$ admet pour solution particulière la fonction f_0 telle que $f_0(x) = -3$ (puisque $f_0'(x) = 0$ et $2f_0(x) + 6 = 0$), donc ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x} - 3$, où C est un réel quelconque.

PROPRIÉTÉ (admise) Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I .

Toute solution dans I de l'équation différentielle (E) $y' = ay + f$ est la somme d'une solution quelconque de l'équation $y' = ay$ et d'une solution particulière de l'équation (E).

EXEMPLE : L'équation différentielle $y' = 2y + e^x$ admet pour solution particulière la fonction $f : x \mapsto -e^x$ puisque $f'(x) = -e^x$ et $2f(x) + e^x = -e^x + e^x = 0$. Donc, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto Ce^{2x} - e^x$, avec C réel quelconque.

Vidéo 07.02

Résoudre une équation différentielle du 1^{er} ordre sans second membre



Méthode

Pour résoudre une équation de la forme $y' = ay$, on commence par identifier la valeur de a .

Voir exercices

106 Pour s'entraîner

141 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

5

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$

- 1 Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = -4y$.
- 2 Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = 1$.

Solution commentée

- 1 L'équation (E) est de la forme $y' = ay$, avec $a = -4$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc formé des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-4x}$, où C est une constante réelle.

- 2 La fonction f a pour expression : $f(x) = Ce^{-4x}$.

La condition $f(2) = 1$ va permettre de déterminer la constante C .

Puisque $f(2) = Ce^{-8}$, on en déduit : $Ce^{-8} = 1$. D'où : $C = \frac{1}{e^{-8}} = e^8$.

En conclusion, $f(x) = e^8 e^{-4x}$, ou encore $f(x) = e^{8-4x}$.

CAPACITÉ

6

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

Soit l'équation différentielle (E) $y' = 3y - 2$.

- 1 Déterminer la solution particulière constante solution de (E).
- 2 En déduire toutes les solutions de (E).

Solution commentée

- 1 On cherche la solution particulière constante de (E), de la forme $p(x) = k$.

On a : $p'(x) = 3p(x) - 2$ pour tout réel x , et puisque $p'(x) = 0$, on a : $3p(x) - 2 = 0$, soit $p(x) = \frac{2}{3}$.

- 2 On résout l'équation différentielle $y' = 3y$: elle est de la forme $y' = ay$, avec $a = 3$, donc elle admet pour solutions les fonctions $x \mapsto Ce^{3x}$.

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions g de la forme

$g(x) = Ce^{3x} + \frac{2}{3}$, avec C constante réelle.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, on commence par déterminer la solution particulière constante de cette équation.

Voir exercices

115 Pour s'entraîner

143 Pour travailler en autonomie

Vidéo 08.04

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$



Méthode

Pour résoudre une équation de la forme $y' = ay + f$, on peut commencer par résoudre l'équation $y' = ay$.

Voir exercices

124 Pour s'entraîner

147 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

7

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$

Soit l'équation différentielle (E) $y' = y + x - 3$.

- 1 Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 2$ est une solution de (E).
- 2 En déduire toutes les solutions de (E).

Solution commentée

- 1 La fonction g est une solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x :

$$g'(x) = g(x) + x - 3.$$

Or, $g'(x) = -1$ et $g(x) + x - 3 = -x + 2 + x - 3 = -1$, donc l'égalité est bien vérifiée.

- 2 L'équation différentielle $y' = y$ est de la forme $y' = ay$, avec $a = 1$. Donc les fonctions solutions de cette équation sont de la forme $x \mapsto Ce^x$, où C est une constante quelconque.

On en déduit que les solutions de (E) sont de la forme : $f(x) = Ce^x - x + 2$, avec C réel quelconque.

Étudier une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ DU COURS 3 PAGE 300

Soit a et b des réels, a non nul.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation $y' = ay$ et f_0 une solution particulière constante de (E).

LOGIQUE

Pour démontrer l'égalité de ces deux ensembles, on utilise un raisonnement par double inclusion.

À noter

Lignes 7 à 14 : on démontre $A \subset B$.

À noter

Lignes 15 à 22 : on démontre $B \subset A$.

RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

- On note :
- A l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et f_0 une solution particulière constante de (E) ;
 - B l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay + b$.
- 5 • Soit g une fonction de l'ensemble A. Alors, pour tout réel x , $g(x) = f(x) + f_0(x)$, où f est une solution de l'équation $y' = ay$. On dérive la fonction g : $g'(x) = f'(x) + f_0'(x)$.
Puisque f est une solution de l'équation $y' = ay$, on a, pour tout réel x : $f'(x) = a f(x)$. (1)
Puisque f_0 est une solution de (E), pour tout réel x : $f_0'(x) = a f_0(x) + b$ (2)
Par addition membre à membre des égalités (1) et (2), on obtient, pour tout réel x :
- 10 $f'(x) + f_0'(x) = a f(x) + a f_0(x) + b$, soit $f'(x) + f_0'(x) = a (f(x) + f_0(x)) + b$.
D'où : $g'(x) = a g(x) + b$, ce qui prouve que g appartient à B : ainsi, A est inclus dans B.
- Soit h une fonction de l'ensemble B. Alors, pour tout réel x , $h'(x) = a h(x) + b$.
Soit f_0 une solution particulière de (E) ; alors $f_0'(x) = a f_0(x) + b$ pour tout réel x .
On en déduit : $h'(x) - f_0'(x) = a h(x) + b - (a f_0(x) + b)$,
- 15 soit $h'(x) - f_0'(x) = a (h(x) - f_0(x))$.
D'où : $h'(x) - f_0'(x) = a (h(x) - f_0(x))$, ce qu'on écrit : $(h - f_0)'(x) = a (h - f_0)(x)$.
Ceci prouve que la fonction $h - f_0$ est une solution f de l'équation (E).
Ainsi, $(h - f_0)(x) = f(x)$, et $h(x) = f(x) + f_0(x)$, pour tout réel x .
Donc h appartient à A : ainsi, B est inclus dans A.
- 20 Puisque A est inclus dans B et que B est inclus dans A, les ensembles A et B sont égaux.

QUESTIONS

1. Justifier la ligne 10.
2. Pourquoi, ligne 12, peut-on faire une addition membre à membre ?
3. Quelle technique de calcul déjà vue utilise-t-on à la ligne 17 ? Justifier.

Faire une démonstration

D1 Soit a un réel non nul et l'équation différentielle (E) : $y' = ay$.

Démontrer que la somme de deux solutions f et g de (E) est une solution de (E).

Piste : Traduire ce que l'on sait sur les deux fonctions f et g et observer la conclusion à laquelle on veut arriver.

D2 Soit x_0 et y_0 deux réels donnés.

Montrer que l'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$.

Piste : On a ici un **problème d'existence et d'unicité** : on doit trouver une solution et montrer qu'elle est unique.

Calcul mental

1 Calculer et simplifier :

1. $1 + \frac{1}{3}$

2. $\frac{9}{5} - 2$

3. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

4. $10 \div \frac{5}{3}$

2 Calculer et simplifier :

1. $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

2. $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

3. $\ln(8) - \ln(2)$

4. $e^3 \times \frac{e^2}{e^{-4}}$

3 Calculer l'image de -1 par chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

2. $g(x) = (2x + 3)^3$

3. $h(x) = \frac{x-3}{x+4}$

4. $i(x) = \ln(x+2)$

4 Calculer la dérivée des fonctions f et h suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 250$, sur $\mathbb{R}$

2. $h(x) = \frac{1}{x} - 4x^2$, sur $]0; +\infty[$

Automatismes

Calculs numériques et algébriques

5 Calculer, en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1. $A = \frac{5 + \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} - \frac{3}{4}}$

2. $B = \frac{10^{-3} \times 2^8}{5^{-4} \times 8^2}$

6 Soit x un réel. Développer les expressions suivantes.

1. $A = (x-5)(x+1) - (2x-1)(x+2)$

2. $B = (2x+1)(x-1)^2$

3. $C = x(x-7)(2x+3)$

7 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $2x - \frac{1}{3} + 3(x-5) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$

2. $3x^2 - 7x + 2 = 0$

3. $4x^2 - 9 = 0$

8 Factoriser les expressions suivantes, où x est un réel.

1. $A = e^{2x} - 4e^x$

2. $B = 5x^2 - x - 4$

3. $C = x^4 - 16$

4. $D = x^2 - (2x-1)^2$

9 Vérifier que 3 est une racine du polynôme $2x^2 - x - 15$. En déduire une factorisation de l'expression $2x^2 - x - 15$.

Géométrie

10 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier. On se place dans un repère du plan.

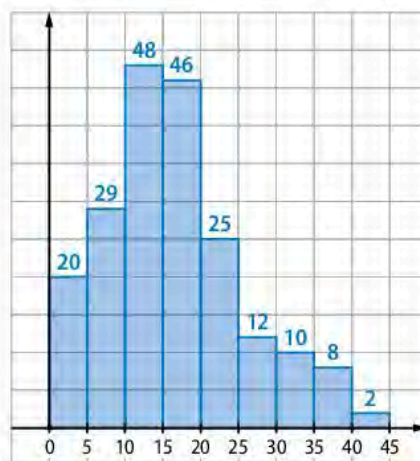
1. La droite d'équation $y = 2x + 1$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; 1)$.2. Les points $A(1; 6)$, $B(0; 4)$ et $C(-2; 0)$ sont alignés.3. Les vecteurs $\vec{u}(5; -1)$ et $\vec{v}(2; 10)$ sont orthogonaux.

11 Question de méthodes

On se place dans un repère orthonormé du plan. Comment faire pour démontrer que deux droites dont on donne l'équation réduite sont perpendiculaires ?

Statistiques et probabilités

12 Le graphique ci-dessous représente la répartition des temps de parcours en minutes entre le domicile de 200 élèves et leur lycée.



1. Quel est le pourcentage d'élèves ayant un temps de parcours d'au plus 20 minutes ?

2. Quel est le pourcentage d'élèves ayant un temps de parcours de plus d'une demi-heure ?

3. Quel est le pourcentage d'élèves ayant un temps de parcours de moins de 30 minutes ?

13 Soit la série statistique pondérée donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	4	5
n_i	5	8	4	3

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.

14 Question de méthodes

La proportion d'enfants ayant une réaction forte à un vaccin donné est de 15 %. On vaccine trois enfants. Comment peut-on modéliser cette situation ?

Équations différentielles

Questions Flash

15 ORAL VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- $y' = x + 1$ est une équation différentielle.
- $y = 2x$ est une équation différentielle.
- La fonction f telle que $f(x) = 5$ est une solution de l'équation différentielle $y' = 5$.

16 ORAL 1. Quelles sont les fonctions dont la dérivée est nulle pour tout réel x ?

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 0$.

17 ORAL Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^2 + x - 1.$$

- Calculer $f'(x)$.
- Montrer que f est une solution de l'équation différentielle $y' = 8x + 1$.

18 ORAL Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 3x - 7 \text{ et } v(x) = 3x + 5.$$

- Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.
- Montrer que u et v sont des solutions de l'équation différentielle $y' = 3$.
- Donner une autre fonction solution de cette équation différentielle.

19 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit l'équation différentielle $y' + y = 0$, pour x réel.

Une solution de cette équation est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = -1$ 2. $f(x) = 4e^{-x}$ 3. $f(x) = 2e^{-x} + 1$ 4. $f(x) = 0$

Primitives d'une fonction

Questions Flash

20 ORAL 1. Donner une primitive de chacune des fonctions f , g , h et i définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5; g(x) = e^x; h(x) = x; i(x) = x^2.$$

2. Soit u une primitive d'une fonction f sur un intervalle I . La fonction v telle que $v(x) = u(x) + 1$ est-elle une primitive de f sur I ?

21 Soit f , u et v les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, u(x) = -\frac{1}{x} \text{ et } v(x) = \frac{3x-1}{x}.$$

- Montrer que u et v sont des primitives de f sur $]0; +\infty[$.
- Simplifier $u(x) - v(x)$, et expliquer ce résultat.

22 Soit f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \sin(x) \text{ et } F(x) = \sin(x) - x \cos(x).$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Expliquer pourquoi la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

23 Soit F et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $F(x) = xe^{3x}$ et $f(x) = (1 + 3x)e^{3x}$.

- Justifier que, pour tout réel x : $F'(x) = f(x)$.
- Que peut-on en déduire pour la fonction F ?

24 1. Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(x)$ est une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1$.

2. Donner deux autres primitives de f sur $]0; +\infty[$.

25 ORAL 1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions u , v et w définies par $u(x) = 5x^3$, $v(x) = -\frac{x^3}{2}$ et $w(x) = \sqrt{2}x^3$.

26 1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. En déduire une primitive sur $]0; +\infty[$ des fonctions p , q et r telles que $p(x) = \frac{7}{x}$, $q(x) = \frac{1}{3x}$ et $r(x) = \frac{x+1}{x}$.

27 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

Soit f et g des fonctions définies sur un intervalle I et soit F et G des primitives respectives de f et g sur I .

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- $F \times G$ est une primitive de $f \times g$ sur I .
- $-F$ est une primitive de $-f$ sur I .
- F^2 est une primitive de f^2 sur I .

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

- Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

29 Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \frac{1}{x^5}$.

- Écrire $u(x)$ sous la forme x^n , avec n entier.
- En déduire une primitive de u sur $]0; +\infty[$, puis l'écrire sous la forme $\frac{k}{x^4}$, où k est un réel.

30 Déterminer sur $]0; +\infty[$ une primitive de chacune des fonctions f , g et h telles que : $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x^{-3}$ et $h(x) = \frac{2}{x^3}$.

31 1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{2x}$.

2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions g et h telles que $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{ax}$ avec a réel non nul.

32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{x^2}$.

- Vérifier que f s'écrit sous la forme $u'e^u$, où u est une fonction dont on donnera l'expression.
- En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

33 Soit f la fonction définie sur $I = \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{2x-1}.$$

1. Vérifier que f est sous la forme $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction positive sur I dont on donnera l'expression.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur I .

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$.

1. Vérifier que f est sous la forme u^2u' , où u est une fonction dont on donnera l'expression.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

35 Soit f la fonction définie sur $I = \left] \frac{3}{2} ; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}.$$

1. Écrire f sous la forme $k \frac{u'}{\sqrt{u}}$, où k est un réel et u une fonction à déterminer.
2. En déduire une primitive de f sur I .

Équations différentielles $y' = ay$

Questions flash

36 ORAL VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. L'équation $y' = ay$ a toujours une unique solution.
2. La fonction $x \mapsto e^{-2x}$ est une solution de l'équation $y' = -2y$.

37 Écrire chacune des équations différentielles suivantes sous la forme $y' = ay$ en précisant à chaque fois la valeur du réel a .

1. $y' - 5y = 0$
2. $3y' + 4y = 0$
3. $y = 2y'$
4. $-y' + \pi y = 0$

38 Soit l'équation différentielle $y' = 10y$.

1. Justifier que les fonctions solutions de cette équation sont de la forme $f(x) = Ce^{10x}$, avec C réel.
2. Quelle est la solution f telle que $f(1) = 2$?

39 ORAL Soit l'équation différentielle $y' + 4y = 0$.

1. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $y' = ay$, où a est un réel à préciser.
2. Résoudre cette équation.

40 Soit l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$.

1. Écrire cette équation sous la forme $y' = ay$, où a est un réel que l'on donnera.
2. Résoudre cette équation.

41 Soit l'équation différentielle $y' = y$.

1. Résoudre cette équation.
2. Montrer que la solution f de cette équation telle que $f(0) = 1$ est la fonction exponentielle.

MATHS & SVT

42 On modélise la concentration d'un antibiotique dans le sang, exprimée en $\mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$, en fonction du temps, exprimé en heures, lors d'une injection par intraveineuse, par une fonction f solution de l'équation $y' = -0,2y$ sur $[0 ; +\infty[$.

1. Justifier que, pour $t \geq 0$: $f(t) = ke^{-0,2t}$, où k est un réel.
2. La concentration initiale de l'antibiotique est $20 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$. Calculer la constante k .
3. En déduire la concentration de cet antibiotique dans le sang au bout de 5 heures.

MATHS & SVT

43 On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. On suppose que le nombre $N(t)$ de bactéries par millilitre à l'instant t vérifie l'équation différentielle $y' = 0,2y$.



1. Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.
2. La culture contient 10^4 bactéries par millilitre à l'instant $t = 0$. Montrer que $N(t) = 10^4 e^{0,2t}$.
3. Résoudre l'inéquation $N(t) \leq 2 \times 10^4$, et interpréter le résultat.

Équations différentielles $y' = ay + f$

Questions flash

44 ORAL 1. Donner la solution particulière constante de l'équation différentielle $y' = 6y + 3$.

2. L'équation différentielle $y' = 5y$ a pour solution générale $y = Ce^{5x}$ avec C réel et l'équation (E) $y' = 5y - 10$ a pour solution particulière f telle que $f(x) = 2$.
Donner la solution générale de (E).

45 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 10y + 20$.

1. Déterminer la solution particulière constante de l'équation (E).
2. Justifier que les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme $f(x) = Ce^{10x} - 2$, où C est un réel quelconque.

46 Soit l'équation différentielle (E) $y' = -y + 1$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y$.
2. Justifier que l'ensemble des solutions de (E) est formé des fonctions f de la forme $f(x) = Ce^{-x} + 1$, où C est un réel quelconque.

47 Soit l'équation différentielle (E) $y' = -2y + \cos(x)$, pour x réel.

1. Résoudre l'équation $y' = -2y$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 0,4 \cos(x) + 0,2 \sin(x)$ est une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Équations différentielles

48 Soit l'équation différentielle $y' + 3y = 12$, pour x réel. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4 + e^{-3x}$ est une solution de cette équation.

49 Soit l'équation différentielle $y' - xy^2 = 0$, pour x réel. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2}{x^2 + 3}$ est une solution de cette équation.

50 Capacité 1, p. 297

1. Soit l'équation différentielle $y' = 6x^2 + 8x$, pour x réel. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$ est une solution de cette équation.

2. Soit l'équation différentielle $x^2 y' + (x-1)y = 2x^2 - x$, pour x réel.

Déterminer les réels a et b de façon que la fonction $h : x \mapsto ax + b$ soit une solution de cette équation.

51 Soit l'équation différentielle $xy' - 2y = 5x + 6$, pour x réel. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de cette équation.

52 Montrer que la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est une solution de l'équation différentielle $xy' + y = -\frac{1}{x^2}$.

Primitives d'une fonction

53 Capacité 2, p. 297

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos(x)$ et $g(x) = \cos(x) + x \sin(x)$.

1. Montrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

54 Soit f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x} \text{ et } g(x) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

2. Déterminer la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Pour les exercices **55** et **56**, montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I .

55 $f(x) = \sqrt{x}$; $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 5$; $I =]0; +\infty[$.

56 $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $F(x) = x - \ln(x+1)$; $I =]-1; +\infty[$.

57  **FORME** Le logiciel de calcul formel Xcas fournit une primitive d'une fonction avec la commande `int`.

Prouver le résultat ci-contre.

```
int(x^2*exp(x))
exp(x)*(x^2-2*x+2)
```

58 Soit F la fonction définie sur $] -\infty; 2[$ par :

$$F(x) = (x-2)\sqrt{2-x}.$$

1. Calculer $F'(x)$.

2. En déduire une primitive sur $] -\infty; 2[$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2-x}$.

Piste 2. Remarquer que $\frac{u}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}$, pour $u > 0$.

59 Soit f , g et h les fonctions définies sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = \ln(x-1) \text{ et } h(x) = \ln(3x-3).$$

1. Montrer que g et h sont des primitives de f sur $]1; +\infty[$.

2. Expliquer pourquoi il existe un réel C tel que, pour tout $x > 1$, $h(x) = g(x) + C$, et déterminer C .

60 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse, puis justifier.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos(x)$ a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^x \sin(x)$.

61 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x^2 (a \ln(x) + b)$ soit une primitive de f .

62 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. Toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

3. Toute primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Une primitive de la dérivée d'une fonction f est la fonction $x \mapsto f(x) + 10$.

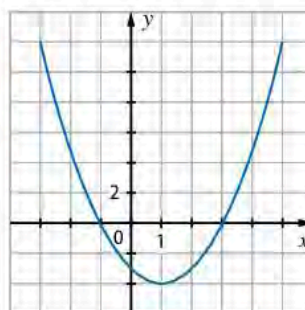
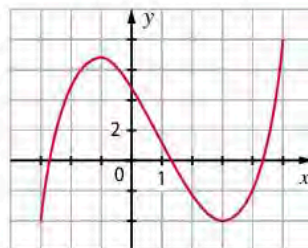
63 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une primitive de la fonction g telle que $g(x) = f''(x) + 2f'(x)$.

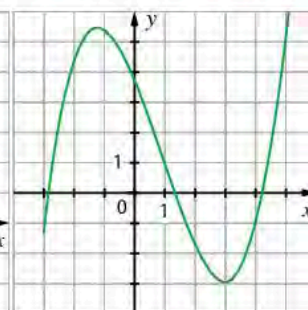
2. Déterminer une primitive de la fonction h telle que $h(x) = f'(-x)$.

64 Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$. La courbe ci-contre représente une primitive F de f .

Parmi les deux courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction f ? Justifier.



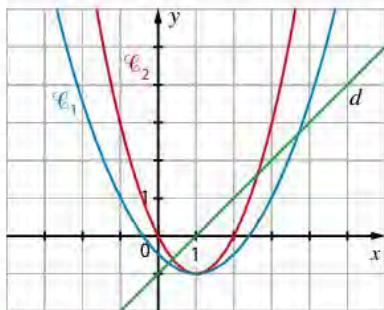
Courbe 1



Courbe 2

65 On a représenté une droite d et deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques respectives des fonctions f , g et h .

Laquelle des fonctions g ou h est une primitive de f ?

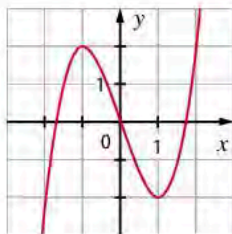


66 VRAI/FAUX

La fonction F représentée ci-contre est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

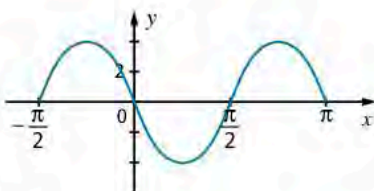
1. $f(0) = 0$
2. $f(1) = 0$
3. $f(x) \geq 0$ sur $[-1; 0]$
4. $f(x) \leq 0$ sur $[0; 1]$



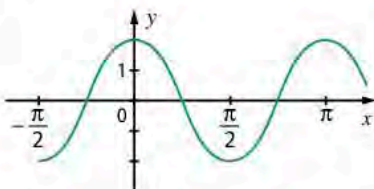
67 On considère une fonction f , sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$.

Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

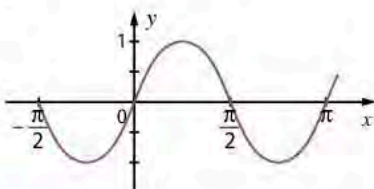
Quelle est la représentation graphique de f ? Et celle de f' ?
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



68 LOGIQUE Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Dire, en le justifiant, si l'énoncé suivant est vrai ou faux : « si la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$. »
2. Énoncer la réciproque de la proposition précédente. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Calcul des primitives d'une fonction

69 Capacité 3, p. 299

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$.
2. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x}$.

Pour les exercices **70** à **74**, déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par leurs expressions.

- 70** $f(x) = 5x^3 - 3x + 7$ et $g(x) = 2x^4 - \frac{1}{2}x^3$
- 71** $f(x) = x^5 - x$ et $g(x) = 4x^4 - 7x + \sqrt{2}$
- 72** $f(x) = 2 \cos(x) - 3 \sin(x)$ et $g(x) = 10 - 3e^x + x$
- 73** $f(x) = (x-1)(x+2)$ et $g(x) = (2x+1)^2$
- 74** $f(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6}$ et $g(x) = 12,4x^9 - 7x^6 + 15x^4$

Pour les exercices **75** à **80**, déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par leurs expressions.

- 75** $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$
- 76** $f(x) = x + x^{-3}$ et $g(x) = x - \frac{1}{2x}$
- 77** $f(x) = \frac{7}{x^3}$ et $g(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}$
- 78** $f(x) = \frac{x+5}{x^2}$ et $g(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}$
- 79** $f(x) = \frac{3x^2 - 11}{x^2}$ et $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} - x + 6$
- 80** $f(x) = \frac{4 - x\sqrt{x}}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1 + x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

81 Capacité 4, p. 299

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f , g , h et i définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 3x^2(x^3 + 1)^2$
2. $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
3. $h(x) = e^{-x+3}$
4. $i(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 7}}$

Pour les exercices **82** à **91**, déterminer une primitive de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par leurs expressions.

- 82** $f(x) = 3e^{3x+4}$ et $g(x) = xe^{x^2-3}$
- 83** $f(x) = x^2e^{-3}$ et $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 4}$
- 84** $f(x) = 5e^{4-x}$ et $g(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 5}$
- 85** $f(x) = 4x(3x^2 - 8)^2$ et $g(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$
- 86** $f(x) = e^x(e^x + 4)^3$ et $g(x) = (2x-1)^4$
- 87** $f(x) = \sin(3x) - \cos(2x)$ et $g(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$
- 88** $f(x) = \sin(x) \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x) \cos^2(x)$

89 $f(x) = \cos(x) e^{\sin(x)}$ et $g(x) = \sin(x)(1 - \cos(x))^3$

90 $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+1}$ et $g(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x+4)^2}$

91 $f(x) = \frac{1}{e^x}$ et $g(x) = \frac{3}{e^{-x}(e^x+1)}$

Pour les exercices 92 à 100, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

92 $f(x) = \frac{2}{x} (\ln(x) + 2)^2$ sur $I =]0; +\infty[$

93 $f(x) = \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{1}{3x-1}$ sur $I =]\frac{1}{3}; +\infty[$

94 $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

95 $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $I =]1; +\infty[$

Piste : Reconnaître la forme $\frac{u'}{u}$.

96 $f(x) = \frac{-3 - e^x}{(e^x + 3x)^2}$ sur $I = [0; +\infty[$

97 $f(x) = \frac{-7}{x (\ln(x) + 3)}$ sur $I =]e^{-3}; +\infty[$

98 $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

99 $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ sur $I =]0; \pi[$

100 $f(x) = \frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ sur $I =]0; +\infty[$

101 1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = x - \sin(x)$.

2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 2$.

102 1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $]2; +\infty[$: $\frac{5x}{(x-2)(2x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{2x+1}$.

2. En déduire les primitives de la fonction f telle que $f(x) = \frac{5x}{(x-2)(2x+1)}$ sur $]2; +\infty[$.

103 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $] -1; +\infty[$: $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1}$.

2. En déduire les primitives de f sur $] -1; +\infty[$.

104 Une question ouverte

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et F une primitive de f ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

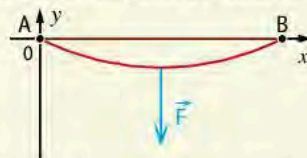
Déterminer une primitive de la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$z(x) = f(-x) + f(2x+1) + \frac{f(x)}{F(x)}.$$

Piste → Voir p. 466

MATHS & PHYSIQUE

105 Une poutre AB de longueur ℓ , appuyée en A et B, fléchit sous l'action d'une force $\vec{F}$ s'exerçant en son milieu. On se propose de trouver la déformée de la poutre, c'est-à-dire la fonction f représentée graphiquement par l'arc de courbe AB dans le repère d'origine A et d'axes (Ax) et (Ay) . La flèche de la poutre au point d'abscisse x est $f(x)$.



On démontre en mécanique que la dérivée seconde de f vérifie : $f''(x) = -kFx$, pour x appartenant à l'intervalle $[0; \ell]$, où k est un coefficient dépendant des caractéristiques de la poutre et F l'intensité de la force $\vec{F}$ (on néglige la masse de la poutre).

1. Quelles sont les valeurs de $f(0)$ et $f'(\frac{\ell}{2})$?
2. Déterminer $f'(x)$, puis $f(x)$.
3. Calculer la flèche maximale en fonction de k , ℓ et F .

Équations différentielles $y' = ay$

106 Capacité 5, p. 301

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 5y$.
2. Déterminer la solution f de (E) telle que : $f(1) = 4$.

107 Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y' = -2y$
2. $3y' - 2y = 0$
3. $-y' + 0,1y = 0$
4. $y' + \ln(2)y = 0$

108 Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution f vérifiant la condition donnée.

1. $y' = 5y$ et $f(0) = 2$
2. $y' + 6y = 0$ et $f(1) = 1$
3. $2y' - 3y = 0$ et $f(4) = 2$
4. $2y' = 5y$ et $f'(0) = 5$

MATHS & SVT

109 La destruction de cellules bactériennes par la chaleur peut être mise en évidence en chauffant à une température donnée, pendant des durées variables, une suspension de telles cellules et en dénombrant les survivantes.



On désigne par $N(t)$ le nombre de cellules survivantes à l'instant t , exprimé en minutes. On admet que la fonction N est une solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $x' = ax$, où a est une constante qui dépend de la température de chauffage.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Préciser la solution de (E) vérifiant les conditions suivantes : $N(0) = 10^5$ et $N(60) = 5\,000$.

(On arrondira au centième la valeur trouvée pour a .)

MATHS & PHYSIQUE

110 On souhaite étudier la vitesse de rotation angulaire lors du freinage d'un disque dans un liquide.

Cette vitesse $N(t)$ représente le nombre de tours par minute à l'instant t exprimé en minutes.

La fonction N vérifie l'équation différentielle $y' = -(\ln 100)y$.

- Déterminer la fonction N sachant que $N(0) = 1\,500$.
- Calculer la vitesse angulaire à l'instant $t = 1$.
- Au bout de combien de temps la vitesse angulaire sera-t-elle d'un tour par minute ? Donner la valeur exacte et une valeur approchée au centième de minute.



111 VRAI/FAUX

On note $x(t)$ le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive présents à l'instant t (exprimé en années) dans cette substance, et on admet que la vitesse d'élimination $x'(t)$ est proportionnelle à $x(t)$: il existe donc une constante réelle k , telle que $x'(t) = k x(t)$. On appelle x_0 le nombre d'atomes présents à l'instant $t = 0$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Le nombre d'atomes diminue quand t augmente, donc k est négatif.
- À chaque instant t , on a $x(t) = x_0 e^{kt}$.
- Si, à l'instant T , le nombre d'atomes a diminué de moitié par rapport à l'instant initial, à l'instant $t = 3T$, il reste le sixième des atomes dans la substance.

LE SAVIEZ-VOUS

En physique, on montre expérimentalement que les noyaux radioactifs « meurent sans vieillir ». C'est Gamow qui a expliqué ce phénomène en 1928.

MATHS & SVT

112 On a constaté qu'après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi $g'(t) + Kg(t) = 0$, où g

désigne la fonction glycémique dépendant du temps t et K une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glycémique.

- On suppose que $g(0) = 2$. Exprimer $g(t)$ en fonction de k et t .
- Déterminer la formule donnant le coefficient K en fonction du taux de glycémie G_1 à l'instant donné t_1 .
- La valeur moyenne de K chez un sujet normal varie de 0,0106 à 0,0242. Préciser si les résultats du sujet X qui a un taux de glycémie égal à 1,2 à l'instant $t_1 = 30$ sont normaux.



113 On considère les équations différentielles :

$$(E_1) : y' - 2y = 0 \text{ et } (E_2) : y' = y.$$

- Résoudre les équations (E_1) et (E_2) .
- Déterminer la solution particulière f_1 de (E_1) telle que $f_1'(0) = 4$.
- Déterminer la solution particulière f_2 de (E_2) telle que $f_2'(0) = 1$.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.
 - Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
 - Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

114 Déterminer l'équation d'une courbe passant par le point A de coordonnées $(-1 ; 2)$ et telle qu'en chaque point M de la courbe, le coefficient directeur de la tangente est égal au triple de l'ordonnée du point M.

 Équations différentielles $y' = ay + b$

115 Capacité 6, p. 301

Soit l'équation différentielle $(E) y' = -2y + 3$.

- Déterminer la solution particulière constante de (E) .
- En déduire toutes les solutions de (E) .

116 FORMEL Le logiciel Xcas fournit la solution générale d'une équation différentielle avec la commande **desolve**. Justifier le résultat ci-contre.

<code>desolve (y'+4*y=8, y)</code>
<code>c_0 *exp(-4 *x)+2</code>
M

117 Déterminer la fonction f , solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 6y = 1$, dont la courbe représentative passe par le point A(2 ; 0).

MATHS & PHYSIQUE

118 On chauffe dans une grande cuve un liquide et on appelle $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes, g étant une fonction numérique définie sur $[0 ; +\infty[$.

La température à l'instant initial est de 20 °C.

On admet que la fonction g vérifie l'équation différentielle $(E) : y' + 0,002y = 0,02$.



- Exprimer $g(t)$ en fonction de t .
- Quelle sera la température du liquide au bout d'une heure ?
- Au bout de combien de secondes la température dépassera-t-elle 85 °C ? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

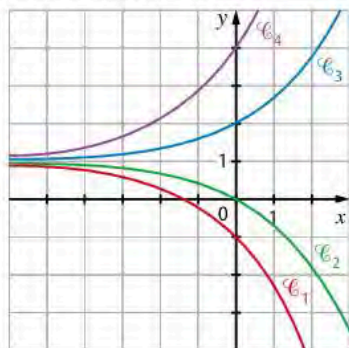
119 VRAI/FAUX

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 3y = 2$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. L'équation (E) admet pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{3x} + 2$, avec C réel quelconque.
2. La solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2)$.
3. La solution particulière g de (E) dont la courbe représentative admet une tangente de coefficient directeur 3 au point d'abscisse 0 est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{2}{3} + e^{3x}$.

120 Les courbes ci-dessous représentent quatre solutions de l'équation différentielle $2y' = y - 1$.



Résoudre cette équation différentielle, puis donner des équations des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.

MATHS & PHYSIQUE

121 On étudie l'évolution de la vitesse d'un moteur dont la vitesse de rotation à vide est de $150 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Dans la phase d'embrayage, cette vitesse, exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, est modélisée par une fonction solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $\frac{1}{200}y' + y = 146$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer la solution w de (E) vérifiant $w(0) = 150$.
3. a. Calculer et interpréter la limite de w en $+\infty$.
b. Interpréter le sens de variation de w .
4. On considère que la vitesse de rotation du moteur, exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, est stabilisée lorsque la quantité $\frac{w(t) - 146}{146}$ est inférieure à 0,01.

Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millièmes de seconde.

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

122 On s'intéresse à la chute d'un parachutiste avant l'ouverture du parachute. On admet que la vitesse v du parachute peut être modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle $mv'(t) + 25v(t) = 9,81$, où $v(t)$ est exprimé en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et m est la masse totale (en kg) du parachutiste et de son parachute.



On suppose que $m = 80 \text{ kg}$ et que la vitesse initiale du parachutiste est nulle au début de la chute.

1. Montrer que $v(t) = 0,3924(1 - e^{-0,3125t})$, pour $t \geq 0$.
2. À partir de quel instant la vitesse dépasse-t-elle $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$?
3. Le parachutiste peut-il atteindre une vitesse de $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?
4. La vitesse moyenne du parachutiste lors des deux premières secondes de la chute est donnée par :

$V_m = \frac{V(2) - V(0)}{2}$, où V est une primitive de v sur $[0; +\infty[$. Calculer V_m , en arrondissant à l'unité.

MATHS & PHYSIQUE

123 Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde. On suppose que la fonction v est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.



Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle $10v'(t) + v(t) = 30$. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle.

1. Démontrer que $v(t) = 30(1 - e^{-\frac{t}{10}})$.
2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur $[0; +\infty[$.
b. Déterminer la limite de v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

Équations différentielles $y' = ay + f$

124 Capacité 7, p. 301

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u , définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x e^{-x}$, est une solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

125 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = x$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

126 Soit l'équation différentielle (E) $y' + 4y = 3x e^{2x}$, pour x élément de $\mathbb{R}$.

On note (E') l'équation différentielle $y' + 4y = 0$.

1. Résoudre l'équation (E').
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\right) e^{2x}$ est une solution de (E).
3. Déterminer la solution générale de (E).

127 Soit l'équation différentielle (E) $y' - 2y = x e^x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b) e^x$ soit une solution de (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

128 Soit l'équation différentielle $y' - 2y = 4x^2 - 4x$.

1. Déterminer une solution particulière u de cette équation de la forme $u(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels que l'on déterminera.
2. Déterminer la solution générale de cette équation.
3. Déterminer la solution f de cette équation telle que $f'(1) = 2$.

129 Une question ouverte

Déterminer la fonction f telle que $f(0) = 1$, et pour tout réel x : $f'(x) - f(x) = x^2$.

Piste → Voir p. 466

MÉTHODE À L'ORAL

130 Soit les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y' = \frac{2}{x+3} \text{ pour } x > -3$$

$$(E_2) : y' = 20y$$

$$(E_3) : y' = -y + 4$$

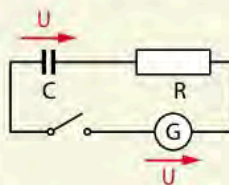
$$(E_4) : y' - 3y = 2x$$

1. Est-ce que ces équations différentielles se résolvent de la même façon ? Exposer oralement la méthode à suivre pour résoudre chacune de ces équations.
2. Pour (E_1) , quelle forme peut-on reconnaître pour l'expression $\frac{2}{x+3}$? Expliquer ce qui oriente la méthode à suivre.
3. Comment démarre-t-on pour trouver une fonction affine solution particulière de (E_4) ?

MATHS & PHYSIQUE

131 PYTHON Compléter et exécuter un programme

Un circuit électrique est constitué d'un condensateur de capacité $C = 75 \times 10^{-6}$ farads, d'une résistance $R = 2 \times 10^4$ ohms, d'un générateur G et d'un interrupteur. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension V .



La tension U au bornes du condensateur est alors solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (1) :

$$RC U'(t) + U(t) = V(t).$$

On suppose que $V(t) = 6 e^{-\frac{2}{3}t}$, où t est exprimé en secondes. De plus, la charge initiale du condensateur impose la condition (2) :

$$U(0) = \frac{1}{3} V(0).$$

1. Montrer que la fonction U_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $U_1(t) = 4t e^{-\frac{2}{3}t}$ est une solution de l'équation (1).
2. En déduire la solution générale de (1).
3. Déterminer la solution U de l'équation différentielle (1) vérifiant la condition (2).
4. Étudier le sens de variation de U et calculer sa limite en $+\infty$.

5. L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts. On veut que le programme Python ci-contre renvoie la valeur de t , arrondie au dixième de seconde, pour laquelle l'appareil ne détecte plus la tension $U(t)$.

- a. Compléter ce programme.
- b. Déterminer cette valeur de t .

```
1 from math import exp
2 def temps():
3     t=0
4     while (...):
5         t=t+...
6     return(t)
```

Problème de synthèse

132 RAISONNER CALCULER

Soit n un entier strictement positif et l'équation différentielle $(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

1. Soit g et h deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x , $g(x) = h(x) e^{-x}$.

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire une solution particulière de l'équation (E_n) .

2. a. Déterminer la solution générale de l'équation (E_n) .

b. Déterminer la solution f de (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

3. On pose, pour tout réel x : $f_0(x) = e^{-x}$.

Pour tout entier strictement positif n , on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

Montrer par récurrence que, pour tout réel x et tout entier strictement positif n , $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

Si F est une primitive de f sur I , toutes les primitives de f sur I sont de la forme $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante.

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

Primitive d'une fonction f sur I : fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I .

Primitives d'une fonction

Équations différentielles

- L'équation $y' = f$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où F est une primitive de f et C une constante.
- L'équation $y' = ay$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, où $k \in \mathbb{R}$.
- L'équation $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + f_0(x)$, où $k \in \mathbb{R}$ et f_0 est la solution constante de cette équation.
- L'équation (E) $y' = ay + f$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + p(x)$, où $k \in \mathbb{R}$ et p est une solution particulière de (E).

Primitives des fonctions de référence

Fonction f	Primitive F
$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$

Primitives des fonctions composées

Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u
$u'u^n$ où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{u}$ ($u > 0$)	$\ln(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ($u > 0$)	$2\sqrt{u}$
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Faire le point avec des exercices corrigés

Déterminer des primitives d'une fonction

* 133  10 min Capacité 2, p. 297

Soit f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 (3 \ln(x) + 1)$ et $g(x) = x^3 \ln(x)$.

1. Montrer que g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

* 134  10 min Capacité 3, p. 299

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2x^3 - 8x + \frac{2}{x^2}$, sur $]0; +\infty[$
2. $y' = \frac{5}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$, sur $]0; +\infty[$

* 135  20 min Capacité 4, p. 299

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x-1)(x-2)}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $]2; +\infty[$: $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$.
2. En déduire les primitives de la fonction f sur I .
3. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 3$.

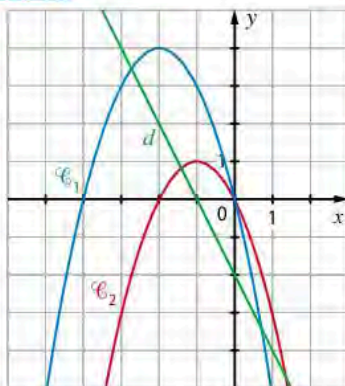
* 136  20 min Capacité 4, p. 299

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions définies de la façon suivante sur $]3; +\infty[$:

1. $f(x) = \frac{2}{2x-5}$
2. $g(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$

137 10 min Capacité 2, p. 292

On a représenté ci-contre une droite d et deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques respectives des fonctions f , g et h . Laquelle des fonctions g ou h est une primitive de f ?



138 20 min Capacités 3 et 4, p. 292

Déterminer une primitive de chacune des fonctions définies de la façon suivante :

a. $f(x) = \frac{\ln(x) - 3}{2x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 6 + \sqrt{x}}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

c. $h(x) = \frac{1}{e^{2x}(e^{-2x} + 4)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

139 20 min Capacités 3 et 4, p. 299

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g , définies et dérivables sur $]0; +\infty[$, et possédant la propriété P suivante :

« Pour x appartenant à $]0; +\infty[: g(x) - xg'(x) = \frac{2x}{x+2}$. »

g étant une fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, on pose, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[: G(x) = \frac{g(x)}{x}$.

1. Montrer que g possède la propriété P si et seulement si, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[: G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$.

2. En déduire l'ensemble (E).

140 10 min Capacité 1, p. 292

Soit l'équation différentielle $(x-1)y' + y = 2x$, pour tout réel x de l'intervalle $]1; +\infty[$.

Montrer que la fonction f , définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ est une solution de cette équation différentielle.

Résoudre des équations différentielles

141 15 min Capacité 5, p. 301

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 0$.

a. La fonction $x \mapsto -2e^{3x}$ est solution de (E).

b. La fonction $x \mapsto 2e^{-3x}$ est solution de (E).

c. La fonction $x \mapsto 2e^{3(1-x)}$ est la solution f de (E) telle que $f(1) = 2$.

d. La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}e^{-3x}$ est la solution g de (E) telle que $g'(0) = 3$.

142 5 min Capacité 5, p. 301

Soit l'équation différentielle $y' = 10y$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation.

2. Déterminer la solution f de cette équation telle que $f(2) = 3$.

143 10 min Capacité 6, p. 301

Soit l'équation différentielle $y' + 2y = 3$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la fonction f , solution de cette équation, telle que $f''(0) = 2$.

144 10 min Capacité 6, p. 301

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Une solution de l'équation différentielle $y' + y = 2$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = 2$

b. $f(x) = 5e^x + 2$

c. $f(x) = 2 - e^x$

d. $f(x) = 2 + 3e^{-x}$

145 15 min Capacité 6, p. 301

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' = 1$. On pose : $z = y'$.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par z , puis la résoudre.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

146 15 min Capacité 5, p. 301

Soit $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant t , où t est exprimé en jours.

On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est une constante réelle.

1. Déterminer $N(t)$ en fonction de a , sachant que $N(0) = 10^9$.

2. Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié.

Calculer la valeur exacte de a .

3. Au bout de combien de jours le nombre de noyaux deviendra-t-il inférieur à 100 ?

147 10 min Capacité 7, p. 301

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = x^2 - 2, \text{ pour } x \text{ appartenant à } \mathbb{R}.$$

1. Résoudre l'équation (E') : $y' + y = 0$.

2. Montrer que la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 2x$, est une solution de (E).

3. En déduire toutes les fonctions solutions de l'équation (E).

148 25 min Capacité 7, p. 301

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4x - 3$.

1. Montrer que (E) admet une fonction affine solution.

2. En déduire la solution générale de l'équation (E).

3. Déterminer la solution de l'équation (E) dont la courbe représentative dans le plan passe par le point A de coordonnées $(1; 0)$.

149 15 min Capacité 7, p. 301

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = e^{2x}$.

1. Déterminer le réel a tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x}$ soit solution de (E).

2. En déduire la solution générale (E).

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Déterminer une primitive d'une fonction simple

■ **Un exemple :** Déterminer une primitive des fonctions f , g et h suivantes :

$$f(x) = 4x^2 - 6x + 5 \text{ sur } \mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \text{ sur }]0; +\infty[, h(x) = \frac{1}{x-2} \text{ sur }]2; +\infty[.$$

Ma réflexion	→ Ma démarche
Que dois-je faire pour la fonction f ?	Je dois calculer une primitive d'une fonction polynôme. ► Donner une primitive des fonctions $x \mapsto 5$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$.
Comment terminer le calcul pour la fonction f ?	J'en déduis une primitive des fonctions $x \mapsto -6x$ et $x \mapsto 4x^2$. ► Donner le résultat en ajoutant les trois primitives calculées.
Comment démarrer pour la fonction g ?	Je reconnais deux fonctions de référence, l'une étant $x \mapsto \frac{1}{x}$. ► Donner une primitive de chacune de ces fonctions.
Comment terminer le calcul pour la fonction g ?	Je calcule une primitive des fonctions $x \mapsto \frac{2}{x}$ et $x \mapsto \frac{5}{x^2}$. ► Conclure en ajoutant ces deux primitives.
Quelle forme puis-je reconnaître pour la fonction h ?	Je reconnais un quotient et je peux penser à la formule $\frac{u'}{u}$ car le dénominateur est formé d'une expression à l'exposant 1. ► Expliciter $u(x)$, et montrer que $u(x) > 0$. Calculer $u'(x)$.
Comment calculer une primitive de h ?	Je constate que je peux appliquer la formule du cours avec $\frac{u'}{u}$. ► Expliquer pourquoi, puis donner une primitive de la fonction h .

150 Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

1. $f(x) = -9x^2 + 5x + 10$ sur $\mathbb{R}$

2. $g(x) = 2x^4 + 7x^2 + 4x - 6$ sur $\mathbb{R}$

3. $h(x) = 3x - \frac{8}{x}$ sur $]0; +\infty[$

4. $j(x) = -\frac{6}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

5. $p(x) = \frac{2}{2x-3}$ sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$

6. $q(x) = \frac{2x}{x^2+5}$ sur $\mathbb{R}$

PARCOURS 2 Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

■ **Un exemple :** Résoudre l'équation différentielle $y' - 8y = 6$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Comment démarrer ?	J'écris cette équation sous la forme $y' = ay + b$ et j'identifie a et b . ► Quelle propriété du cours me donne la marche à suivre ?
Comment continuer ?	Je commence par chercher la solution particulière constante de cette équation. ► Poser $y = C$, avec C réel, et déterminer la valeur de C .
Comment poursuivre ?	Je résous l'équation différentielle $y' = 8y$. ► Rappeler la formule du cours et donner la solution générale de cette équation.
Comment peut-on conclure et vérifier son résultat ?	Je conclus en utilisant la propriété citée plus haut. ► On peut ensuite vérifier le résultat en remplaçant la fonction trouvée et sa dérivée dans l'équation différentielle.

151 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 4y = 5$

2. $y' = -3y + 2$

3. $y' + 7y = 14$

4. $y' = 6 - 2y$

5. $y' = 9y$

6. $y' - \frac{1}{4}y = 1$

7. $y' + 11y = 0$

8. $y' = \frac{y}{2} - 4$

PARCOURS 3 Équation logistique

152 Modèle de Malthus

L'économiste anglais Thomas Malthus (1766-1844) constate qu'on peut modéliser l'évolution d'une population en supposant que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à cette population. Si la fonction f associe, à l'instant t exprimé en mois, la population, elle vérifie l'équation différentielle $(E_1) y' = ky$, où k est le coefficient de proportionnalité.

a. Résoudre (E_1) , puis déterminer la fonction f pour une population de 10 lapins introduite dans une île, sachant que cette population double au bout de trois mois. On arrondira les coefficients à 10^{-2} .

b. Représenter f dans le plan.



Piste a. : Exprimer z' en fonction de y et y' .

153 Modèle de Verhulst

Le modèle de Malthus n'est pas réaliste : à long terme, l'espace restreint ou la quantité de nourriture disponible freinent l'accroissement de la population.

Le modèle de Verhulst est basé sur l'hypothèse que la vitesse d'accroissement est proportionnelle, d'une part à la population $g(t)$, et d'autre part à la capacité d'accueil encore disponible $M - g(t)$, où M est une constante représentant l'effectif maximal qui peut apparaître au sein de cette population.

Si on suppose que l'île ne peut contenir plus de 1 000 lapins, la fonction g (en milliers de lapins) vérifie alors l'équation logistique $(E_2) y' = ay(1 - y)$, où $a = 0,05$.

a. On pose $z = \frac{1}{y}$. Montrer que l'équation (E_2) équivaut à $z' + az = a$. (E_3)

b. Résoudre l'équation différentielle (E_3) , et montrer que $g(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-0,05t}}$.

c. Étudier g sur $[0; +\infty[$ et représenter g dans le plan : on obtient la courbe logistique.

PARCOURS 4 D'autres équations différentielles

154 Une équation différentielle à variables séparables

Un problème géométrique : « Existe-t-il une fonction f non nulle telle que, en tout point de sa courbe représentative $\mathcal{C}$, la pente de la tangente soit égale au carré de l'ordonnée de ce point ? »

a. Montrer que, si f existe, alors f est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$ (1).

b. De quelle fonction $\frac{y'}{y^2}$ est-elle la dérivée sur un intervalle I où y ne s'annule pas ? En déduire que l'équation (1) équivaut sur I à : $y = \frac{-1}{x + C}$, où C est un réel. Préciser l'intervalle I .

c. Conclure. Donner la fonction f telle que $f(0) = 1$ et la représenter dans le plan.

d. **Application :** existe-t-il une fonction telle que, en tout point de sa courbe représentative $\mathcal{C}$, la pente de la tangente soit égale à l'inverse de l'ordonnée de ce point ?

155 Une équation différentielle du second ordre

On se propose de résoudre l'équation différentielle du second ordre $y'' + y = 0$.

Soit E l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $(D) y'' + y = 0$.

a. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \cos(x)$ est une solution de (D) .

b. Montrer que, si f est une solution de (D) , alors pour tout réel x : $[f'(x)]^2 + [f(x)]^2$ est constant.

c. Soit f une fonction de E , et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - f(0) \cos(x) - f'(0) \sin(x)$. Montrer que la fonction g appartient à E .

d. Montrer que $g(0) = 0$ et que $g'(0) = 0$. En déduire que, pour tout réel x : $g(x) = 0$.

e. En déduire que toute fonction de E s'écrit : $f(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$, avec A et B réels.

f. Quelle est la solution h de (D) telle $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$?

Piste b. : Calculer la dérivée de la fonction h telle que : $h(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$

MATHS & PHYSIQUE

156 Loi de refroidissement de Newton

À l'instant $t = 0$ (exprimé en heures), un corps dont la température est de 100°C est placé dans une salle à 20°C .

On désigne par $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t . D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle de la salle.

Le coefficient de refroidissement est égal ici à $-2,08$.

1. Expliquer pourquoi $\theta'(t) = -2,08 (\theta(t) - 20)$.
2. En déduire l'expression de $\theta(t)$.
3. a. Étudier le sens de variation de la fonction θ sur $[0; +\infty[$.
b. Déterminer la limite en $+\infty$ de θ et l'interpréter.
c. Tracer la courbe représentative de θ .
4. Déterminer la température du corps, arrondie au degré, au bout de 20 minutes, puis au bout de 30 minutes.
5. Déterminer une valeur approchée du temps au bout duquel la température tombera à 30° .

MATHS & SVT

157 Évolution d'une population de pandas

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population de pandas roux qui semble en voie de disparition.

En 2020, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est 1 000.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2020).



D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : (E) : $y' = -\frac{1}{20} y (3 - \ln(y))$.

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f , dérivable, strictement positive sur $[0; +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t) (3 - \ln(f(t)))$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0; +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$.
2. Résoudre l'équation différentielle (H) :

$$z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire l'expression de la fonction f .
4. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 20 individus ?

158 CHERCHER RASONNER

Famille de fonctions liées à une propriété différentielle

Dans un plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, f et f' ne s'annulant pas sur I .

On note M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point M .

1. a. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en M .
b. Montrer que T coupe l'axe des ordonnées en un point N d'ordonnée $y_N = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.
2. Soit k un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $f(x_0) - y_N$ est constante et égale à k , pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
a. Montrer que f vérifie la condition posée si et seulement si f vérifie l'équation différentielle : $y' = \frac{k}{x}$.
b. En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété donnée et déterminer pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie $f(1) = 0$.

159 RASONNER CHERCHER

Histoire des mathématiques

Un texte de Jean le Rond d'Alembert

Dans l'Encyclopédie on trouve un exemple de résolution d'une équation différentielle de la forme $y' = f$.

TRANSCENDANTES, (Équations) sont celles qui ne renferment point, comme les équations algébriques, des quantités finies, mais des différentielles ou fluxions de quantités finies, bien entendu que ces équations entre les différentielles, doivent être telles qu'elles ne puissent se réduire à une équation algébrique.

Par exemple, l'équation $dy = \frac{xdx}{\sqrt{ax + xx}}$ qui paraît être une équation transcendante, est réellement une équation algébrique, parce qu'en intégrant séparément les deux membres, on a $y = \sqrt{ax + xx}$. Mais l'équation $dy = \frac{dx}{\sqrt{ax + xx}}$ est une équation transcendante, parce qu'on ne peut exprimer, en termes finis, les intégrales de chaque membre de cette équation.

1. a. Écrire cette équation avec les notations actuelles.
b. Justifier la solution trouvée par d'Alembert.
2. Il donne une autre équation qu'il nomme « transcendante » car il ne peut pas la résoudre. Quelle est cette équation ?

Point Histoire

L'Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des arts et des sciences, éditée de 1751 à 1772 sous la direction de Diderot et d'Alembert est la première encyclopédie française.

160 Une équation différentielle bizarre

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (C) : $f(-x) f'(x) = 1$ pour tout réel x et $f(0) = -4$, et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

- Montrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- Calculer la dérivée de la fonction g .
- En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
- Montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{16}y$ et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2. Déterminer la solution de (E) prenant la valeur -4 en 0.

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser cette fonction.

Piste 3. : Ne pas oublier la réciproque.

161 Une équation fonctionnelle

On appelle E l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et telles que, quels que soient les réels strictement positifs a et b : $f(ab) = af(b) + bf(a)$.

On note f_1 la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_1(x) = x \ln(x)$.

1. Montrer que toute fonction de la forme kf_1 , où k est un réel, appartient à E .

2. Montrer que, si f appartient à E , alors $f(1) = 0$.

3. a. Montrer que, si f appartient à E , alors pour tout réel x de $]0; +\infty[$: $xf'(x) - f(x) = xf'(1)$.

b. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Calculer $g'(x)$. En déduire $g(x)$, puis $f(x)$ pour tout réel strictement positif x .

c. En déduire que, si f appartient à E , alors f est de la forme kf_1 , où k est un réel.

4. Conclure.

Piste 3.a. : Écrire la relation de l'énoncé avec $a = x$ et $b = y$. Dériver par rapport à y puis remplacer y par 1.

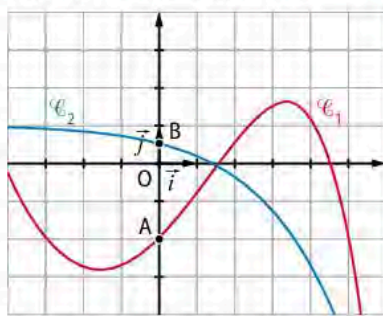
162 Une dérivée et une primitive sur le même graphique

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous, où a et b désignent deux réels.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	b	$-\infty$

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\frac{1}{2}$ respectivement.



L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f' . Justifier la réponse.

b. À l'aide des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, prouver que :

$$1 < a < 2 \text{ et } b > 0.$$

3. Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que, pour tout réel x , $f(x) - 2f'(x) = x$.

a. Déterminer une fonction affine g telle que, pour tout réel x : $g(x) - 2g'(x) = x$.

b. En déduire l'existence d'un réel k tel que, pour tout réel x :

$$f(x) = k e^{\frac{1}{2}x} + x + 2.$$

c. En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F , ainsi que les réels a et b .

MATHS & PHYSIQUE

163

RAISONNER

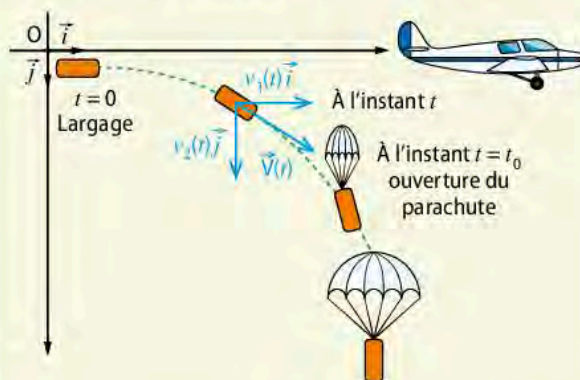
CALCULER

Largage d'un container

On lance un container à partir d'un avion. On cherche à déterminer l'instant en lequel sa vitesse est minimale pour pouvoir déclencher l'ouverture du parachute.

L'unité de temps est la seconde et l'unité de longueur est le mètre. On va étudier la position du centre de gravité G du container dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, où O est le point de largage et l'axe $(O; \vec{j})$ étant dirigé vers le sol. À chaque instant t , le point G admet un vecteur vitesse $\vec{V}$ de coordonnées $v_1(t)$ et $v_2(t)$; v_1 et v_2 sont deux fonctions du temps définies sur $[0; +\infty[$.

Sachant que le container est soumis à son poids et à la résistance de l'air, on a établi que la fonction v_1 vérifie l'équation différentielle : $v' + 0,2v = 0$, et que la fonction v_2 vérifie l'équation différentielle : $v' + 0,2v = 9,8$.



1. Déterminer $v_1(t)$, sachant que, pour $t=0$, on a $v_1(0) = 100$.

2. Déterminer $v_2(t)$, sachant que, pour $t=0$, on a $v_2(0) = 0$.

3. a. Montrer que le carré de la norme du vecteur $\vec{V}$ à l'instant t ($t \geq 0$) est donnée par :

$$f(t) = 12\,401e^{-0,4t} - 4\,802e^{-0,2t} + 2\,401,$$

où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

b. Déterminer $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.

c. Calculer $f'(t)$, et en déduire les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

d. En déduire les variations de la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(t) = \sqrt{f(t)}$.

e. En déduire à 10^{-2} près l'instant t_0 pour lequel $h(t)$ est minimum.

Déterminer la valeur de ce minimum à 10^{-2} près.

MATHS & PHYSIQUE

164 Une équation différentielle du second ordre

1. Soit l'équation différentielle du second ordre (E) : $y'' - k^2y = 0$, où k est un réel donné.

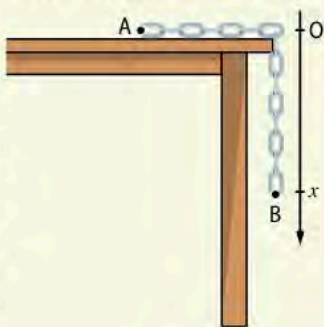
a. Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{kx}$ est une solution de (E).

b. On va chercher les solutions de (E) sous la forme $f(x) = g(x)e^{kx}$, où g est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x : $g''(x) + 2kg'(x) = 0$.

c. En déduire $g'(x)$, puis $g(x)$ pour tout réel x .

d. Montrer que la solution générale de (E) est de la forme : $f(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, où A et B sont des constantes réelles.

2. Application. Une chaîne sans raideur de longueur un mètre repose sur le bord d'une table. Elle est maintenue à son extrémité A tandis que l'extrémité B est à 20 cm du plan de la table. À l'instant $t = 0$, on abandonne la chaîne sans vitesse initiale.



On note $x(t)$ l'abscisse du point B à l'instant t (en secondes) sur l'axe (Ox) défini ci-dessus. On admet que la fonction x vérifie l'équation différentielle : $x'' - 9,81x = 0$.

a. Donner la solution générale de cette équation.

b. Déterminer l'abscisse x en fonction du temps, en tenant compte des conditions initiales.

c. À quel instant la chaîne quitte-t-elle la table ?

165 Propagation d'une rumeur

Une ville compte 10 000 habitants. À 8 heures du matin, 100 personnes apprennent la nouvelle.

On note $f(t)$ la fréquence des personnes connaissant la rumeur à l'instant t , exprimé en heures. On choisit 8 heures comme instant initial $t = 0$. La nouvelle se répand dans la ville de sorte que la vitesse de propagation



$f'(t)$ est proportionnelle à la fréquence de ceux qui connaissent la nouvelle et à la fréquence de ceux qui ne la connaissent pas. On admet que le coefficient de proportionnalité est 1,15.

1. Montrer que la fonction f est la solution de l'équation différentielle $y' = 1,15y(1 - y)$ telle que $f(0) = 0,01$ et définie sur $[0; +\infty[$.

2. On suppose que $f(t)$ ne s'annule pas. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

a. Montrer que la fonction g vérifie l'équation différentielle : $g' = -1,15g + 1,15$.

b. En déduire l'expression de $g(t)$, puis de $f(t)$.

3. a. Étudier le sens de variation de la fonction f . Quelle est la limite de f en $+\infty$?

b. Combien de personnes connaissent la nouvelle à midi ?

c. Donner une approximation à 0,01 près de l'instant en lequel 99 % de la population connaîtra la rumeur.

TRAVAIL EN GROUPE

166 Histoire des mathématiques

Une des premières apparitions des équations différentielles remonte à l'année 1638 quand Florimond de Beaune (1601-1652) propose le problème suivant :

« Trouver une courbe $y(x)$ pour laquelle en chaque point P, le segment délimité par les points de concours avec l'axe des x de la tangente PT et de la perpendiculaire PN à ce même axe soit constant. »

Faire un exposé sur la résolution de ce problème.

167 La loi de Benjamin Gompertz (1779-1865) énonce que la vitesse de croissance du volume d'une tumeur est proportionnelle au produit du volume par une fonction exponentielle décroissante.

Étudier cette loi et faire un exposé sur le modèle ainsi défini.

Prise d'initiatives

168 On se place dans un repère orthonormé.

Déterminer toutes les courbes telles que la tangente en un point quelconque M de la courbe coupe l'axe des abscisses en un point N tel que le milieu du segment [MN] appartienne à l'axe des ordonnées.

169 Calculer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{-2x} + 2}{e^{-2x} + 1}$.

170 Résoudre l'équation différentielle $y' - y = xy^3$ à l'aide du changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y^2}$.

171 Soit f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par $f(0) = 0$ et, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit g la fonction définie sur $] -\pi; 0[$ par $g(x) = f(\cos(x))$. Exprimer $g(x)$ en fonction de x .

TP1 Équation $y' = f$ par la méthode d'Euler avec Python

RAISONNER

REPRÉSENTER

A Méthode d'Euler

On considère l'équation différentielle $y' = (x+1)e^x$ sur l'intervalle $[0; 1]$: cette équation admet des solutions car la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^x$ admet des primitives sur $[0; 1]$.

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la solution g de cette équation vérifiant la condition initiale $g(0) = 0,1$.

On se propose de construire une représentation graphique approchée sur l'intervalle $[0; 1]$ de la solution, en utilisant la **méthode d'Euler**.

Pour cela, on va définir une suite de points A_n qui approchent la courbe $\mathcal{C}$: celle-ci sera « approchée » par la ligne brisée $A_0A_1 \dots A_{10}$.

Le premier point est $A_0(0; 0,1)$.

Puis on partage l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalles de même amplitude et on va définir les points d'abscisses $x_0 = 0; x_1 = 0,1; \dots; x_{10} = 1$.

On passe d'une abscisse à la suivante avec un pas constant $h = 0,1$.

On trace la tangente T_0 en A_0 à la courbe $\mathcal{C}$ et on place le point A_1 d'abscisse x_1 de T_0 . Ce point est une approximation du point M_1 de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x_1 , car la tangente est « proche » de la courbe.

1. Montrer qu'une équation de T_0 s'écrit $y = x + 0,1$, et que le point A_1 a pour ordonnée $y_1 = 0,2$.

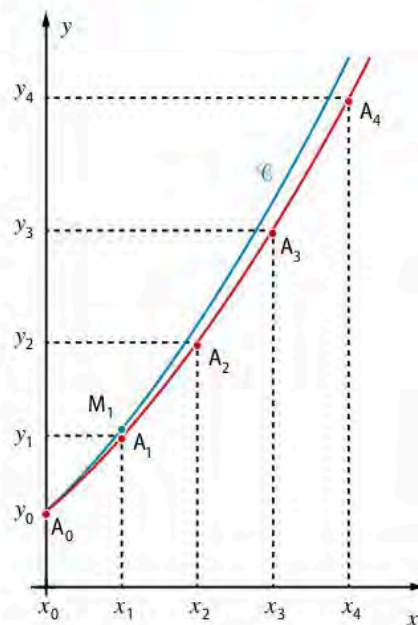
2. On nomme d_1 la droite passant par A_1 et de coefficient directeur $g'(x_1)$: cette droite est parallèle à la tangente au point M_1 de $\mathcal{C}$, et elle est encore « proche » de $\mathcal{C}$.

a. Montrer que T_1 a pour équation $y = y_1 + (x - x_1)g'(x_1)$, ou encore $y = y_1 + (x - x_1)f(x_1)$.

b. Montrer que $y_2 = y_1 + hf(x_1)$.

3. En réitérant le procédé, on obtient les ordonnées des points A_n .

Montrer que $y_{n+1} = y_n + hf(x_n)$.



Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

B Programmation en Python

On donne le programme ci-contre.

1. a. Quel est le rôle de la fonction `fon` ?

b. Le programme définit deux listes `Lx` et `Ly`.

Que contiennent ces deux listes en fin de programme ?

c. Justifier la ligne 9.

d. Exécuter ce programme.

2. Modifier ce programme en prenant pour paramètres de la fonction `euler` les variables `x0`, `y0`, `xf` et `n`, dans le cas d'une condition initiale $g(x_0) = y_0$, d'un intervalle de résolution $[x_0; x_f]$ et du nombre n d'intervalles de même amplitude qui partagent l'intervalle $[x_0; x_f]$.

```
1 from math import exp
2 def fon(x):
3     return((x+1)*exp(x))
4
5 def euler():
6     x=0; Lx=[x]
7     y=0.1; Ly=[y]
8     h=0.1
9     for i in range(1,11):
10        y=y+h*fon(x)
11        x=x+h
12        Lx.append(x)
13        Ly.append(y)
14    return(Lx, Ly)
```

C Représentation graphique avec Python

Pour représenter la liste de points obtenue, on doit d'abord importer la bibliothèque **matplotlib** avec l'instruction `import matplotlib.pyplot as plt` placée avant le script des deux fonctions.

Puis on remplace l'instruction `return(Lx, Ly)` par les instructions ci-contre :

`plot` génère la ligne brisée reliant les points dont les abscisses sont dans la liste `Lx` et les ordonnées dans la liste `Ly`,

`grid` génère le quadrillage

`show` affiche la figure à l'écran.

Afficher le nuage de points obtenu sur $[0; 3]$ avec la condition initiale $g(0) = 2$ et $n = 100$.

```
15 plt.plot(Lx, Ly)
16 plt.grid()
17 plt.show()
```


TP2 Équation $y' = ay + b$ par la méthode d'Euler avec Python

PYTHON



MODÉLISER



CALCULER

On utilise la partie **A** du TP1 et on en reprend les notations.

On considère l'équation différentielle $y' = 2y - 4$. On va déterminer la solution g de cette équation telle que $g(0) = 1$ de façon approchée par la méthode d'Euler. Les points A_n qui vont approcher la courbe représentative de g sont définis comme suit :

A_0 a pour coordonnées $(0; 1)$, puis pour $n \geq 0$, le point A_{n+1} est le point d'abscisse x_{n+1} de la droite d_n passant par A_n et de pente $g'(x_n)$.

D'après l'équation différentielle, $g'(x_n) = 2g(x_n) - 4$. On remplace alors $g(x_n)$ par son approximation y_n .

1. a. Montrer que la droite d_n a pour équation $y = y_n + (2y_n - 4)(x - x_n)$.

b. En déduire que : $y_{n+1} = y_n + h(2y_n - 4)$.

2. Modifier le programme Python du TP1 avec une fonction de paramètres x_0 , y_0 , x_f , a , b et n et qui renvoie les listes Lx et Ly .

3. a. En déduire la résolution approchée de l'équation donnée avec $n = 50$.

b. Compléter ce programme pour faire afficher la courbe solution de l'équation différentielle donnée.

```
1 def eulerpremierordre(x0,y0,xf,a,b,n):
2     x=x0; Lx=[x0]
3     y=y0; Ly=[y0]
4     h=(xf-x0)/n
```

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

TP3 Équations $y' = f$ et $y' = ay + b$ par la méthode d'Euler avec un tableur

TABLEUR

REPRÉSENTER

CALCULER

On utilise la partie **A** du TP1 et on en reprend les notations.

A Équation $y' = f$

On peut résoudre l'équation différentielle $y' = (x+1)e^x$ de façon approchée avec un tableur en utilisant la formule de récurrence vue dans la question A.3 du TP1.

1. Saisir les valeurs de x_0 , y_0 , x_f et n dans la plage de cellules **B1:B4** et calculer le pas h en **B5**.

2. Les colonnes **D** et **E** vont respectivement contenir les valeurs x_n et y_n . Compléter les cellules **D2** et **E2**, puis saisir en **D3** et **E3** les formules qui permettront le calcul des réels x_n et y_n par recopie vers le bas.

3. Représenter les points obtenus avec le type de graphique « Nuage de points ».

	A	B	C	D	E
1	x_0	0		x_i	y_i
2	y_0	0,1		0	0,1
3	x_f	1		0,01	0,11
4	n	100		0,02	0,120202
5	h	0,01		0,03	0,130608
6				0,04	0,141221

B Équation $y' = ay + b$

1. Saisir les valeurs de x_0 , y_0 , x_f , a , b et n dans la plage de cellules **B1:B6** et calculer le pas h en **B7**.

2. Utiliser la formule de récurrence vue dans le TP2 (question 1.b) pour faire afficher les coordonnées des points A_n dans les colonnes **D** et **E** d'une feuille de calcul.

TP4 Calcul formel pour les primitives et les équations différentielles

FORMEL

CALCULER

A Avec Xcas

On peut calculer une primitive avec la commande **int**.

On peut résoudre des équations différentielles avec la commande **desolve**.

<code>int(x^2)</code>	<code>desolve(x*y'+y=x)</code>
$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^2 + 2^*c_0}{2^*x}$
M	M

B Avec GeoGebra

On peut calculer une primitive avec la commande **Intégrale**: par exemple **Intégrale**[x^2].

On peut déterminer une solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 3$ avec l'instruction **RésolEquaDiff**[2^*y+3].

C Applications

1. Déterminer avec un logiciel de calcul formel une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^3 \ln(x)$ **b.** $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - x - 6}$ **c.** $h(x) = (x+1)e^x$ **d.** $j(x) = (\sin(x))^4$ **e.** $k(x) = (x+2)\ln(x-1)$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' = 2y + x^2$ **b.** $y' + 3y = xe^x$ **c.** $y' + xy = 2x$ **d.** $4y' + y^2 = 1$

Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 130, 166, 167

Question

Comment les mathématiques permettent-elles de modéliser l'évolution d'une population ?

Enjeu de la question

L'évolution démographique est un enjeu important pour les politiques publiques. Être capable d'anticiper l'évolution de la population ou son vieillissement permet d'orienter les décisions politiques.



Plan possible

1. Les modèles d'évolution, discrets ou continus
2. Le modèle de Malthus
3. Le modèle de Verhulst
4. Le modèle de Volterra
5. Conclusion (limites des modèles et avantages)

Les mots-clés

- Modèle continu • Modèle discret
- Suites • Limites • Fonction exponentielle
- Équations différentielles

Support de présentation possible

• Malthus (1766–1864)

Il suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population (modèle non réaliste).

$$f(t) = ke^{at} \text{ ou bien } u_n = C\alpha^n.$$

• Verhulst (1804–1849)

Il précise le modèle de Malthus : la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population et aussi à la capacité d'accueil encore disponible pour cette population.

$$g(t) = \frac{1}{1 + be^{-ct}} \text{ ou bien } u_{n+1} = u_n + au_n \left(1 - \frac{u_n}{k}\right)$$

• Volterra (1860–1940)

Modèle proie-prédateur.

$$\text{Système : } \begin{cases} x_{n+1} = ax_n - bx_n y_n \\ y_{n+1} = cy_n - dx_n y_n \end{cases}$$

Questions d'approfondissement possibles

Expliquer ce qu'on entend par malthusianisme et son lien avec le modèle de Malthus.

Comment étudie-t-on les suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$?

Quels sont les différents types d'équations différentielles que vous connaissez ? Et comment les résout-on ?

Expliquer comment on peut programmer le modèle de Volterra avec un tableur.

Poursuite d'études et projet professionnel

• Pourquoi étudier les équations différentielles ?

De nombreux phénomènes physiques, biologiques ou sociétaux sont modélisés par ce type d'équations fonctionnelles.

• Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude des équations différentielles est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : classes préparatoires, licences scientifiques, IUT scientifiques, écoles d'ingénieur, école de commerce.

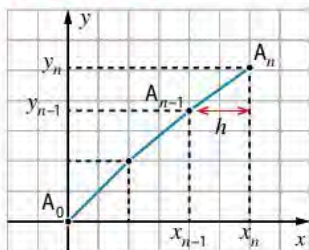
• Un exemple de métier ?

Le (la) **statisticien(ne)** effectue un traitement mathématique et statistique de données, simule des procédés, crée des outils de modélisation, anticipe, repère et planifie les tendances et les fluctuations futures.

Il (elle) peut intervenir dans la finance, la banque, la grande distribution, l'industrie pharmaceutique, l'énergie, la santé...

Cette page fait le point sur les capacités relatives à l'algorithmique et à la programmation, liées à ce chapitre, qui peuvent être demandées au Bac.

UN EXEMPLE



On donne ci-contre un programme Python qui permet la résolution approchée d'une équation différentielle de la forme $y' = f$, avec $f'(0) = 0$.

L'expression de la fonction f est obtenue par appel de la fonction `fon`.

Le programme calcule successivement les coordonnées des points $A_n(x_n; y_n)$, stockées dans les variables x et y .

La ligne brisée reliant les points A_n fournit une approximation de la courbe de la fonction solution g .

Pour $n \geq 1$, le point A_n est obtenu comme le point d'abscisse x_n de la droite issue de A_{n-1} et de pente $g'(x_{n-1})$; son ordonnée vérifie :

$$y_n = y_{n-1} + h g'(x_{n-1}).$$

```
def fon(x):
    return(1/(x**2+1))

def eul(n):
    x=0; Lx=[0]
    y=0; Ly=[0]
    h=1/n
    for i in range(1,n+1):
        y=y+h*fon(x)
        x=x+h
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    return(Lx, Ly)
```

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

LES QUESTIONS QUI PEUVENT ÊTRE POSÉES LE JOUR DU BAC

RÉPONSES

Comprendre un programme

1. Quelle est la fonction f ?

1. La fonction f est définie dans le script de la fonction `fon` : c'est donc la fonction numérique telle que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

2. a. Quel est le premier point obtenu ?
b. Combien de points comprendra la ligne brisée ?
c. Sur quel intervalle est-elle représentée ?

2. a. Le premier point est défini par ses coordonnées lignes 5 et 6 : c'est le point A_0 de coordonnées $(0; 0)$.
b. La ligne brisée contient le point A_0 , puis les points dont on calcule les coordonnées dans la boucle `for` : i prend n valeurs, donc il y a n points dans cette boucle. Il y a donc $n + 1$ points au total.
c. La ligne brisée est représentée sur l'intervalle $[0; 1]$, puisque $x_0 = 0$ et $x_n = 1$.

Comprendre une instruction du programme

3. Expliquer le calcul fait à la ligne 9.

3. L'instruction `y=y+h*fon(x)` traduit la formule $y_n = y_{n-1} + h g'(x_{n-1})$: d'après l'équation différentielle, $g'(x_{n-1})$ est égal à $f(x_{n-1})$, et la valeur de x est celle calculée à l'étape précédente.

Exécuter un programme

4. Quelle liste obtient-on lors de l'appel `eul(4)` ?

Méthode

Il est pratique de faire un tableau contenant les valeurs prises par les variables au cours des différents passages dans la boucle.

4. Avec cet appel, h est égal à $\frac{1}{4} = 0,25$.

On peut faire un tableau (valeurs de y arrondies à 10^{-3}) :

i		1	2	3	4
x	0	0,25	0,5	0,75	1
y	0	0,25	0,485	0,645	0,805

On obtient donc les listes : $[0; 0,25; 0,5; 0,75; 1]$ et $[0; 0,25; 0,485; 0,645; 0,805]$.

Modifier un programme

5. a. Modifier ce programme afin qu'il donne une approximation de la solution sur $[0; a]$, avec $a > 0$.
b. Modifier ce programme afin qu'il donne une approximation de la solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

5. a. Il suffit de changer la ligne 7 avec l'instruction `h=a/n`.

Après n itérations, le point obtenu aura alors pour abscisse a .

b. On doit calculer les valeurs de x_n à partir de 0 avec la relation $x_n = x_{n-1} - h$ avec $h > 0$.

On modifie les lignes 9 et 10 de la façon suivante :

```
y=y-h*fon(x)
x=x-h
```


THÈMES

- Équations différentielles
- $y' = ay$ et $y' = ay + b$
- Fonction exponentielle

ÉNONCÉ MODÉLISER CALCULER

Dans tout l'exercice, l'unité de population est la centaine d'individus et l'unité de temps est l'année.

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs.

La taille de la population à l'instant t est notée $g(t)$, ce qui définit une fonction g de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Le modèle utilisé consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) : $y' = \frac{y}{4}$.

- Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
 - Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs.
 - Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?
- 2.** En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs.

On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants à l'instant t dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) \quad u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \text{ pour tout réel } t \geq 0 \text{ et } u(0) = 1.$$

- On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E_3) : $h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}$ pour tout réel $t \geq 0$ et $h(0) = 1$.
- En déduire l'expression de h , puis celle de u .
- Comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ
ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. a. On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$, avec $a = \frac{1}{4}$. 

b. On doit déterminer la constante C de la solution générale de l'équation.

2. a. Montrer en raisonnant par équivalence que

$$u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12}$$

$$\text{équivaut à } h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12},$$

puis montrer que $u(0) = 1$ équivaut à $h(0) = 1$.

b. D'après (E_2) , h est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$. Commencer par déterminer la solution particulière constante de cette équation, puis appliquer le théorème du cours.



SOLUTION COMMENTÉE

1. a. La solution générale de cette équation est : $y = Ce^{\frac{1}{4}t}$, avec C réel quelconque.

b. D'après la question **1. a.**, $g(t) = Ce^{\frac{1}{4}t}$.

Puisque $g(0) = 1$, on en déduit : $Ce^0 = 1$, soit $C = 1$. Ainsi : $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$.

c. La population dépasse 3 centaines de rongeurs si et seulement si $g(t) > 3$, soit $e^{\frac{1}{4}t} > 3$. Ceci équivaut à $\frac{1}{4}t > \ln 3$, soit à $t > 4 \ln 3$.

Puisque $4 \ln 3 \approx 4,4$, la population dépassera 300 rongeurs au bout de 5 ans.

2. a. Puisque $h = \frac{1}{u}$, on a $u = \frac{1}{h}$ et donc $u' = -\frac{h'}{h^2}$.

$$\text{Pour } t \geq 0 : u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \text{ équivaut à } -\frac{h'(t)}{h(t)^2} = \frac{1}{4h(t)} - \frac{1}{12h(t)^2},$$

$$\text{soit } -h'(t) = \frac{h(t)^2}{4h(t)} - \frac{h(t)^2}{12h(t)^2}, \text{ ce qui équivaut à } h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}.$$

De plus, $u(0) = 1$ équivaut à $\frac{1}{u(0)} = 1$, soit à $h(0) = 1$.

On a bien démontré que les conditions (E_2) et (E_3) sont équivalentes.

b. On cherche la solution particulière constante h_0 de l'équation $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$: si $h_0(x) = a$, $h_0'(x) = 0$ et $-\frac{1}{4}a + \frac{1}{12} = 0$, soit $a = \frac{1}{3}$.

L'équation $y' = -\frac{1}{4}y$ pour solution générale $y = ke^{-\frac{1}{4}t}$, donc l'équation $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ a pour solution $y = ke^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$, avec k réel. Puisque $h(0) = 1$, on a : $k + \frac{1}{3} = 1$, soit

$$k = \frac{2}{3}. \text{ D'où : } h(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3} \text{ et } u(t) = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2e^{-\frac{1}{4}t} + 1}.$$

c. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{4}t} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, d'où : $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 3$

La taille de la population tend vers 300 individus quand t tend vers $+\infty$.

Sujet A 45 min MODÉLISER CALCULER**THÈMES** • Équation différentielle $y' = ay + b$

- Primitives d'une fonction
- Fonction exponentielle

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacité 6 p. 301

Question 2. ► Capacité 3 p. 299

Question 3. ► Chapitre 5, capacité 3 p. 169

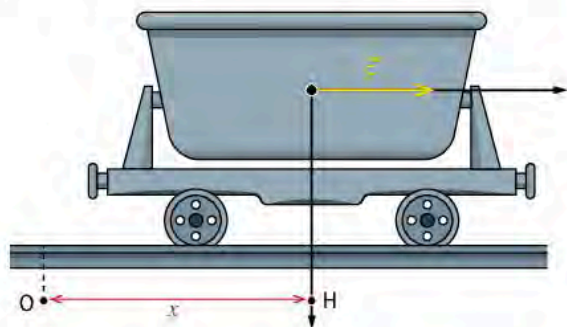
Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante F de valeur 50 N.

Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraires : le coefficient de proportionnalité a pour valeur $25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

La position du chariot est repérée par la distance x , en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t , exprimé en secondes.

On prendra t dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) $25x' + 200x'' = 50$, où x' est la dérivée de x par rapport au temps t , et x'' la dérivée seconde de x par rapport au temps t .



1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t (on rappelle que $v(t) = x'(t)$).

Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) :

$$v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}.$$

Résoudre l'équation différentielle (F).

2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a. Donner l'expression de $x'(t)$ en fonction de t .

b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif,

$$x(t) = 2t - 16 + 16e^{-\frac{t}{8}}.$$

3. a. Calculer $V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$.

b. Pour quelle valeur de t , la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à la seconde près.

4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Sujet B 60 min CALCULER RAISONNER**THÈMES** • Calculs de dérivées

- Équation différentielle $y' = ay$
- Fonction exponentielle

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 2. ► Chapitre 5, capacité 2 p. 167

Question 3. ► Capacité 5 p. 301

On cherche s'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Pour tout nombre réel x , $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$.

(2) $f'(0) = 1$.

(3) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité (1), démontrer que : (4) pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c. En déduire les fonctions u et v .

d. En déduire que pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Sujet C 40 min

CHERCHER REPRÉSENTER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL

**THÈMES** • Équation différentielle $y' = ay + f$

- Fonction exponentielle

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 3. ► Capacité 7 p. 301

Question 4. ► Chapitre 5, capacité 2 p. 167

On veut déterminer une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa courbe représentative dans le plan vérifie la condition suivante : « en chacun de ses points, la pente de la tangente est égale au double de la somme des coordonnées du point ».

1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle (E) :

$$y' = 2y + 2x.$$

2. Déterminer une fonction affine solution particulière de (E).

3. En déduire toutes les fonctions solutions du problème posé.

4. Soit g la solution du problème dont la courbe passe par le point $A(0; \frac{1}{2})$.

a. Déterminer l'expression de g .

b. Étudier les variations de g , ainsi que ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Représenter graphiquement g dans le plan.

Sujet D 40 min



MODÉLISER

CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Équation différentielle $y' = ay$
• Fonction exponentielle

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Question 1. ► Capacité 5 p. 301

Question 5. ► Chapitre 5, capacité 4 p. 169

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 provenant des rayons cosmiques, qui est constamment renouvelé et qui se maintient à la valeur de 15,3 unités. À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

On note $f(t)$ la concentration en carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années).

On admet que f est une solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,124y$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 15,3$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
4. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 égale à 7,27 unités. Justifier que l'on peut estimer l'âge de ces fragments d'os à 6 000 ans.
5. Quand la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14. Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

Sujet E 60 min



PYTHON



CALCULER



RAISONNER

THÈMES • Équation différentielle $y' = ay + f$
• Algorithmique et programmation

CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE

Question 2. ► Capacité 7 p. 301

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 milligramme (mg) de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang.

On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures depuis la prise du médicament ($t \geq 0$).

On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. Déterminer le réel a pour que la fonction u définie par $u(t) = a(t)e^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de (E).

2. a. Déterminer la fonction g , sachant qu'à l'instant $t = 0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle.
b. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

3. On donne le programme Python ci-dessous.

```
def prog():
    n=3
    while g(n)>0.1:
        n=n+1
    return(n)
```

- a. Justifier que ce programme renvoie une valeur avec l'appel `prog()`.
- b. Quelle est la valeur obtenue ?
- c. L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 heures.
À quelle question ce programme permet-il de répondre ?

Sujet F 40 min



CHERCHER



RAISONNER

THÈMES • Primitives d'une fonction
• Équation différentielle $y' = ay + b$

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions 1, 3, et 4. ► Capacité 6 p. 301

Question 2. ► Capacité 2 p. 297

Question 5. ► Capacité 1 p. 297

VRAI/FAUX

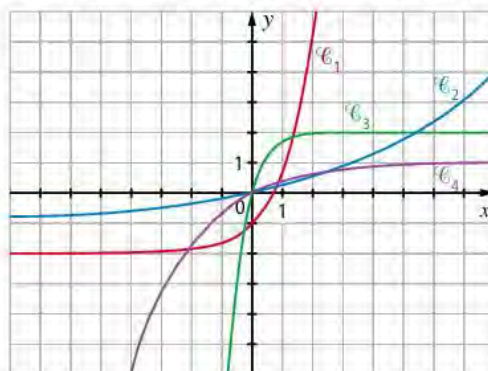
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' + 3y = 6$, alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.
2. Soit les fonctions f et F définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x} \text{ et } F(x) = 1 + \frac{\ln(x^2+2x)}{2}.$$

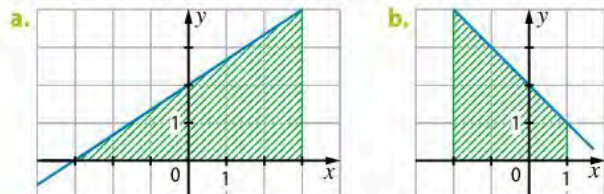
La fonction F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

3. Soit g une fonction positive sur $\mathbb{R}$. Si g est solution de l'équation $y' - 2y - 1 = 0$, alors g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. L'équation différentielle $xy' - y = x + 1$ admet une fonction affine solution.
5. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, la courbe représentative de la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$ est la courbe $\mathcal{C}_3$.



Calculer l'aire de certaines surfaces

1 Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm.
Dans chaque cas, calculer l'aire, en cm^2 , de la surface hachurée en vert.



Utiliser le nombre dérivé d'une fonction

2 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a un réel de I .
Rappeler la définition de « f est dérivable en a ».

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$.

- a. Calculer le taux de variation de g entre 3 et $3 + h$, où h est un réel non nul.
b. En déduire que g est dérivable en 3 et donner $g'(3)$.

3 VRAI/FAUX

f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- a. Si les fonctions f' et g' sont égales alors les fonctions f et g sont égales.
b. Si pour tout réel x , $f(x) - g(x) = 1$ alors les fonctions f' et g' sont égales.

Déterminer une primitive d'une fonction

4 1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = x^2 + 1$ b. $f(x) = 3e^{-2x}$ c. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

2. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

5 Déterminer la primitive F de la fonction f sur I vérifiant la condition indiquée.

- a. $f: x \mapsto xe^{x^2}$; $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$.
b. $f: x \mapsto \cos(x) \sin^3(x)$; $I = \mathbb{R}$ et $F(\pi) = 0$.
c. $f: x \mapsto \cos(3x)$; $I = \mathbb{R}$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

6 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 2)^2}$ et $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$.

Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

7 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 1$. Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

- a. $F(x) = 3x^3 + x - 1$ b. $F(x) = 18x$ c. $F(x) = 3x^3 + 1$ d. $F(x) = 3x^3 + x + 7$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$. Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

- a. $F(x) = e^{x^2}$ b. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ c. $F(x) = 2e^{2x}$ d. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$



Un des ponts les plus connus des randonneurs est sans doute la passerelle himalayenne. Il s'agit d'un ouvrage souple, suspendu par ses deux extrémités et qui pend librement à la façon d'une chaîne. Ce pont cache une courbe bien connue des mathématiciens : la chaînette.

Galilée (1564 – 1642) pensait qu'il s'agissait d'une parabole, mais Leibniz, Bernoulli, et Huygens ont montré en 1691 que ce n'était pas le cas. C'est le calcul intégral qui va permettre de calculer la longueur totale du câble entre les deux points fixes d'attachement.

LES NOTIONS DU CHAPITRE

Voir exercice 67 page 343

- Intégrale d'une fonction
- Méthode des rectangles
- Propriétés de l'intégrale
- Intégration par parties
- Calculs d'aires
- Valeur moyenne d'une fonction



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 333, 335, 337
Animations	pp. 328, 330
Corrigés détaillés	pp. 348, 349, 360, 361

Activité 1

Objectif

Introduire la notion d'intégrale comme aire sous une courbe.

Cours 1
Intégrale d'une fonction continue et positive

Fichier GeoGebra/ Cabri

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

Animation
Méthode
des rectangles

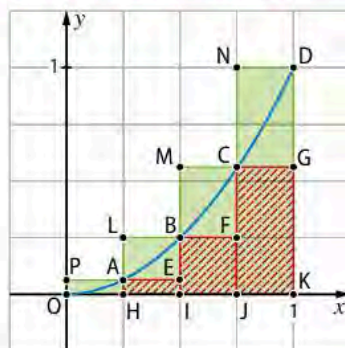


GÉOMÉTRIE Encadrer une aire par la méthode des rectangles

Dans un repère orthonormé d'origine O , $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction carré sur l'intervalle $[0; 1]$.

On note $\mathcal{S}$ la surface située sous la courbe $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

On veut déterminer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la surface $\mathcal{S}$.



1 On partage l'intervalle $[0; 1]$ en quatre intervalles de même amplitude puis on place les points A, B, C et D sur la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 0,25 ; 0,5 ; 0,75 et 1.

- Donner l'ordonnée du point A puis l'aire du rectangle AEIH.
- Calculer de même l'aire de chacun des rectangles BIJF et CJKG hachurés en rouge.
- Calculer l'aire de chacun des rectangles verts.
- En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ de la surface $\mathcal{S}$.

2 Recopier et compléter l'algorithme ci-contre dans lequel les variables u et v contiennent en sortie respectivement la somme des aires des rectangles hachurés en rouge et celle des rectangles verts.

3 Observer le graphique obtenu à l'aide du logiciel. Que se passe-t-il lorsqu'on augmente le nombre n de subdivisions de l'intervalle $[0; 1]$? Peut-on faire une conjecture sur la valeur de $\mathcal{A}$?

```

x ← 0
u ← 0
v ← 0
Pour k allant de 0 à 3
    u ← u + ...
    x ← x + ...
    v ← v + ...
Fin Pour
    
```

Activité 2

Objectif

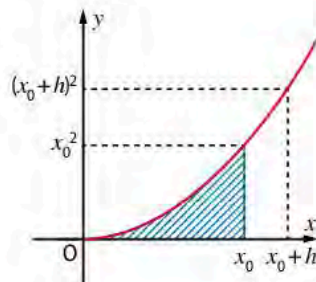
Introduire le théorème liant intégrale et dérivée.

Cours 2
Intégrale d'une fonction continue

Fonction aire

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = x^2$ et soit $\mathcal{P}$ l'arc de parabole la représentant.

On considère la fonction F qui à chaque réel x_0 de l'intervalle $[0; 1]$ associe l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{P}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$.



- Que peut-on dire de $F(0)$?
- Soit h un réel strictement positif tel que $x_0 + h$ appartient à $[0; 1]$.
 - Que représente graphiquement la différence $F(x_0 + h) - F(x_0)$?
 - Justifier que $hx_0^2 \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h(x_0 + h)^2$.
 - En déduire un encadrement du rapport $r(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$.
- Dans le cas où h est un réel strictement négatif tel que $x_0 + h$ appartient à $[0; 1]$, démontrer que $(x_0 + h)^2 \leq r(h) \leq x_0^2$.
- Déduire des encadrements précédents la limite de $r(h)$ lorsque h tend vers 0.
 - Que représente cette limite pour la fonction F ?
- Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $G(x) = \frac{1}{3}x^3$.
 - Vérifier que $F(0) = G(0)$.
 - Montrer que pour tout réel x_0 de $[0; 1]$, $F'(x_0) = G'(x_0)$ et en déduire que $F(x_0) = G(x_0)$.
 - Quelle est la valeur de l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{P}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$?

Activité 3

Objectif

Découvrir la notion de valeur moyenne d'une fonction.

Cours 4

Applications du calcul intégral

Fichier GeoGebra/ Cabri

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr



Aplanissement d'un terrain

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ par $f(x) = \frac{1}{50}(3x^3 - 11x^2 + x + 20)$.

On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan d'origine O .

1 a. Calculer l'intégrale de f entre 0 et 3.

b. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

2 La courbe $\mathcal{C}$, où x et $f(x)$ sont en décimètres, représente le profil d'un terrain avant des travaux d'aplanissement afin de créer une aire de jeu.

a. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ avec un logiciel et en utilisant la commande adéquate, faire apparaître la valeur de l'intégrale calculée précédemment.

b. Créer un curseur h et placer les points $A(3 ; 0)$, $B(3 ; h)$ et $C(0 ; h)$.

c. Tracer le rectangle $OABC$ et faire afficher son aire.

d. À l'aide du curseur, déterminer une valeur approchée de la hauteur h du terrain aplani.

3 Conjecturer une relation entre la valeur exacte de h et l'intégrale calculée dans la question 1.



Activité 4

Objectif

Utiliser le calcul intégral dans une situation concrète.

Cours 4

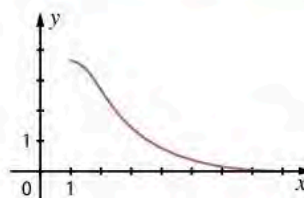
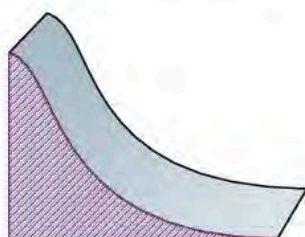
Applications du calcul intégral

Rampe de skate

Le gérant d'un centre de loisirs décide de faire installer une rampe de skate.

La figure de gauche ci-dessous donne un aperçu de cette rampe en perspective cavalière.

La figure de droite donne une représentation, dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre, du profil de la rampe par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par $f(x) = 10xe^{-x}$.



Le mur de soutènement de la rampe sera peint sur une seule face, hachurée sur la figure de gauche. Le gérant fait appel à Gaétan, animateur et artiste peintre dans son temps libre. Sur son devis, il demande un forfait de 300 euros auquel s'ajouteront 50 euros par mètre carré peint.

1 Exprimer l'aire de la surface hachurée à l'aide d'une intégrale.

2 Calculer cette intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

3 Quel est le montant du devis de Gaétan ? Arrondir le résultat à l'euro près.

1. Intégrale d'une fonction continue et positive

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; I, J)$ et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

Intégrale et aire sous une courbe

À noter

On convient que $\int_a^a f(x) dx = 0$.

À noter

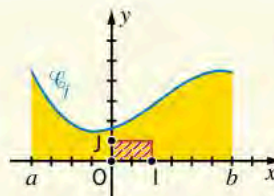
La variable x est dite muette et peut être remplacée par une autre lettre non utilisée pour les bornes d'intégration :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

DÉFINITIONS (1) On appelle **unité d'aire (u.a.)** l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

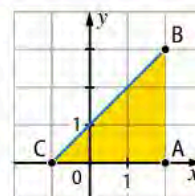
(2) Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On appelle **intégrale de a à b de f** l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Cette aire est également appelée « aire sous la courbe de f ».

Cette intégrale se note $\int_a^b f(x) dx$ et se lit « intégrale de a à b de f ». Les réels a et b sont appelés les **bornes d'intégration**.



EXEMPLE : La fonction f définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = x + 1$ est continue et positive. L'intégrale de f entre -1 et 2 est l'aire, en u.a., du triangle ABC avec $A(2; 0)$, $B(2; 3)$ et $C(-1; 0)$.

$$\text{Donc : } \int_{-1}^2 (x + 1) dx = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = 4,5.$$



Encadrement d'une intégrale par la méthode des rectangles

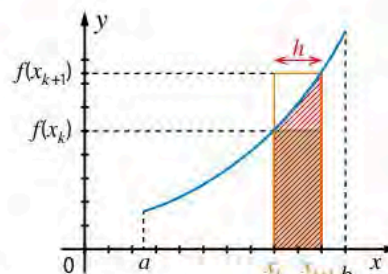
Pour déterminer un encadrement de l'intégrale d'une fonction continue, monotone et positive sur $[a; b]$, on peut partager

$[a; b]$ en n intervalles de même amplitude :

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Sur chacun de ces intervalles $[x_k; x_{k+1}]$, l'aire sous $\mathcal{C}_f$ est comprise entre l'aire de deux rectangles : l'un de hauteur $f(x_k)$ et d'aire $h \times f(x_k)$ et l'autre de hauteur $f(x_{k+1})$ et d'aire $h \times f(x_{k+1})$.

L'aire de la surface $\mathcal{S}$ sous $\mathcal{C}_f$ peut alors être encadrée par la somme u des aires des n rectangles contenus dans $\mathcal{S}$ et la somme v des aires des n rectangles contenant $\mathcal{S}$.



Point Histoire



La notation $\int$ est due au mathématicien allemand **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716).

Ce symbole est un S stylisé et illustre le fait que l'intégrale de la fonction peut être approchée par une somme d'aires de rectangles notée :

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i.$$

$f(x) dx$ correspond à l'aire d'un rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx .

$x \leftarrow a$	[1]
$u \leftarrow 0$	[2]
$v \leftarrow 0$	[3]
$h \leftarrow \frac{b-a}{n}$	[4]
Pour k allant de 1 à n	[5]
$u \leftarrow u + h \times f(x)$	[6]
$x \leftarrow x + h$	[7]
$v \leftarrow v + h \times f(x)$	[8]
Fin Pour	[9]

L'utilisation d'un algorithme permet alors d'obtenir en sortie cet encadrement, avec les variables u et v .

La ligne [1] traduit l'initialisation de la variable x par la valeur de la borne inférieure.

La ligne [4] donne l'amplitude des intervalles.

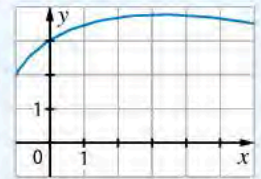
$(x_{k+1} - x_k = h)$

Chacune des lignes [6], [7] et [8] de la boucle « Pour » permet, pour chaque valeur de k , d'ajouter à u l'aire du rectangle « inférieur » suivant contenu dans $\mathcal{S}$ et à v l'aire du rectangle « supérieur » suivant contenant $\mathcal{S}$.

Cet algorithme est valable pour f croissante. Les lignes [6] et [8] seraient modifiées dans le cas où f est décroissante.

Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale

Soit f la fonction définie sur $I = [-1; 6]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée dans le repère orthonormé ci-contre.



- Donner le signe de f sur I puis interpréter graphiquement $\int_{-1}^6 f(x) dx$.
- Estimer, à une unité près, la valeur de $\int_{-1}^0 f(x) dx$.
- Déterminer un encadrement de $\int_{-1}^6 f(x) dx$ par deux nombres entiers.

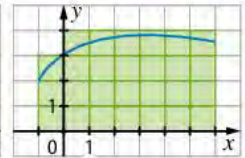
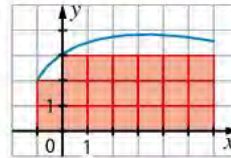
Solution commentée

- La courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses donc pour tout réel x de I , $f(x) \geq 0$. La fonction f est donc positive sur I .
 $\int_{-1}^6 f(x) dx$ représente donc l'aire, en u.a., de la surface $\mathcal{S}$ délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 6$.

- On compte le nombre de carrés entiers contenant la surface délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
Ce nombre est compris entre 2 et 3.

On estime alors que : $\int_{-1}^0 f(x) dx \approx 3$.

- On compte le nombre de carrés entiers contenus dans D (en rouge) puis le nombre de carrés entiers dont la réunion contient D (en vert).



On obtient alors : $20 \leq \int_{-1}^6 f(x) dx \leq 27$.

Méthode

Pour estimer ou encadrer une intégrale, on estime ou en encadre l'aire sous la courbe.

Voir exercices

46 Pour s'entraîner

122 Pour travailler en autonomie

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

Méthode

Pour programmer la méthode des rectangles, on peut utiliser une boucle « for ».

Voir exercices

47 Pour s'entraîner

123 Pour travailler en autonomie

Calculer une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles

PYTHON

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. On considère la surface $\mathcal{S}$ délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

- Exprimer l'aire de la surface $\mathcal{S}$ à l'aide d'une intégrale I .
- On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude h . On note u_n la somme des aires des rectangles contenus dans $\mathcal{S}$ et v_n celle des rectangles dont la réunion contient $\mathcal{S}$.
 - Exprimer h en fonction de a , b et n .
 - Écrire une fonction Python de paramètres a , b et n qui retourne un encadrement de l'aire de $\mathcal{S}$, en unités d'aire.
 - Avec l'appel `rectangles(2,3,50)`, obtenir une valeur approchée de I à 10^{-2} près.

Solution commentée

- La fonction $\ln$ est continue et positive sur $[a; b]$ donc $I = \int_a^b \ln(x) dx$.

- a. L'amplitude de l'intervalle $[a; b]$ est égale à $b - a$ donc $h = \frac{b - a}{n}$.

- La fonction $\ln$ est croissante sur $[a; b]$. On utilise la boucle « for » pour calculer par accumulation dans les variables u et v la somme des aires des rectangles.

- La fonction `rectangles` retourne $u \approx 0.905$ et $v \approx 0.914$, donc $I \approx 0.91$.

```
1 from math import log
2 def rectangles(a,b,n):
3     x=a
4     u=0
5     v=0
6     h=(b-a)/n
7     for k in range(1,n+1):
8         u=u+h*log(x)
9         x=x+h
10        v=v+h*log(x)
11    return(u,v)
```


2. Intégrale d'une fonction continue

Théorème fondamental

THÉORÈME Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F_a définie sur $[a; b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a . Autrement dit, pour tout réel x de $[a; b]$, $F_a'(x) = f(x)$.

À noter

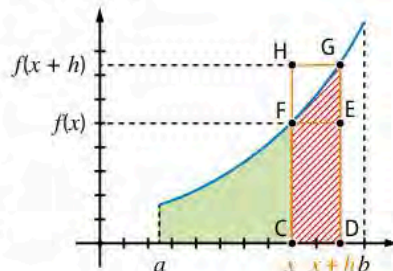
La dérivée de la fonction F_a est la fonction f .

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME Cas où la fonction f est croissante sur $[a; b]$

Soit x un réel de $[a; b]$ et h un réel non nul tel que $x + h \in [a; b]$.

- **Cas où $h > 0$** : f étant positive sur $[a; b]$, alors $F_a(x)$ est l'aire, en u.a., de la surface colorée en vert et la différence $F_a(x+h) - F_a(x)$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée en rouge.

f est croissante sur $[a; b]$, donc on peut encadrer cette surface par l'aire, en u.a., des rectangles CDEF et CDGH de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$.



Donc, $f(x) \times h \leq F_a(x+h) - F_a(x) \leq f(x+h) \times h$ et par conséquent, puisque $h > 0$,

$$f(x) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x+h).$$

- **Cas où $h < 0$** : de façon analogue, on a : $f(x+h) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x)$.
- f est continue sur $[a; b]$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$.

F_a est donc dérivable en tout réel x de $[a; b]$ et $F_a'(x) = f(x)$.

Calcul de l'intégrale d'une fonction continue

PROPRIÉTÉ Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$.

Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

D'après le théorème fondamental, la fonction G_a définie sur $[a; b]$ par $G_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a; b]$. De plus, si F est une primitive de f alors il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel x de $[a; b]$, $F(x) = G_a(x) + k$.

Par conséquent, $F(b) - F(a) = G_a(b) + k - (G_a(a) + k) = G_a(b) - G_a(a)$.

$G_a(b) = \int_a^b f(t) dt$ et $G_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, donc $F(b) - F(a) = G_a(b) - G_a(a) = \int_a^b f(t) dt$.

EXEMPLE : Soit $I = \int_{-3}^1 x^2 dx$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction carré est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Donc $I = F(1) - F(-3) = \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times (-3)^3 = \frac{1}{3} + \frac{27}{3} = \frac{28}{3}$.

PROPRIÉTÉ Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

On généralise le résultat précédent aux fonctions de signe quelconque sur un intervalle I .

DÉFINITION Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I , F une primitive de f et a et b deux réels de I . On appelle **intégrale de a à b de f** le réel noté $\int_a^b f(x) dx$ et défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

EXEMPLE : $I = \int_{-3}^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_{-3}^1 = \frac{1}{4} \times 1^4 - \frac{1}{4} \times (-3)^4 = \frac{1}{4} - \frac{81}{4} = -\frac{80}{4} = -20$.

À noter

Le calcul de l'intégrale par cette formule est indépendant de la primitive choisie.

Démonstration de cette propriété
Voir page 338

À noter

• Cette définition permet de calculer l'intégrale d'une fonction de signe quelconque.

• $[F(x)]_a^b$ est une notation pratique pour le calcul.

Étudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{t+2} \, dt$.

- Donner une interprétation graphique de $F(2)$ et $F(3)$, puis conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
- Déterminer la dérivée de la fonction F sur $[-2; +\infty[$.
- Étudier le sens de variation de F sur $[-2; +\infty[$ puis valider la conjecture.

Méthode

Pour étudier une fonction définie comme l'intégrale d'une fonction positive, on utilise le théorème fondamental.

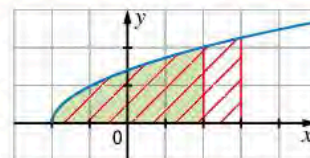
Voir exercices

48 Pour s'entraîner

124 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- La fonction $f: t \mapsto \sqrt{t+2}$ est continue et positive sur $[-2; +\infty[$ donc $F(2)$ est l'aire, en u.a., de la surface colorée en vert délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.



De même, $F(3)$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée en rouge délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$. On conjecture que $F(2) \leq F(3)$.

- La fonction f est continue et positive sur $[-2; +\infty[$ donc d'après le théorème fondamental, F est dérivable sur $[-2; +\infty[$ et $F'(x) = f(x)$.
- Pour tout réel x de $[-2; +\infty[$, $f(x) \geq 0$ donc $F'(x) \geq 0$. La fonction F est donc croissante sur $[-2; +\infty[$. Puisque $2 < 3$ et que F est croissante sur $[-2; +\infty[$ alors $F(2) \leq F(3)$. La conjecture est ainsi validée.

Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

- Calculer les intégrales :

$$a. I = \int_{-1}^4 (3x^2 + 4x + 1) dx \quad b. J = \int_{-1}^0 e^{3x+1} dx. \quad c. K = \int_0^\pi 3 \sin(2x) dx$$

- a. Démontrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$.

$$b. \text{ Calculer l'intégrale } L = \int_1^e \ln(x) dx.$$

Solution commentée

- a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

$$I = \int_{-1}^4 (3x^2 + 4x + 1) dx = [F(x)]_{-1}^4 = F(4) - F(-1).$$

Or, $F(4) = 64 + 32 + 4 = 100$ et $F(-1) = -1 + 2 - 1 = 0$. Donc $I = 100 - 0 = 100$.

- b. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{3x+1}$.

Pour tout réel x , $g(x) = \frac{1}{3} \times 3e^{3x+1}$. La fonction g est donc de la forme $ku'e^u$ avec $u(x) = 3x + 1$ et $u'(x) = 3$. Or, $u'e^u$ a pour primitive e^u .

La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$ est donc une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Ainsi, } J = \int_{-1}^0 e^{3x+1} dx = [G(x)]_{-1}^0 = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e^{-2}.$$

- c. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 \sin(2x)$.

Pour tout réel x , $h(x) = \frac{3}{2} \times 2 \sin(2x)$. La fonction h est donc de la forme $k u' \sin(u)$ avec $u(x) = 2x$ et $u'(x) = 2$. Or, $u' \sin(u)$ a pour primitive $-\cos(u)$.

La fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2} \cos(2x)$ est donc une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Ainsi, } K = \int_0^\pi 3 \sin(2x) dx = [H(x)]_0^\pi = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0.$$

- a. La fonction F est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, $F'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.
Donc F est une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

$$b. L = \int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^e = e \ln(e) - e - (1 \ln(1) - 1) = e - e + 1 = 1.$$

Vidéo 03:34

Calculer une intégrale



Méthode

Pour calculer $\int_a^b f(x) dx$, on peut déterminer une primitive F de f sur $[a; b]$, puis calculer la différence $F(b) - F(a)$.

Voir exercices

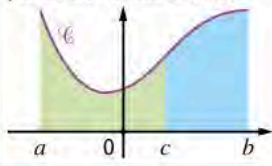
52 Pour s'entraîner

124 Pour travailler en autonomie

3. Propriétés et intégration par parties

À noter

Illustration de la relation de Chasles dans le cas où f est positive et c élément de $[a; b]$.



Démonstration des propriétés 3 et 6
Voir page 338

Propriétés de l'intégrale

PROPRIÉTÉS Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I .

a, b et c sont trois réels de I et k est une constante réelle.

$$(1) \int_a^a f(x) dx = 0. \quad (2) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

(3) Linéarité :

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ et } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$(4) \text{ Relation de Chasles : } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$(5) \text{ Positivité : Si pour tout } x \text{ de } [a; b], f(x) \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$$(6) \text{ Comparaison : Si pour tout } x \text{ de } [a; b], f(x) \geq g(x) \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

DÉMONSTRATIONS

Soit F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I .

$$(1) \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x) dx.$$

$$(4) \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

(5) C'est une conséquence de la définition de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle.

Attention ! Les réciproques des propriétés (5) et (6) sont fausses !

Intégration par parties

PROPRIÉTÉS Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I . Soit a et b deux réels de I .

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

DÉMONSTRATION

Les fonctions u et v sont dérivables sur I donc la fonction uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$. Donc pour tout réel x de I , $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$.

Or, les fonctions u et v sont continues sur I car elles sont dérivables sur I . De plus u' et v' sont continues sur I donc les fonctions uv' et $u'v$ le sont également.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_a^b u(x) v'(x) dx &= \int_a^b ((uv)'(x) - u'(x)v(x)) dx \\ &= \int_a^b (uv)'(x) dx - \int_a^b u'(x)v(x) dx \quad (\text{propriété de linéarité}). \end{aligned}$$

Or, une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv .

$$\text{Donc } \int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Cette méthode permet de transformer le calcul de l'intégrale d'une fonction. Un bon choix des fonctions u et v' conduit au calcul de l'intégrale d'une fonction dont on sait déterminer une primitive.

EXEMPLE : Calcul de $\int_0^\pi x \sin(x) dx$.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0; \pi]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0; \pi]$.

$$\text{Donc : } \int_0^\pi x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x) dx = [-x \cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi.$$

Vidéo 05:05

Encadrer
une intégrale

CAPACITÉ

5

Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction

- 1 Démontrer que, pour tout réel x de $[0; 1]$, $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
- 2 En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

Méthode

Pour majorer (ou minorer) l'intégrale de f sur $[a; b]$, on commence par majorer (ou minorer) la fonction f pour x entre a et b puis on applique la propriété de comparaison.

Voir exercices

76 Pour s'entraîner

127 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- 1 La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout réel x de $[0; 1]$, $e^{x^2} \geq 0$.
Pour tout réel x de $[0; 1]$, $x^2 \leq x$ donc, puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $e^{x^2} \leq e^x$.
Finalement, pour tout réel x de $[0; 1]$, $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
- 2 D'après la propriété de positivité, on a : $\int_0^1 e^{x^2} dx \geq 0$.
D'après la propriété de comparaison appliquée à l'inégalité $e^{x^2} \leq e^x$, on obtient :
 $\int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx$.
Or, $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.
On a donc : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

Vidéo 05:55

Effectuer
une intégration
pour parties

CAPACITÉ

6

Calculer une intégrale avec la méthode d'intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la méthode d'intégration par parties.

- 1 $I = \int_1^e x \ln(x) dx$.
- 2 $J = \int_0^{\ln(2)} (x-1)e^x dx$.

Méthode

Pour calculer une intégrale avec la méthode d'intégration par parties, on choisit les fonctions u et v' de façon à ce que l'on sache calculer une primitive des fonctions v' et $u'v$.

Solution commentée

- 1 $\int_1^e x \ln(x) dx$ est de la forme $\int_1^e u(x)v'(x) dx$, avec :

$$u(x) = \ln(x), \quad u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v'(x) = x, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

En effet, si on choisit v' telle que $v'(x) = \ln(x)$ alors on ne sait pas trouver simplement une primitive de la fonction v' .

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1; e]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1; e]$.

$$\text{On a : } I = \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

$$\text{Or, } u'(x)v(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } I &= \left[\frac{x}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- 2 $\int_0^{\ln(2)} (x-1)e^x dx$ est de la forme $\int_0^{\ln(2)} u(x)v'(x) dx$ avec :

$$u(x) = x-1, \quad u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x, \quad v(x) = e^x.$$

En effet, le choix de u et v' telles que $u(x) = x-1$ et $v'(x) = e^x$ permet d'obtenir $u'(x)v(x) = e^x$ et on connaît une primitive de la fonction $u'v$, c'est la fonction $x \mapsto e^x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1; \ln(2)]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1; \ln(2)]$.

$$\text{On a donc : } J = \left[(x-1)e^x \right]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} e^x dx = \left[(x-1)e^x \right]_0^{\ln(2)} - \left[e^x \right]_0^{\ln(2)}.$$

$$\text{Donc } J = 2(\ln(2) - 1) - (2 - 1) = -2 + 2\ln(2).$$

Voir exercices

81 Pour s'entraîner

125 Pour travailler en autonomie

4. Applications du calcul intégral

Calculs d'aires

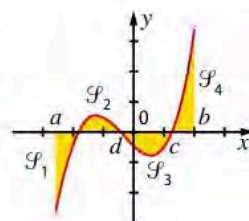
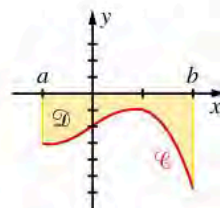
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. On note $\mathcal{S}$ la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cas où f est positive sur I : d'après le **cours 1**, l'aire de la surface $\mathcal{S}$, en u.a. est égale à $\int_a^b f(x) dx$.

Cas où f est négative sur I : la fonction $-f$ est alors positive et l'aire de la surface $\mathcal{S}$, en u.a., est égale à $-\int_a^b f(x) dx$. En effet, deux surfaces symétriques par rapport à une droite ont la même aire.

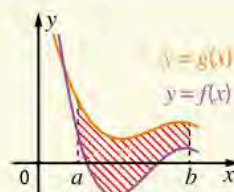
Cas où f change de signe sur I : la surface $\mathcal{S}$ peut alors être décomposée en une réunion de surfaces sur des intervalles disjoints. Sur chacun de ces intervalles, la courbe $\mathcal{C}$ est située soit au-dessus soit en dessous de l'axe des abscisses. Sur la figure ci-contre, on a par exemple :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\mathcal{S}) &= \text{Aire}(\mathcal{S}_1) + \text{Aire}(\mathcal{S}_2) + \text{Aire}(\mathcal{S}_3) + \text{Aire}(\mathcal{S}_4) \\ &= -\int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^e f(x) dx + \int_e^b f(x) dx. \end{aligned}$$



PROPRIÉTÉ Aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que pour tout réel x de I , $f(x) \leq g(x)$. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. L'aire $\mathcal{A}$, en u.a., de la surface délimitée par les courbes représentant les fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$.

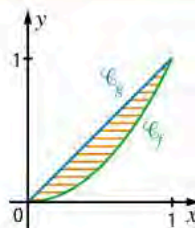


EXEMPLE : Soit f et g les fonctions définies sur $[0; 1]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. Soit $\mathcal{S}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour tout réel x de $[0; 1]$, on sait que $x^2 > x$.

$$\text{Or, } \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Donc, l'aire de $\mathcal{S}$, en unités d'aire, est $\frac{1}{6}$.



Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ le réel μ défini par : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Dans le cas où f est une fonction positive sur $[a; b]$, la valeur moyenne de f sur cet intervalle est égale à la hauteur h du rectangle de largeur $b - a$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe.

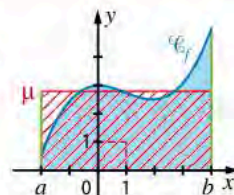
Sur la figure ci-contre, l'aire, en u.a., du rectangle hachuré est égale à l'aire, en u.a., sous la courbe de f .

REMARQUE : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ équivaut à $\mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx$.

On retrouve ainsi l'aire d'un rectangle dans le membre de gauche et l'aire « sous la courbe » de f dans le membre de droite.

EXEMPLE : La valeur moyenne de la fonction carré sur $[0; 3]$ est :

$$\mu = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \times 3^3 - \frac{1}{3} \times 0^3 \right) = \frac{1}{3} \times 9 = 3.$$



À noter

Les courbes représentatives des fonctions f et $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

À noter

La valeur moyenne d'une fonction est une généralisation de la notion de moyenne.

À noter

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle a la même unité que $f(x)$.

Vidéo 08.04

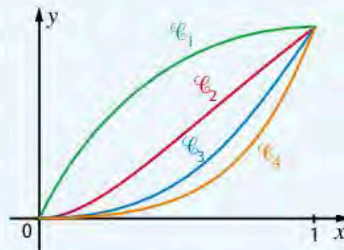
Étudier une suite d'intégrales



CAPACITÉ

7

Étudier une suite d'intégrales

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ où $f_n(x) = x^n e^{-x}$ pour tout réel x de $[0; 1]$.On note $\mathcal{C}_n$ les courbes représentatives des fonctions f_n dans le plan. On a tracé ci-contre $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.1 Émettre une conjecture sur le sens de variation de (I_n) et la démontrer.2 Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (I_n) .

Méthode

Pour majorer l'intégrale d'une fonction, on la majore à partir de sa majoration par une autre fonction.

Voir exercices

90 Pour s'entraîner

128 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

1 a. Graphiquement, I_n représente l'aire, en u.a., de la surface $\mathcal{S}_n$ délimitée par la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.Pour n entier naturel non nul, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_n$ donc l'aire de $\mathcal{S}_{n+1}$ est inférieure à l'aire de $\mathcal{S}_n$. On conjecture que la suite (I_n) est décroissante.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de $[0; 1]$, $x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$. Or, $x^n \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$. Donc $x^n \geq x^{n+1}$. De plus, $e^{-x} > 0$. On a donc $x^n e^{-x} \geq x^{n+1} e^{-x}$ et d'après la propriété de comparaison : $\int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$ c'est-à-dire, $I_n \geq I_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante.2 Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et pour x dans $[0; 1]$, $x^n \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $x^n e^{-x} \geq 0$. Ainsi, $I_n \geq 0$. De plus, $e^{-x} \leq 1$ donc $x^n e^{-x} \leq x^n$, donc $\int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx$.Or, $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Donc, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

CAPACITÉ

8

Calculer l'aire entre deux courbes

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ dont les courbes représentatives dans un repère orthonormé sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.Préciser la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[0; 1]$, puis calculer l'aire, en u.a., de la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Solution commentée

Pour tout réel x de $[0; 1]$, on a : $x^3 \leq x^2$. Donc $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 1]$.L'aire est égale, en u.a., à $\int_0^1 (x - x^3) dx$.Or, $\int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Donc l'aire est égale à $\frac{1}{4}$ u.a.

Conseil

Pour calculer l'aire de la surface comprise entre deux courbes, on doit d'abord connaître la position relative de ces deux courbes.

Voir exercices

102 Pour s'entraîner

130 Pour travailler en autonomie

Vidéo 06.47

Calculer la valeur moyenne d'une fonction



CAPACITÉ

9

Calculer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction

Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par $f(t) = 6t^2 - t^3$.1 Calculer la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.

2 Donner une interprétation de ce résultat.

Solution commentée

1 $\mu = \frac{1}{6} \int_0^6 f(t) dt = \frac{1}{6} \left[2t^3 - \frac{1}{4}t^4 \right]_0^6 = \frac{1}{6} \left(2 \times 6^3 - \frac{1}{4} \times 6^4 \right) = \frac{108}{6} = 18$.

2 Il y a donc en moyenne 18 malades chaque jour dans ce lycée.

Voir exercices

118 Pour s'entraîner

132 Pour travailler en autonomie

Étudier une démonstration

On se propose de démontrer la propriété suivante du **cours 2**, p. 332 dans le cas où $I = [a ; b]$ et que la fonction f admet un minimum m sur I .

Bon à savoir !

Cette propriété est une condition suffisante pour justifier l'existence des primitives d'une fonction mais elle n'est pas nécessaire ; certaines fonctions non continues admettent des primitives.

PROPRIÉTÉ Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - m$.

La fonction g est continue sur I comme somme de deux fonctions continues.

De plus, puisque f admet un minimum égal à m sur I , pour tout réel x de I , on a $f(x) \geq m$, soit $f(x) - m \geq 0$, soit $g(x) \geq 0$.

5 La fonction g est donc positive sur I .

D'après le théorème fondamental, la fonction g admet une primitive G sur I .

On a donc : $G'(x) = g(x)$ pour tout x de I .

La fonction F définie sur I par $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f sur I .

En effet, F est dérivable sur I et pour tout nombre réel x de I :

10 $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x)$.

Puisque, pour tout réel x de I , $F'(x) = f(x)$, on peut conclure que F est une primitive de f sur I .

Donc, la fonction f admet bien une primitive sur l'intervalle I .

QUESTIONS

1. Préciser le résultat de la ligne 2 : « la fonction g est continue sur I ».
2. Justifier que l'on peut bien appliquer le théorème fondamental à la ligne 6.
3. Rappeler la définition d'une primitive d'une fonction sur un intervalle.
4. Quelle propriété du chapitre sur les primitives permet de trouver l'expression de F en ligne 8 ?

Faire une démonstration

Pour les exercices **D1** et **D2**, on considère f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . a , b et c sont trois réels de I et k est une constante réelle.

Bon à savoir !

Cette propriété est appelée linéarité de l'intégrale.

D1 Démontrer la propriété suivante :

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \text{ et } \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Piste : Trouver une primitive des fonctions à intégrer puis utiliser la définition de l'intégrale d'une fonction.

D2 1. Démontrer la propriété suivante :

$$\text{Si pour tout réel } x \text{ de } [a ; b], f(x) \geq g(x) \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

2. La réciproque de cette implication est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Piste : Utiliser les propriétés de linéarité et de positivité.

Voir « Vocabulaire ensembliste et logique » page 448

Calcul mental

1 Calculer :

a. 10 % de 1 500

b. 25 % de 500

c. 30 % de 300

d. 40 % de 1 200

e. $\frac{3}{4}$ de 3 000

f. $\frac{5}{7}$ de 3 500

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $3x + 1 = 2x - 1$

b. $-5x = 1 + 3x$

c. $(x - 1)(2x + 3) = 0$

d. $-4x(7 - x) = 0$

e. $x^2 = 16$

f. $x^2 - 9 = 0$

3 Écrire chacun des nombres suivants sous la forme a^n avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

a. $A = 10^5 \times 10^{-3}$

b. $B = 2^{-5} \times 16$

c. $C = 3^5 \times (9^2)^{-5}$

d. $D = \frac{7^{-3} \times 49}{7^5}$

4 Calculer la dérivée de chacune des fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = x - 1$

b. $g(x) = x^2 - 3x + 7$

c. $h(x) = -2x^3 - 5x^2 + x + 3$

d. $i(x) = x + e^x$

Automatismes

Évolutions et pourcentages

5 Calculer le pourcentage d'évolution entre les valeurs Q_1 et Q_2 .

1. $Q_1 = 48$ et $Q_2 = 72$

2. $Q_1 = 195$ et $Q_2 = 156$

6 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Si le prix d'un article augmente de 60 % puis diminue de 60 %, alors le prix final est identique au prix initial.

2. Si le montant d'un loyer augmente de 25 % puis diminue de 15 %, alors il augmente de 10 %.

3. Si une quantité augmente de 2 % par an, alors elle double en 35 ans.

7 Question de méthode

1. Rappeler la méthode permettant de calculer le taux d'évolution réciproque d'une évolution de taux donné.

2. Déterminer alors l'évolution réciproque d'une augmentation de 60 %.

8 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Florence a posté sur les réseaux sociaux une vidéo humoristique.

Le premier jour, cette vidéo a été vue 420 fois, puis le nombre de vues a augmenté de 25 % chaque jour.

On note u_n le nombre de vues le n -ième jour.1. (u_n) est une suite :

a. arithmétique de raison 420

b. géométrique de raison 0,25

c. géométrique de raison 1,25

2. On a, pour tout entier naturel n :

a. $u_n = 420 \times 0,25^{n-1}$

b. $u_n = 420 \times 1,25^{n-1}$

c. $u_n = 420 \times 1,25^n$

Calculs numériques et algébriques

9 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$:

a. $\ln(24) - 2 \ln(6)$

b. $\ln\left(\frac{32}{27}\right)$

c. $\ln(16) + \ln(\sqrt{27})$

10 Démontrer les égalités suivantes pour tout réel x :

a. $\frac{e^{x+1}}{e^{3x+1}} = (e^{-x})^2$

b. $\frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = e^x - 1$

11 Déterminer une forme factorisée du polynôme du second degré $5x^2 - 15x - 20$.12 Quels sont tous les polynômes du second degré qui s'annulent en -5 et 2 ?

Statistiques et probabilités

13 A et B sont deux événements d'un même univers tels que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$ et $P(A \cap B) = 0,5$.

a. Calculer $P(A \cup B)$.

b. Calculer $P_{\bar{A}}(B)$

14 A et B sont deux événements d'un même univers tels que :

$$P(A) = 0,4, P_A(B) = 0,3 \text{ et } P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,8.$$

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$.

15 Le diagramme en bâtons suivant donne la répartition des salaires horaires, en euros, dans une PME.



1. Calculer le salaire horaire moyen.

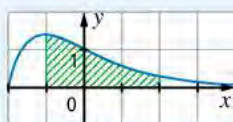
2. Calculer l'écart-type de cette série statistique.

Intégrale comme aire sous une courbe

Questions flash

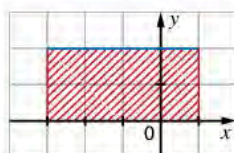
16 ORAL Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal d'unités 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. Quelle est, en cm^2 , l'unité d'aire ?

17 ORAL Soit f la fonction définie sur $[-2; 4]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-contre.



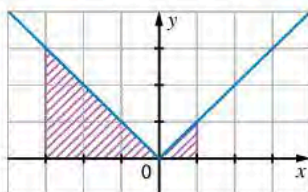
Interpréter graphiquement $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

18 Sur le graphique ci-contre sont représentées la courbe d'une fonction f définie sur $[-3; 1]$ ainsi qu'une surface hachurée.



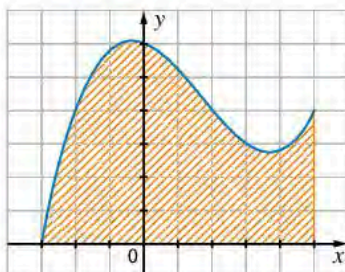
Déterminer par lecture graphique, la valeur de $\int_{-3}^1 f(x) dx$.

19 Soit f la fonction valeur absolue dont on donne la représentation graphique ci-contre.



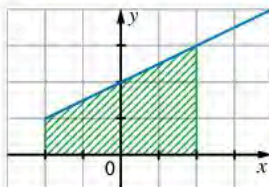
Calculer $\int_{-3}^1 f(x) dx$.

20 Sur le graphique suivant sont représentées la courbe d'une fonction f définie sur $[-3; 5]$ ainsi qu'une surface hachurée.



Écrire l'aire, en unités d'aire, de cette surface à l'aide d'une intégrale.

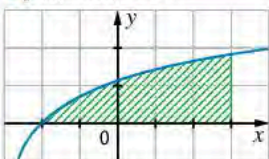
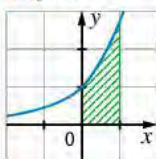
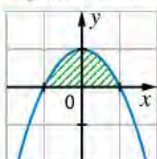
21 Sur le graphique ci-contre sont représentés la courbe d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$ ainsi qu'un domaine hachuré.



Vérifier que $\int_{-2}^2 f(x) dx = 8$.

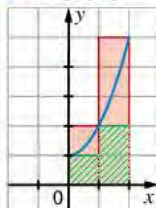
22 Dans chacun des cas suivants, on donne une fonction f définie sur un intervalle I , sa courbe représentative dans un repère du plan et une surface hachurée. Écrire l'aire, en unités d'aire, de cette surface à l'aide d'une intégrale.

a. $f(x) = 1 - x^2$ b. $f(x) = e^x$ c. $f(x) = \ln(x + 3)$

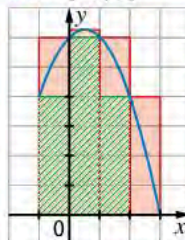


23 Dans chacun des cas, on donne la courbe représentative (en bleu) d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [a; b]$. Déterminer par lecture graphique, un encadrement par deux nombres entiers de $\int_a^b f(x) dx$.

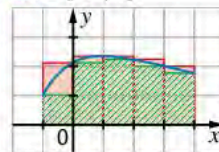
a. $I = [0; 2]$



b. $I = [-1; 3]$



c. $I = [-1; 4]$

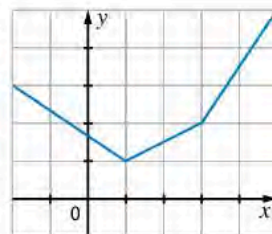


24 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-2; 5]$.

Déterminer, par lecture graphique, les intégrales suivantes :

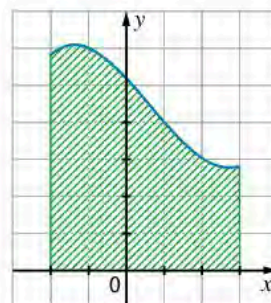
1. $\int_{-2}^1 g(x) dx$ 2. $\int_1^3 g(x) dx$

3. $\int_{-2}^5 g(x) dx$



25 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 3]$.



On note $\mathcal{A} = \int_{-2}^3 f(x) dx$. Un encadrement de $\mathcal{A}$ est :

a. $10 \leq \mathcal{A} \leq 35$ b. $19 \leq \mathcal{A} \leq 24$
c. $2 \leq \mathcal{A} \leq 7$ d. $19 \leq \mathcal{A} \leq 25$

26 PYTHON Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = x^3$. On partage l'intervalle $[0; 2]$ en 4 intervalles de même amplitude $h = 0,5$.

On considère la fonction Python, donnée ci-dessous, qui retourne un encadrement de $\int_0^2 f(x) dx$ par la méthode des rectangles.

1. Expliquer les lignes 5, 6 et 7 de ce programme.

2. Programmer cette fonction.

3. Que retourne l'appel `rectangles()` ?

4. Interpréter ce résultat.

```
def rectangles():
    x=0; u=0; v=0
    h=0.5
    for k in range(0,4):
        u=u+h*x**3
        x=x+h
        v=v+h*x**3
    return(u,v)
```


Calcul d'intégrales et propriétés

Questions flash

27 ORAL VRAI/FAUX

Soit f une fonction continue sur $[-3; 4]$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- $\int_{-3}^4 f(x) dx = F(-3) - F(4)$.
- $\int_{-3}^4 f(x) dx = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.
- $\int_{-1}^1 x dx = 0$.
- $\int_{-2}^1 x dx < 0$.

28 Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 8x^3 - 6x^2 + 1 \text{ et } F(x) = 2x^4 - 2x^3 + x - 2.$$

- Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Calculer alors $\int_{-2}^1 f(x) dx$.

29 Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x + 1)e^{3x} \text{ et } F(x) = xe^{3x}.$$

- Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Vérifier que $\int_{-1}^1 f(x) dx = e^3 + e^{-3}$.

Dans les exercices 30 à 32, on donne une fonction f définie sur l'intervalle I . Déterminer une primitive F de f sur I , puis justifier la valeur donnée pour l'intégrale $J = \int_a^b f(x) dx$.

30 $f(x) = e^x + 1$ $I = [0; 1]$ $J = e$

31 $f(x) = \frac{1}{x}$ $I = [1; e]$ $J = 1$

32 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $I = [4; 9]$ $J = 2$

Dans les exercices 33 à 35, calculer les intégrales données.

33 1. $I = \int_1^7 dx$ 2. $J = \int_{-4}^3 3dx$

34 1. $I = \int_{-1}^2 (-3x + 5) dx$ 2. $J = \int_0^1 (3x^2 - 2x) dx$

35 1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) dx$ 2. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$

36 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On donne $\int_{-5}^1 f(x) dx = 8$ et $\int_1^3 f(x) dx = 2$.

Calculer $\int_{-5}^3 f(x) dx$.

37 Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et

telles que $\int_{-1}^3 f(x) dx = 2$ et $\int_{-1}^3 g(x) dx = -5$.

Calculer : a. $\int_{-1}^3 7f(x) dx$ b. $\int_{-1}^3 (f(x) + g(x)) dx$

c. $\int_{-1}^3 (2f(x) - 3g(x)) dx$

38 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle

$[-5; 7]$ telle que pour tout réel x de cet intervalle, $-1 \leq f(x) \leq 3$.

Justifier que : $-12 \leq \int_{-5}^7 f(x) dx \leq 36$.

39 Soit f une fonction continue sur $[-1; 4]$ dont on donne le tableau de variation ci-contre.

x	-1	1	7	4
$f(x)$	0	3	1	5

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-1; 4]$, puis celui de $\int_{-1}^4 f'(x) dx$.

2. a. Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[2; 4]$.

b. En déduire un encadrement de $\int_2^4 f(x) dx$.

40 Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$. Cette intégrale est de la forme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) v'(x) dx$ avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$.

1. Calculer $u'(x)$ et $v(x)$.

2. En utilisant une intégration par parties, vérifier que $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

41 Soit $K = \int_1^2 x^2 \ln(x) dx$.

1. En utilisant la méthode d'intégration par parties, justifier

que $K = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} x^2 dx$.

2. Vérifier alors que $K = \frac{8}{3} \ln(2) - \frac{7}{9}$.

Applications du calcul intégral

Questions flash

42 ORAL 1. Déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction carré, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

2. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_3^7 f(x) dx = 10.$$

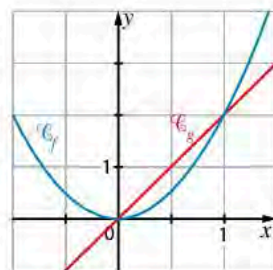
Calculer la valeur moyenne de f sur $[3; 7]$.

43 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère orthonormé du plan, puis hachurer la surface S délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de S .

44 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ dont on donne les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ci-contre dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.



1. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 1]$.

2. Soit la surface S délimitée par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a. Justifier que l'aire de la surface S est égale, en unités d'aire, à $\int_0^1 (x - x^2) dx$.

b. Calculer l'aire, en unités d'aire, puis en cm^2 de la surface S .

45 1. Calculer $\int_2^5 (2x - 3) dx$.

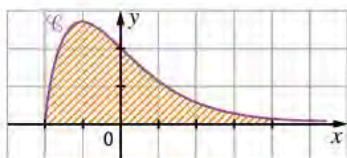
2. En déduire la valeur moyenne sur $[2; 5]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

Dans les exercices qui suivent, sauf indication contraire, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Intégrale d'une fonction

46 Capacité 1, p. 331

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe $\mathcal{C}$ tracée ci-dessous.

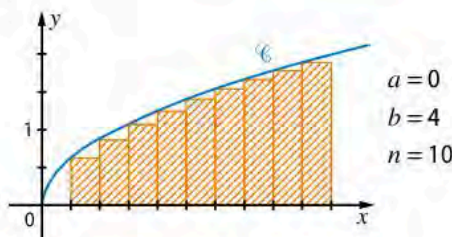


1. a. Donner le signe de f sur l'intervalle $[-2; 4]$.
b. Exprimer l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée à l'aide d'une intégrale notée I .
2. Estimer, à une unité près, la valeur de $\int_0^1 f(x) dx$.
3. Déterminer un encadrement de I par deux nombres entiers.

47 PYTHON Capacité 2, p. 331

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On considère la surface $\mathcal{S}$ délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, où a et b sont des réels positifs tels que $a < b$.

1. Exprimer l'aire, en unités d'aire, de la surface $\mathcal{S}$ à l'aide d'une intégrale I .
2. On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude h . On note u_n la somme des aires des rectangles contenus dans $\mathcal{S}$.



- a. Exprimer h en fonction de a , b et n .
- b. Écrire une fonction Python de paramètres a , b et n qui retourne une valeur approchée de l'aire de $\mathcal{S}$, en unités d'aire.
- c. Programmer cette fonction et donner une valeur approchée, à 10^{-2} près, de I obtenue pour $a = 0$, $b = 4$ et $n = 50$.

Point Histoire

Le mathématicien allemand **Bernhard Riemann** (1826-1866) a participé à l'élaboration de la méthode des rectangles. L'aire cherchée est alors comprise entre la somme des aires des rectangles inférieurs et celle des rectangles supérieurs. Pour obtenir l'aire du domaine, il suffit alors de faire tendre le nombre de rectangles vers l'infini.

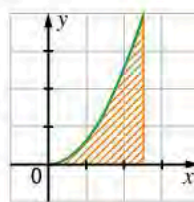


48 Capacité 3, p. 333

Soit F la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x t \ln(t+1) dt.$$

On donne ci-contre la courbe représentative (en vert) de la fonction $t \mapsto t \ln(t+1)$.



1. Donner une interprétation graphique de $F(4)$ et $F(5)$, puis conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
2. Déterminer la dérivée de F sur I .
3. Étudier le sens de variation de F sur I , puis valider la conjecture de la question 1.

49 Soit F la fonction définie sur $I = [-1; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{-1}^x e^{-t^2} dt.$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction F sur I .
2. En déduire le sens de variation de F sur I .

50 VRAI/FAUX

Soit F la fonction définie sur $[0; 1[$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- a. $F(0) = 0$. b. $F'(0) = 1$. c. F est décroissante sur $[0; 1[$.

51 LOGIQUE Soit f et g deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[a; b]$.

1. Dire, en le justifiant, si l'énoncé suivant est vrai ou faux :
« Si pour tout réel x de $[a; b]$, $f(x) = g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx. »$$

2. Énoncer la réciproque de la proposition précédente. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Calculs d'intégrales

Pour chacun des exercices 52 à 62, calculer les intégrales après un calcul de primitives.

52 Capacité 4, p. 333

1. $I = \int_1^3 (x^3 + 4x^2 - 5x + 1) dx$ 2. $J = \int_{-2}^2 (x+1)^2 dx$

53 1. $I = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$ 2. $J = \int_4^9 x + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

54 1. $I = \int_0^{\ln 2} (2x + e^x) dx$ 2. $K = \int_1^3 \frac{2}{x} dx$

55 1. $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3}{x} dx$ 2. $J = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

56 1. $I = \int_1^{\ln 2} e^{4t} dt$ 2. $K = \int_{-1}^0 t^2 e^{t^3} dt$

57 1. $I = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{e^{-t} + 1} dt$ 2. $J = \int_0^1 \frac{t}{t^2 + 3} dt$

58 1. $I = \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$ 2. $J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$

59 1. $I = \int_{-1}^1 (2u+1)(u^2+u)^2 du$

2. $K = \int_0^1 (3u^2 - 5)(u^3 - 5u + 1)^3 du$

60 1. $K = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ 2. $J = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx$

61 1. $I = \int_0^\pi \sin(x) \cos(x) dx$ 2. $J = \int_0^\pi \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx$

62 1. $J = \int_0^\pi \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) dt$ 2. $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt$

63 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. L'intégrale de -1 à 1 de la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 4$, est positive.

2. $\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^{2x} dx = 2 \ln(5) - 2 \ln(2)$.

64 Soit f la fonction définie sur $I =]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x de I : $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x + 1}$.

2. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

65 Capacité 4, p. 333

Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x \text{ et } F(x) = (x - 1)e^x.$$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire $\int_0^1 f(x) dx$.

66 Soit f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln(x) \text{ et } g(x) = x \ln(x).$$

1. Calculer la dérivée de la fonction f .

2. En déduire une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction g .

3. Calculer alors $\int_1^e g(x) dx$.

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

67 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

où a est un réel strictement positif.

1. Justifier que f est une fonction paire.

2. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit d un réel strictement positif. On admet que la longueur L de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur un intervalle $[-d; d]$ est donnée par :

$$L = 2 \int_0^d \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

a. Montrer que $1 + (f'(x))^2 = \left(\frac{1}{a} f(x)\right)^2$.

b. Montrer que $L = a \left(e^{\frac{d}{a}} + e^{-\frac{d}{a}} \right)$.

4. La passerelle du Drac est modélisée par la fonction f précédente sur l'intervalle $[-108,5; 108,5]$ avec $a = 90,5$. Elle permet aux randonneurs de rejoindre les deux rives du lac de Monteynard-Avignonnet distantes de 217 mètres.

Calculer une valeur approchée de L au mètre près.



Propriétés de l'intégrale

68 LOGIQUE Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

1. Dire, en justifiant, si l'énoncé suivant est vrai ou faux. « Si la fonction f est positive sur $[a; b]$, alors l'intégrale de f entre a et b est positive. »

2. Énoncer la réciproque de la proposition précédente. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

69 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

$\int_0^2 (3x^2 + 1) dx$ est égale à :

a. 9 b. 10 c. $3 \int_0^2 x^2 dx + 2$ d. $3 \int_0^2 x^2 dx + 1$

70 Soit $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$.

1. Calculer I et $I + J$.

2. En déduire la valeur de J .

71 Soit $I = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2} dx$.

1. Calculer I .

2. Montrer que : $I + J = \frac{1}{2}$.

3. En déduire la valeur de J .

72 Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$.

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.

2. En déduire les valeurs de I et J .

73 En utilisant la relation de Chasles, calculer : $\int_{-3}^5 |x| dx$.

74 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - |x|$.

1. a. Justifier que, si $x \leq 0$ alors $f(x) = x + 3$.

b. Justifier que, si $x \geq 0$ alors $f(x) = -x + 3$.

2. Calculer, en utilisant la relation de Chasles : $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

75 Une question ouverte

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - x - 6|$.

Calculer $\int_{-3}^4 f(x) dx$.

Piste → Voir p. 466

76 Capacité 5, p. 335

1. Démontrer que, pour tout réel x de $[0; 1]$,

$$0 \leq xe^{-x} \leq xe^{-x^2}.$$

2. En déduire que $0 \leq \int_0^1 xe^{-x} dx \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.

77 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[1; 3]$. Dans chacun des cas suivants, donner un encadrement de $\int_1^3 f(x) dx$ sachant que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 3]$:

a. $-2x \leq f(x) \leq x^2$

b. $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

78 1. Donner un encadrement de $\ln(x)$ sur $[1; 2]$.

2. En déduire que $0 \leq \int_1^2 x^2 \ln(x) dx \leq \frac{7}{3} \ln(2)$.

79 1. Montrer que, pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \sqrt{1 + \sin(x)} \leq \sqrt{2}$.

2. En déduire un encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin(x)} dx$.

80 **QCM** Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit $I = \int_1^e x \ln(x) dx$. Alors :

- a. $I \geq 0$ b. $0 \leq I \leq \int_1^e x dx$
 c. $I \leq \int_1^e \ln(x) dx$ d. $0 \leq I \leq \frac{e^2 - 1}{2}$

Intégration par parties

Pour chacun des exercices **81** à **84**, calculer les intégrales en utilisant la méthode d'intégration par parties.

81 **Capacité 6, p. 335**

- 81** 1. $I = \int_{-2}^3 (x+1)e^x dx$ 2. $J = \int_0^1 x e^{2x} dx$
82 1. $I = \int_1^e \ln(x) dx$ 2. $J = \int_1^e x^2 \ln(x) dx$
83 1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$ 2. $J = \int_0^{\pi} (x+1) \sin(x) dx$
84 1. $I = \int_0^{\pi} t \sin(2t) dt$ 2. $J = \int_{-1}^2 (3t+1)e^{-t} dt$

85 Soit $I = \int_1^9 x \sqrt{x} dx$.

1. En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que $I = 121 - 1$.
 2. En déduire la valeur de I .

86 Une question ouverte

Calculer $\int_0^1 \ln(x+1) dx$.

Piste → Voir p. 466

87 Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx$.

1. En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que : a. $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$ b. $J = 1 + I$.
 3. En déduire I et J .

88 1. a. Démontrer que, pour tout réel x , $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

b. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$.

2. Calculer $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

89 Pour n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

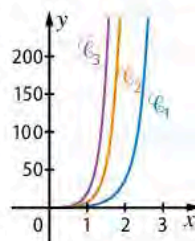
1. Calculer $I_0 = \int_0^1 e^x dx$.
 2. En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
 3. En déduire I_1 , I_2 et I_3 .

Suites et intégrales

90 **Capacité 7, p. 337**

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_1^2 f_n(x) dx$ où $f_n(x) = e^{n x^2}$ pour tout réel x de $[1; 2]$.

On a tracé ci-contre les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ des fonctions f_1 , f_2 et f_3 .



1. a. Émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) .

b. Démontrer cette conjecture.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geq e^n$.

b. En déduire la limite de la suite (I_n) .

91 Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

1. Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ sur $[n; n+1]$.
 2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}.$$

 3. En déduire la limite de la suite (I_n) .
 4. Retrouver le résultat précédent en calculant I_n .

92 **VRAI/FAUX**

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

La suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 x e^{n x} dx$ est croissante.

93 Pour n entier naturel non nul, on pose :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx \text{ et } J_n = \int_e^{2e} (\ln x)^n dx.$$

1. Justifier que la suite (I_n) est décroissante.
 2. Quel est le sens de variation de la suite (J_n) ? Justifier.

94 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
 2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$

 b. En déduire la valeur exacte de u_1 .
 3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

95 Soit (I_n) et (J_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{0.1 + x^n} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{0.1 + x^n} dx.$$

1. a. Justifier que, pour tout réel x de $[0; 1]$, $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$.
 b. Montrer que la suite (I_n) est majorée par 1.
 2. a. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 b. En déduire la limite de la suite (J_n) .
 3. a. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n + J_n$.
 b. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

96 Une question ouverte

Déterminer la limite de la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_1^e x^{n-1} \ln(x) dx$.

Piste → Voir p. 466

97 On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos(t) dt \text{ et } y_n = \int_0^1 t^n \sin(t) dt.$$

1. a. Justifier que la suite (x_n) est à termes positifs.

b. Étudier le sens de variation de la suite (x_n) .

c. En déduire que la suite (x_n) converge.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$x_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

b. En déduire la limite de la suite (x_n) .

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1).$$

b. En déduire la limite de la suite (y_n) .

Calculs d'aires

98 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Construire la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-2; 2]$.

2. On note $\mathcal{S}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ et $\mathcal{S}'$ le domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

a. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{S}$.

b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{S}'$.

99 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

3. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

100 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. a. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = (x^2 - 4)(x - 5)$.

b. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

3. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 5$.

101 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère d'unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 6 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variation de f .

2. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

4. On note $\mathcal{S}$ la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface $\mathcal{S}$.

b. En déduire l'aire, en cm^2 , de la surface $\mathcal{S}$.

102 Capacité 8, p. 337

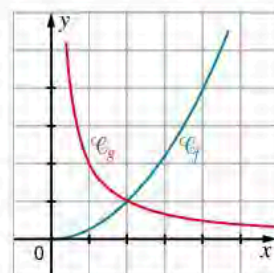
Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$, dont les courbes représentatives sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. Préciser la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

3. Calculer l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

103 Soit f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données ci-contre.



1. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

104 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 + 3x - 4.$$

1. a. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la position relative des courbes représentatives de ces deux fonctions.

b. Démontrer cette conjecture.

2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

105 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4 \text{ et } g(x) = -2x + 7.$$

Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes représentatives de ces deux fonctions et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

106 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

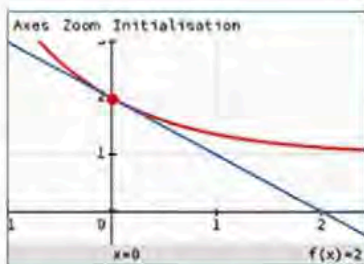
1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

2. Justifier que T est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0; +\infty[$.

3. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par $\mathcal{C}$, T et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

107 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{-x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Soit T la droite d'équation $y = -x + 2$. On donne ci-contre $\mathcal{C}$ et T obtenues sur un écran de calculatrice.



1. Justifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

2. a. Calculer $f''(x)$ et en déduire la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .

3. Calculer l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par $\mathcal{C}$, T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

MÉTHODE À L'ORAL

108 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

1. a. Rappeler la formule donnant l'équation réduite de la tangente à la courbe d'une fonction en un point d'abscisse α .

b. Donner alors l'équation réduite de T .

2. a. Rappeler la définition d'une fonction convexe sur un intervalle.

b. Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $\mathbb{R}$.

3. a. Présenter la méthode de calcul de l'aire, en unités d'aire, d'une surface délimitée par deux courbes et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées.

b. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par $\mathcal{C}$, T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

109 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt.$$

1. a. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]1; +\infty[$.

b. Donner une interprétation géométrique du réel $g(3)$.

2. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$g(x) = 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}.$$

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

110 Dans un repère orthonormé, on considère les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives $y = x + 1 + e^{-x}$ et $y = x + 1$ où x est un réel positif.

1. Justifier que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}'$ sur $[0; +\infty[$.

2. Soit λ un réel strictement positif.

a. Calculer l'aire A_λ , en unités d'aire, de la surface délimitée par $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

b. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$.

111 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x + 1)e^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c. Construire le tableau de variation de f .

2. Soit λ un réel strictement positif. On pose $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t) dt$.

a. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en utilisant une intégration par parties.

b. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Interpréter ce résultat.

112 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et d la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à d .

2. Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 1$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, la droite d et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

a. Écrire $\mathcal{A}(\alpha)$ à l'aide d'une intégrale.

b. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\mathcal{A}(\alpha) = 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$

c. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

MATHS & ÉCONOMIE

113 L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.

Une étude de marché concernant un article a mis en évidence que les fonctions offre et demande notées f et g sont modélisées sur l'intervalle $[0; 12]$ par :

$$f(x) = 0,2x^2 - 0,4x + 1,2$$

$$\text{et } g(x) = 0,2x^2 - 5,2x + 34,8,$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont les prix en euros pour une quantité x en millions d'unité.

1. Pour un prix de vente à 17,20 euros :

a. calculer le nombre d'articles offert sur le marché ;

b. calculer le nombre d'articles demandé sur le marché.

2. Le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, l'offre est égale à la demande.

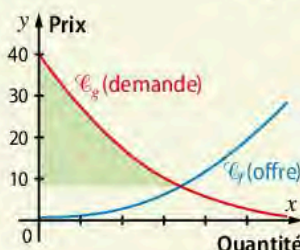
Déterminer le prix d'équilibre p_0 et le nombre d'articles correspondant q_0 .

3. On donne ci-dessous les courbes des fonctions f et g .

a. Certains producteurs étaient disposés à proposer un prix inférieur au prix d'équilibre. Le gain supplémentaire, noté S_p , appelé surplus des producteurs est donné par :

$$S_p = q_0 \times p_0 - \int_0^{q_0} f(x) dx.$$

Calculer S_p .



b. Certains consommateurs étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. L'économie réalisée par ces consommateurs, notée S_c , appelée surplus des consommateurs est représentée par la surface colorée sur le graphique. Calculer S_c .

Point Histoire

C'est l'ingénieur Jules Dupuit qui a introduit au XIX^e siècle cette notion de surplus du consommateur pour aider à la décision lors de certains travaux publics.

Valeur moyenne d'une fonction

Dans les exercices 114 à 116, on donne l'expression d'une fonction f définie sur l'intervalle I . Calculer sa valeur moyenne sur I .

114 1. $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ $I = [0; 1]$

2. $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ $I = [1; e]$

3. $f(x) = e^{2-x}$ $I = [0; 4]$

115 1. $f(x) = 3(3x - 1)^3$ $I = [-1; 0]$

2. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$ $I = [0; 1]$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \ln(x)$ $I = [1; e^2]$

116 1. $f(x) = \cos(3x)$ $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$ $I = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

3. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $I = [-1; 2]$

117 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^2 - x + 1)e^{-x} \text{ et } g(x) = (-2x^2 + 5x - 2)e^{-x}.$$

- Montrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
- En déduire la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$. On arrondira le résultat à 10^{-3} .

MATHS & ÉCONOMIE

118 Capacité 9, p. 337

Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine. Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle $[0; 5]$ par la fonction C telle que :

$$C(x) = (4x + 1)e^{-x}.$$

- En utilisant une intégration par parties, calculer la valeur moyenne de la fonction C sur l'intervalle $[0; 5]$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
- Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?



MATHS & PHYSIQUE

119 Un point mobile est étudié sur l'intervalle de temps $[0; 20]$. Le temps est exprimé en secondes. La vitesse du mobile, en $m \cdot s^{-1}$, est donnée par :

$$v(t) = 2t^2 + 3t.$$

- Calculer la valeur moyenne de la fonction v sur $[0; 20]$.
- Que représente cette valeur moyenne ?

MATHS & SVT

120 Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter leur progression.

On note $f(t)$ la concentration dans le sang (en mg/L) en fonction du temps t (en heures) d'un antibiotique administré en une seule dose à un animal, t appartenant à l'intervalle $[0; 24]$. On admet que pour tout réel t dans cet intervalle,

$$f(t) = \frac{50t}{t^2 + 4}.$$

Calculer la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millièème.



Problème de synthèse

121 CALCULER REPRÉSENTER

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (x + 2)e^{-nx}$$

où n est un entier naturel non nul. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

- a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ puis construire son tableau de variations.
3. Déterminer le signe de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. Construire la courbe $\mathcal{C}_1$.
5. On note $\mathcal{P}_1$ la surface délimitée par $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, une valeur exacte puis arrondie à 10^{-3} de l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{P}_1$.

6. Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- a. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x + 2)e^{-nx} (e^{-x} - 1) dx.$$

- b. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .
- c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{3}{n}(1 - e^{-n})$.
- d. En déduire que la suite (I_n) converge.

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

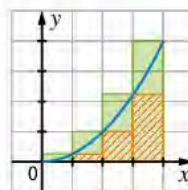
Théorème fondamental

f continue et positive sur $[a; b]$.
La fonction F_a définie sur $[a; b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .

Méthode des rectangles

f continue et positive sur $[a; b]$.

$\int_a^b f(x) dx$ peut être encadrée par la somme des aires des rectangles hachurés en rouge et colorés en vert.



Méthodes de calcul

À l'aide d'une primitive

f fonction continue sur $[a; b]$ et F primitive de f

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Intégration par parties

u et v dérivables sur I , u' et v' continues sur I .
 a et b sont deux réels de I .

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Valeur moyenne d'une fonction f sur $[a; b]$

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Calcul intégral

Propriétés de l'intégrale

f et g continues sur $[a; b]$, $c \in [a; b]$, $k \in \mathbb{R}$.

Linéarité

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ et}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

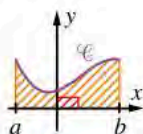
• **Positivité** : Si $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

• **Comparaison** : Si $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Calcul d'aires

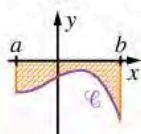
f continue et positive sur $[a; b]$

$\int_a^b f(x) dx$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée.



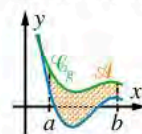
f continue et négative sur $[a; b]$

L'aire, en u.a., de la surface hachurée est l'opposé de $\int_a^b f(x) dx$.



Aire entre deux courbes

$\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$, $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée.



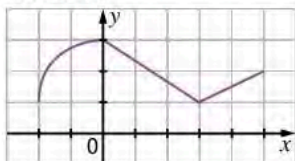
Faire le point avec des exercices corrigés

Estimer une intégrale

* 122  15 min Capacité 1, p. 331

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

On considère la fonction f définie sur $[-2; 5]$ et dont la courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous.



On note $I = \int_{-2}^0 f(x) dx$, $J = \int_0^3 f(x) dx$ et $K = \int_3^5 f(x) dx$.

1. L'intégrale $\int_{-2}^0 f(x) dx$ est :

a. $I > 0$ b. $I < 0$ c. $I = 0$

2. La meilleure estimation de I est :

a. $I \approx 4$ b. $I \approx 5$ c. $I \approx 6$

3. L'intégrale I est comprise entre :

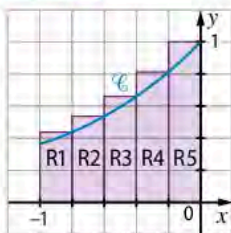
a. $1 < J < 3$ b. $3 < J < 5$ c. $5 < J < 7$

4. L'intégrale de 0 à 5 de la fonction f est égale à :

a. $I + J$ b. $J + K$ c. $I + K$

123 15 min Capacité 2, p. 331 PYTHON

On donne ci-contre la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle sur $[-1; 0]$ et cinq rectangles de largeurs identiques ayant tous un sommet appartenant à $\mathcal{C}$.



On donne ci-dessous le script incomplet d'une fonction **somme** en langage Python. Celle-ci doit retourner la somme S des aires des rectangles précédents. La variable h représente la largeur de chacun de ces rectangles.

- Recopier et compléter cette fonction.
- Modifier cette fonction en une fonction de paramètre n qui retourne une valeur approchée de $\int_{-1}^0 e^x dx$ en utilisant n rectangles de largeurs identiques.

```
def somme():
    S=0; x=-1; h=...
    for i in range(1, ...):
        x=x+...
        S=...
    return(...)
```

Calculer une intégrale

124 25 min Capacités 3 et 4, p. 333

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx = 2(e^3 - 1)$.
- $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.
- $\int_2^4 \frac{3x}{x^2 - 1} dx = 3\ln(\sqrt{5})$.
- La fonction F définie sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ est croissante.

125 20 min Capacité 6, p. 335

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x - 1)\cos(x) dx$.
- $\int_1^e 5x^2 \ln(x) dx$.

126 30 min Capacités 3 et 6, pp. 333-335

Soit F la fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x t \ln(t) dt$.

- Justifier que, pour tout réel x de I , $F(x) \geq 0$.
- a. Déterminer la dérivée de la fonction F sur I .
b. En déduire le sens de variation de F sur I .
- a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x de I , $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$.
b. Calculer $F(e)$ et donner une interprétation de ce résultat.

Utiliser les propriétés de l'intégrale

127 20 min Capacité 5, p. 335

- Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
- a. Justifier que, pour tout réel x de $[1; 4]$, $e \leq f(x) \leq \frac{e^4}{4}$.
b. En déduire un encadrement de $\int_1^4 f(x) dx$.

128 30 min Capacités 5 et 7, pp. 335-337

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 x^n \sin(x) dx$.

- a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n \sin(x)(x - 1) dx$$

b. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .
- Justifier que pour tout réel x de $[0; 1]$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
a. $0 \leq x^n \sin(x) \leq x^n$ b. $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- Déterminer la limite de la suite (I_n) .

129 20 min Capacités 5 et 7, pp. 335-337

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$.

- Donner une interprétation graphique de I_n .
- Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
- a. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \ln(2)$.
b. En déduire que la suite (I_n) converge.

Calculer une aire ou une valeur moyenne

130 15 min Capacité 8, p. 337

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

- L'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe de la fonction cube, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est égale à :
a. 4 b. 8 c. 12
- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x+3}$. L'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est :
a. $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$ b. $3(1 - e^{-3})$ c. $\frac{1}{3}(1 - e^{-3})$

131 35 min Capacité 8, p. 337

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
- Montrer que, pour tout réel x , $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$.
- Déterminer la convexité de la fonction f et en déduire la position relative entre $\mathcal{C}$ et T .
- a. Justifier que, pour tout réel x , $f(x) - (x + 1) = x(e^{-x} - 1)$.
b. Calculer $\int_0^1 (e^{-x} - 1) dx$ à l'aide d'une intégration par parties. Donner la valeur exacte puis approchée à 10^{-3} près.

132 20 min Capacité 9, p. 337

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 12]$ par $f(t) = 10e^{-0,15t}$.

- Étudier le sens de variation de la fonction f .
- Calculer $I = \int_0^{12} f(t) dt$.
- Un médicament est injecté par voie intraveineuse. On suppose que la quantité présente dans le sang exprimée en milligrammes, à l'instant t , exprimé en heures, est modélisée par la fonction f . Calculer, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de médicament présent chaque heure dans le sang pendant les 12 heures suivant l'injection.

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Calculer une intégrale

■ **Un exemple** : Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x e^{x^2+1} dx$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Quelle est la consigne ?	Je dois calculer l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle. ► Préciser cette fonction et les bornes de l'intervalle.
Quelle est la méthode de calcul ?	Je dois commencer par chercher une primitive F de la fonction f . ► De quelle forme est la fonction f ?
Pourquoi est-il plus intéressant d'écrire $x e^{x^2+1}$ sous la forme $\frac{1}{2} \times 2x e^{x^2+1}$?	Je fais ainsi apparaître une forme remarquable : la forme $u'e^u$. ► Quelle est la fonction u ? Rappeler une primitive de $u'e^u$. Déterminer ensuite une primitive F de la fonction f .
Comment effectuer le calcul demandé ?	Je dois calculer $F(b) - F(a)$. ► Préciser a et b puis justifier que $I = \frac{1}{2}(e^2 - e)$.
Comment vérifier son calcul ?	Je peux utiliser la calculatrice pour contrôler mon résultat. ► Vérifier que la valeur approchée fournie par la calculatrice est la même que celle obtenue à partir de la valeur exacte précédente.

Pour les exercices 133 à 135, calculer les intégrales données.

133 a. $J = \int_{-2}^4 (9x^2 + 8x - 1) dx$ b. $K = \int_{-1}^2 (x+1)(x^2 + 2x - 5)^3 dx$ c. $L = \int_{-1}^0 e^{-x} dx$ d. $M = \int_{-1}^2 \frac{5x}{x^2 + 1} dx$

134 a. $J = \int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ b. $K = \int_0^1 \frac{1}{(3x+2)^2} dx$ c. $L = \int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ d. $M = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

135 a. $J = \int_0^\pi 4 \sin(x) dx$ b. $K = \int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ c. $L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) \sin(x) dx$ d. $M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(x^2) dx$

PARCOURS 2 Calculer une aire

■ **Un exemple** : Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Quelle est la consigne ?	Je dois calculer l'aire d'une surface. ► Visualiser cette surface en traçant la courbe représentative de f .
De quoi doit-on s'assurer pour le calcul de cette aire ?	Je dois connaître le signe de la fonction f sur l'intervalle. ► Préciser le signe de f sur $[2; 4]$.
Comment procéder pour calculer cette aire ?	Je calcule l'intégrale de f entre 2 et 4. ► Effectuer ce calcul et montrer que $\mathcal{A} = 3 \ln 2$.
Comment vérifier son calcul ?	Je contrôle que le résultat obtenu peut correspondre à l'aire demandée. ► Vérifier le signe du résultat (car une aire est positive) et la cohérence de ce résultat avec une lecture graphique ou une lecture sur la calculatrice.

136 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}$.
Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

137 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x(x^2 - 4)$ et dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}$.
Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

PARCOURS 3 Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes

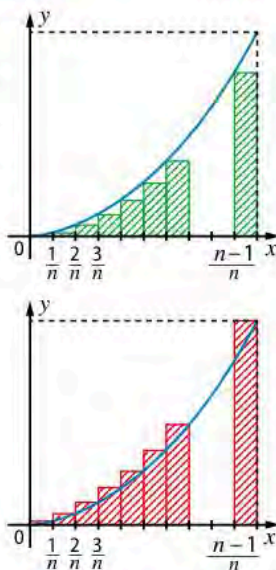
138 Chercher en autonomie

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est la courbe représentant la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x^2$. On note $\mathcal{S}$ la surface délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. L'objectif de cet exercice est d'approximer l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de $\mathcal{S}$ à l'aide de suites.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On partage l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles d'amplitude $\frac{1}{n}$ et sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ (k entier, $0 \leq k \leq n-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$ et le rectangle T_k de hauteur $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. On note u_n la somme des aires des rectangles R_k et v_n celle des rectangles T_k .

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$ car f est croissante sur $[0; 1]$.

- Exprimer l'aire des rectangles R_k et T_k en fonction de k et n .
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ et $v_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
- a. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$, puis que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
c. Déterminer cette limite commune, puis en déduire la valeur de $\mathcal{A}$.



LE SAVIEZ-VOUS

Les suites (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. Cela signifie que : la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. De plus, lorsque deux suites sont adjacentes alors elles convergent et ont la même limite.

Pistes 2. : Utiliser

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

LE SAVIEZ-VOUS

La suite (H_n) est appelée série harmonique.

Pistes 3. a. : Utiliser la relation de Chasles.

$$3.b. H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$$

4. Commencer par calculer $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

Pistes 2. b. et 3. :

Utiliser la question 1.

4. Utiliser la propriété D2 du chapitre 4 p. 138.

PARCOURS 4 Encadrement de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ par des intégrales

140 Chercher en autonomie

Soit (H_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Déterminer le sens de variation de la suite (H_n) .
- a. Justifier que pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout réel x de $[k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$.
b. En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ et interpréter graphiquement cet encadrement.
- a. Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, $H_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n$.
b. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx + 1 - \frac{1}{n+1}$.
- Déterminer la limite de la suite (H_n) .

141 Application

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = H_n - \ln(n)$ où (H_n) est la suite définie dans l'exercice 140.

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

- Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln(x) \leq x - 1$.
- a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}$.
b. En déduire que la suite u est décroissante.
c. Donner un encadrement de la suite (u_n) , puis montrer qu'elle converge vers un réel γ telle que $0 \leq \gamma \leq 1$.
- Montrer que la suite v est croissante et déterminer sa limite.
- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$, puis donner un encadrement de γ d'amplitude 10^{-4} .

142 **RAISONNER** **CALCULER** Le nombre $\frac{\pi}{8}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

1. a. Justifier que f est définie sur $[0; 1]$.
- b. Étudier les variations de f sur $[0; 1]$.
2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan. Soit I le point de coordonnées $(\frac{1}{2}; 0)$ et soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x , avec $0 \leq x \leq 1$.
 - a. Calculer IM^2 puis justifier que $\mathcal{C}$ est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - b. Démontrer que $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}$.

Point Histoire

L'égalité précédente a été démontrée par le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703).


143 **CALCULER** **CHERCHER** **Intégrales liées**

Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$, $J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

1. a. Justifier que la fonction f est définie sur $[0; 1]$.
- b. Calculer la dérivée de la fonction f sur $[0; 1]$.
- c. En déduire la valeur de I .
2. a. Sans calculer les intégrales, vérifier que $J + 2I = K$.
- b. Montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
- c. En déduire les valeurs de J et K .

Piste 2. b. : Utiliser une intégration par parties.

144 **Double intégration par parties**

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties successives.

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx$
2. $J = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$
3. $I = \int_2^e (\ln x) dx$
4. $J = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x) dx$

Piste : Appliquer une première fois la méthode d'intégration par parties, puis la réutiliser sur la nouvelle intégrale.

145 **Aire entre deux courbes**

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O .

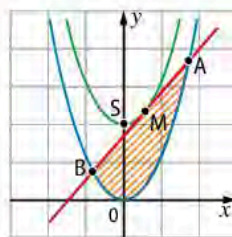
1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
3. Démontrer qu'il existe un unique point B de la courbe $\mathcal{C}$ distinct de A tel que la tangente à $\mathcal{C}$ en B passe par l'origine du repère. Préciser les coordonnées de B .
4. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ et les segments $[OI]$ et $[OA]$.

Piste 4. : Utiliser deux intégrations par parties successives.

146 **CHERCHER** **CALCULER**
Un point mobile et une aire constante

Soit a un réel strictement positif.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + a$ et on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé du plan.



Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse b . On note T_M la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M .

1. Montrer que l'équation réduite de T_M est $y = 2bx + a - b^2$.
2. On note A et B les points d'intersection de T_M et $\mathcal{C}_f$. Montrer que les abscisses de ces points sont $b - \sqrt{a}$ et $b + \sqrt{a}$.
3. Démontrer que l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la corde $[AB]$ et $\mathcal{C}_f$ est constante quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{C}_g$.

147 **Polynômes trigonométriques**

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x) \sin^5(x)$.

- a. Exprimer $\sin^4(x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- b. Montrer que, pour tout réel x ,

$$f(x) = \sin(x)\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos^4(x) + \sin(x)\cos^6(x).$$
- c. Calculer alors $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx$.
2. En utilisant une démarche analogue, calculer :
 a. $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) \sin^3(x) dx$ b. $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4(x) \cos^5(x) dx$

148 **Suites liées**

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x) dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x) dx.$$

1. Calculer I_0 et J_0 .
2. Soit n un entier naturel non nul. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
 a. $I_n + nJ_n = 1$, b. $-nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$.
3. a. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n .
- b. Déterminer les limites des suites (I_n) et (J_n) .

149 **Fonction définie par une intégrale**

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. a. Justifier que la fonction f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$.
- b. Étudier le sens de variation de f sur I .
2. a. Justifier que, pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) \geq e \ln(x)$.
- b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. a. Justifier que, pour tout x de $]0; 1]$, $f(x) \leq e^x \times \ln(x)$.
- b. En déduire la limite de f en 0 .
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
5. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités 1 cm sur l'axe des abscisses et e cm sur l'axe des ordonnées.
 a. Calculer $f''(x)$ sur I .
- b. Justifier que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion noté A , et déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A .
- d. Tracer la tangente T et l'allure de $\mathcal{C}$.

6. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , tel que $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$.
- b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- c. Démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
- d. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Piste 6. b. : Utiliser les variations de f .

6. c. : Utiliser un raisonnement par l'absurde.

MATHS & SES

150 Courbe de Lorenz et coefficient de Gini

On appelle **courbe de Lorenz** la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie et croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
- L est convexe sur $[0 ; 1]$;
- pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $L(x) \leq x$.

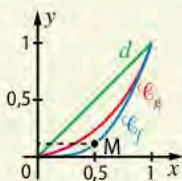
Soit f et g les fonctions définies sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = xe^{x^2-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé du plan.

Partie A : étude mathématique

1. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est une courbe de Lorenz.
2. a. Étudier les variations de la fonction g sur $[0 ; 1]$.
b. Étudier la convexité de la fonction g sur $[0 ; 1]$.
c. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite d d'équation $y = x$.
d. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_g$ est une courbe de Lorenz.

Partie B : applications

Sur le graphique ci-contre, sont tracées sur l'intervalle $[0 ; 1]$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que la droite d . Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G. En abscisse, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise. En ordonnée, $f(x)$ (ou $g(x)$) représente la proportion de la masse salariale détenue par la proportion x des employés les moins bien payés de l'entreprise F (respectivement G).



Par exemple : Le point $M(0,5 ; 0,125)$ est un point appartenant à la courbe $\mathcal{C}_g$. Ainsi, dans l'entreprise F, 50 % des employés ayant les salaires les plus bas détiennent 12,5 % de la masse salariale.

1. Calculer, à 0,1 % près, le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus bas dans l'entreprise G.
2. On appelle **coefficient de Gini** associé à la fonction de Lorenz L , le nombre réel γ_L défini par $\gamma_L = 2A_L$ où A_L est l'aire de la surface délimitée par la droite d , la courbe de la fonction L et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

- a. Montrer que $\gamma_g = \frac{1}{e}$.
- b. Expliquer la phrase : « Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. »
- c. Dans quelle entreprise la distribution des salaires est-elle plus égalitaire ? Justifier.

LE SAVIEZ-VOUS

En économie, la courbe de Lorenz permet de représenter une dispersion. Cette courbe est située en dessous d'une diagonale de référence représentant une répartition égalitaire. Plus la courbe est éloignée de la diagonale, plus la répartition est inégalitaire. La courbe de Lorenz permet également de calculer le coefficient de Gini mesurant le degré d'inégalité. Cet indice varie entre 0 (égalité parfaite) et 1 (inégalité maximale).

151 Le nombre e

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

3. a. Encadrer $(\ln x)^n$ sur l'intervalle $[1 ; e]$ puis démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq 1$.

- b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$.

4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

152 CALCULER CHERCHER Le nombre $\ln(2)$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

1. Soit k un entier naturel non nul.
- a. Justifier que, pour tout réel t de l'intervalle $[n+k ; n+k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n+k}$.

- b. En déduire que $\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n+k}$.

- c. Par une démarche analogue sur l'intervalle $[n+k-1 ; n+k]$, justifier que $\frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{t} dt$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln(2).$$

3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Piste 2. : Utiliser la relation de Chasles.

153 Étude d'une suite

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{x} + \ln(x) \geq 1$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x+1) \ln(x)$.

- a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- b. Étudier le sens de variation de la fonction f .
3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.
a. Interpréter graphiquement le nombre u_n .
b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$.
c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
d. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Piste 1. : Étudier les variations de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x} + \ln(x) - 1.$$

3.b. : Commencer par encadrer $f(x)$ sur $[n ; n+1]$ puis utiliser la propriété de comparaison de l'intégrale.

154 Somme et intégrale

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

- Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.
- Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
 - Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$.
 - En déduire une expression de S_n en fonction de n .
 - Démontrer que la suite (S_n) converge et préciser sa limite.

155 Encadrements de sinus et de cosinus

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$.

- Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
- Étudier les variations de f' puis celle de f .
- En déduire que pour tout réel x de I , $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$.

- Montrer que, pour tout réel x de I ,

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt \leq \int_0^x \cos(t) dt \leq \int_0^x 1 dt.$$

- En déduire que $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$.

- Démontrer que, pour tout réel x de I :

$$a. 1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$b. x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

- En déduire les encadrements de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour x dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

$$5. \text{ Déterminer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos(x) - 2}{x^2}.$$

Piste 3. : Intégrer membre à membre.

4. : Utiliser la parité des fonctions sinus et cosinus.

TRAVAIL EN GROUPE

156 Histoire des mathématiques

Courbe de Gauss

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- Montrer que la fonction f est paire, puis faire une étude de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
- Construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthogonal d'unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.
- En utilisant la méthode des rectangles, déterminer une valeur approchée de l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur $[-3; 3]$.

Point Histoire

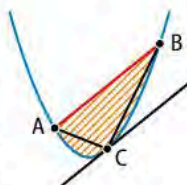
La courbe de Gauss mise en évidence par le mathématicien allemand **Carl Friedrich Gauss** au XIX^e siècle est également appelée courbe « en cloche ». La fonction, dont elle est la représentation, intervient dans le domaine des probabilités.



157 Histoire des mathématiques

Archimède et les paraboles

Dans un repère orthonormé, on note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ où a est un réel non nul. On note A et B deux points de $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives a et b avec $a < b$. C est le point de $\mathcal{P}$ en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{P}$ est parallèle à la droite (AB).



Démontrer que l'aire du segment de parabole (en rouge sur la figure) est égale aux $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC.

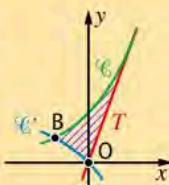
Point Histoire

Archimède (287-212 av. J.-C.) fut l'un des précurseurs du calcul intégral. Il s'est intéressé à l'aire d'un « segment de parabole », domaine compris entre une parabole et un segment dont les extrémités sont deux points de cette parabole.



Prise d'initiatives

- Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la surface colorée ci-contre où $\mathcal{C}$ est la courbe de la fonction exponentielle, T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 et $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = 1 - e^x$.



- On pose $I_n = \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx$ pour n entier naturel. Calculer I_n en fonction de n .

- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2(1 + \ln(x))}{x}.$$

Dans un repère orthonormé du plan d'origine O, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et on donne A(1 ; 0), B(1 ; 2) et C(0 ; 2). Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines de même aire.

- On pose $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+2}} \frac{\ln(x)}{x} dx$ pour n entier naturel. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

TP1 Méthode des rectangles, des milieux et des trapèzes



GÉOMÉTRIE



RAISONNER



CALCULER

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$.

On ne sait pas déterminer en Terminale une primitive de cette fonction. L'objectif de ce TP est le calcul d'une valeur approchée de $\int_0^1 f(x) dx$ à travers différentes méthodes.

Dans tout ce TP, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

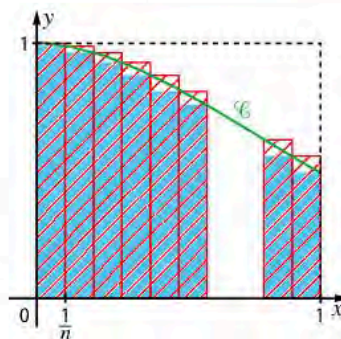
A Questions préliminaires

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormé du plan.

B La méthode des rectangles

On partage l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de même amplitude $h = \frac{1}{n}$. On note $\mathcal{S}$ la surface située sous la courbe $\mathcal{C}$ et on appelle U_n la somme des aires des rectangles contenus dans $\mathcal{S}$ (en bleu) et V_n la somme des aires des rectangles dont la réunion contient $\mathcal{S}$ (hachures rouges).

1. Déterminer en fonction de n les dimensions des rectangles bleus et des rectangles rouges.
2. On considère la fonction Python ci-contre.
 - a. Recopier et compléter les lignes 6 et 7 pour que les variables U et V contiennent en sortie les sommes U_n et V_n , puis programmer cette fonction.
 - b. Que retournent les appels `rectangles(10)`, `rectangles(100)`, `rectangles(1000)` ? Arrondir à 10^{-3} près.
 - c. Conjecturer la valeur exacte de $\int_0^1 f(x) dx$.



```

1 def f(x):
2     return 4/(1+x**2)
3 def rectangles(n):
4     h=1/n; U=0; V=0
5     for k in range(1,n+1):
6         U=...
7         V=...
8     return(U,V)

```

C La méthode des milieux

On partage l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de même amplitude $h = \frac{1}{n}$.

Sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ avec k entier entre 0 et $n-1$, on construit un rectangle de largeur h et de hauteur $f(m_k)$ où m_k est le milieu de cet intervalle. On note alors M_n la somme des aires de ces n rectangles.

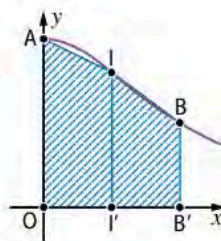
1. Réaliser la construction de ces rectangles dans le cas où $n = 4$ puis montrer que $M_4 \approx 3,147$.
2. a. En adaptant la fonction Python précédente, programmer la fonction `milieux` d'argument n qui renvoie en sortie la somme M_n .
- b. Que retournent les appels `milieux(10)`, `milieux(100)` et `milieux(1000)` ? Arrondir à 10^{-3} près.

D La méthode des trapèzes

1. **Principe** : on partage l'intervalle $[0; 1]$ en deux intervalles d'amplitude 0,5.

On note A, I et B les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 0, 0,5 et 1 et on note I' et B' les projetés orthogonaux de I et B sur l'axe des abscisses. On construit ensuite les trapèzes OI'IA et I'BBI.

- a. Déterminer l'aire des trapèzes OI'IA et I'BBI, puis en déduire une valeur approchée de $\int_0^1 f(x) dx$.
2. Pour améliorer la précision, on partage l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles d'amplitude $h = \frac{1}{n}$.



- a. Construire la courbe $\mathcal{C}$ avec le logiciel de géométrie dynamique.
- b. Créer un curseur n variant de 1 à 200 avec un pas de 1.
- c. Entrer dans la zone de saisie : `SommeTrapèzes[f(x), 0, 1, n]`.
- d. Quel semble être le nombre de trapèzes nécessaire pour que cette somme soit une valeur approchée de $3,14$ à 10^{-2} près ?
- e. Entrer dans la zone de saisie : `SommeInférieure[f(x), 0, 1, n]` et donner le nombre de rectangles situés au-dessous de $\mathcal{C}$ pour obtenir la même précision.

2. Justifier que la somme des aires des trapèzes de hauteur $\frac{1}{n}$ est $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2}$.

3. On considère la fonction Python ci-contre.

- a. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 pour que la fonction `trapezes` retourne la somme T_n .

- b. Programmer cette fonction et la tester pour différentes valeurs de n .

4. Modifier ce programme pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ par cette méthode.

```

def trapezes(n):
    h=1/n
    T=0
    for k in range(0,...):
        T=...
    return(...)

```


TP2 Algorithme de Brouncker pour le calcul de $\ln(2)$ 

RAISONNER



CALCULER

L'objectif de ce TP est d'aboutir une construction permettant d'approcher par une méthode algorithmique le calcul de $\ln(2)$. On note $\mathcal{H}$ l'hyperbole représentant la fonction inverse dans un repère orthonormé du plan d'unité graphique 10 cm.

A Une construction particulière

1. Construire l'hyperbole $\mathcal{H}$ sur l'intervalle $[1; 2]$.

2. a. Tracer les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.

b. Placer les points M_1 et M_2 , intersection de d_1 et d_2 avec l'axe des abscisses.

c. Construire alors le rectangle $M_1M_2M_3M_4$, où M_3 est le point de la courbe $\mathcal{H}$ d'abscisse 2.

e. Vérifier que l'aire du rectangle vert R_1 est égale à $\frac{1}{2}$ u.a.

3. a. Placer le point M_5 milieu du segment $[M_1M_2]$.

b. La parallèle à d_1 passant par M_5 coupe le segment $[M_3M_4]$ en M_6 et la courbe $\mathcal{H}$ en M_7 .

c. Construire alors le rectangle $M_4M_6M_7M_8$.

d. Donner les coordonnées des points M_4 , M_6 , M_7 et M_8 .

e. Montrer que l'aire, en unités d'aire, du rectangle violet R_2 est égale à la différence des aires des rectangles $M_1M_5M_7M_8$ et $M_1M_5M_6M_4$ c'est-à-dire $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

4. On passe du rectangle R_2 au rectangle suivant R_3 , le rectangle orange $M_8M_{10}M_{11}M_{12}$ de la même façon que l'on est passé de R_1 à R_2 .

Montrer que l'aire, en unités d'aire, du rectangle R_3 est égale à la différence des aires des rectangles $M_1M_9M_{11}M_{12}$ et $M_1M_9M_{10}M_8$ c'est-à-dire $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$.

5. a. À partir du point M_{13} , milieu du segment $[M_5M_2]$, construire le deuxième rectangle orange.

b. Vérifier que l'aire, en unités d'aire, de ce rectangle est égale à $\frac{1}{7} - \frac{1}{8}$.

On admettra que les rectangles bleus suivants ont pour aires respectives $\frac{1}{9} - \frac{1}{10}$, $\frac{1}{11} - \frac{1}{12}$, $\frac{1}{13} - \frac{1}{14}$ et $\frac{1}{15} - \frac{1}{16}$...

B L'algorithme de Brouncker

1. Calculer la valeur exacte, puis approchée à 10^{-2} , de l'aire, en unités d'aire, de la surface $\mathcal{S}$ délimitée par l'hyperbole $\mathcal{H}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

2. Le processus de construction décrit précédemment peut se poursuivre. Ainsi, on approche l'aire, en unités d'aire, de la surface $\mathcal{S}$ par la somme des aires de ces rectangles.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

b. Vérifier que la somme des aires des huit rectangles construits précédemment est égale à :

$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \dots + \frac{1}{15 \times 16}$ et donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

3. On considère la fonction Brouncker donnée ci-contre et écrite en langage Python.

a. Recopier et compléter cette fonction.

b. Programmer cette fonction et la tester pour des valeurs de n de plus en plus grandes.

```
1 def Brouncker(n):
2     A=0
3     for k in range (...):
4         B=...
5     return(B)
```

Point Histoire

William Brouncker (1620-1684) était un linguiste et mathématicien anglais. Une partie de ses travaux mathématiques ont traité de la quadrature (mesure des aires) de l'hyperbole. En 1668, Brouncker obtient une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ sous l'hyperbole entre $x=1$ et $x=2$ à l'aide de la formule

$\mathcal{A} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{7 \times 8} + \dots$ qui permet d'obtenir des valeurs approchées de $\ln(2)$.



Question

Comment les mathématiques interviennent-elles dans la mesure des inégalités de revenus ?

Pour se préparer

- Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 108, 156, 157

Enjeu de la question

À partir de données comme les revenus des ménages dans un pays ou des salaires dans les entreprises, on peut mesurer les inégalités et les comparer, en utilisant le calcul intégral.



Les mots-clés

Fonctions • Primitives • Convexité • Calcul intégral • Courbe de Lorenz • Coefficient de Gini

Support de présentation possible

Indicateurs de dispersion

Notion de décile

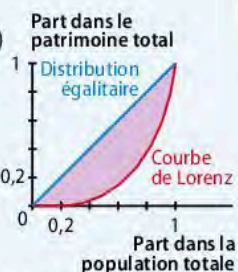
Courbe de Lorenz

Max O. Lorenz (1876–1959)

Représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions :

- L est définie sur $[0; 1]$;
- L est croissante sur $[0; 1]$;
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
- L est convexe sur $[0; 1]$;

Pour tout réel x de $[0; 1]$, $L(x) \leq x$



Coefficient de Gini

Corrado Gini (1884–1965)

Coefficient associé à la fonction L , noté γ_L et défini par : $\gamma_L = 2 \times A_L$ où A_L est l'aire de la surface délimitée par la droite D et la courbe de la fonction L .

Plan possible

- Répartition de données par déciles
- Courbe de Lorenz
- Coefficient de Gini
- Comparaison

Questions d'approfondissement possibles

Quelles sont les différentes méthodes de calcul d'une intégrale ?

Comment peut-on mesurer une dispersion en mathématiques ?

Comment peut-on interpréter un coefficient de Gini égal à 0 ? et égal à 1 ?

Citer plusieurs applications du calcul intégral dans d'autres domaines.

Poursuite d'études et projet professionnel

Pourquoi étudier le calcul intégral ?

Le calcul intégral intervient en physique, biologie et économie où des notions propres à ces matières sont éclairées par ce type de calcul.

Dans quelles études peut-on approfondir cette notion ?

Le calcul intégral est étudié et approfondi dans de nombreuses formations de l'enseignement supérieur : classes préparatoires, licences scientifiques et économiques, IUT, écoles d'ingénieur et écoles de commerce.

Un exemple de métier ?

L'analyste financier surveille la santé et la croissance des sociétés cotées en Bourse afin de conseiller traders, gérants de portefeuille et concepteurs de produits financiers. Il (elle) analyse des bilans annuels d'entreprises, compare les informations recueillies pour émettre des recommandations. L'analyste financier, doté(e) d'un esprit de synthèse, d'une résistance au stress et d'une forte réactivité, travaille dans une banque, une société de bourse ou une compagnie d'assurances.

UN EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que la fonction f est croissante et positive sur $[0; +\infty[$.
On considère la fonction Aireinf d'argument N , écrite en langage Python et donnée ci-contre.

```

1 from math import exp
2 def f(x):
3     return x/(exp(x)-x)
4 def aireinf(N):
5     A=0
6     x=0
7     h=1/N
8     for i in range(1,N+1):
9         A=A+h*f(x)
10        x=x+h
11    return(A)

```

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.frLES QUESTIONS QUI PEUVENT
ÊTRE POSÉES LE JOUR DU BAC

RÉPONSES

Exécuter un programme

1. a. Que retourne Aireinf(4) ?
b. Donner une illustration graphique pour $N = 4$.

Conseil

On peut utiliser la calculatrice pour calculer $f(x)$ à chaque étape en mettant la valeur de A en mémoire.

Méthode

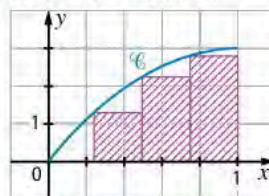
Il est pratique de faire un tableau contenant les valeurs prises par les variables au cours des différents passages dans la boucle.

1. a. $N = 4$ donc la variable h contient 0,25. Avant le passage dans la boucle « For », les variables A et x contiennent toutes deux la valeur 0.
Les différents passages dans la boucle (pour i variant de 1 à 4) permettent le calcul des valeurs successives prises par A et x .
• $i = 1$: A prend la valeur $0 + 0,25 \times f(0) = 0 + 0,25 \times 0 = 0$ et x prend la valeur $0 + 0,25 = 0,25$.
• $i = 2$: A prend la valeur $0 + 0,25 \times f(0,25) \approx 0,060$ et x prend la valeur $0,25 + 0,25 = 0,5$.

	Initialisation	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
A	0	0	0,060	0,169	0,306
x	0	0,25	0,5	0,75	1

On a calculé : $0 + 0,25 \times f(0) + 0,25 \times f(0,25) + 0,25 \times f(0,5) + 0,25 \times f(0,75)$.
Aireinf(4) retourne 0,306 à 10^{-3} près.

- b. Chaque passage dans la boucle « For » permet de calculer la somme des aires des rectangles situés sous la courbe $\mathcal{C}$. Ainsi, pour $N = 4$, il s'agit de la somme des aires des rectangles colorés sur l'illustration ci-contre.



Comprendre un programme

2. a. Expliquer les lignes 7, 8, 9 et 10 en expliquant le rôle des variables.
b. Que retourne cette fonction lorsque N prend des valeurs de plus en plus grandes ?

2. a. La variable N donne le nombre d'intervalles en lesquels on partage $[0; 1]$. La ligne 7 permet le calcul de l'amplitude h de chaque subdivision. À la ligne 8 démarre une boucle « For » parcourue N fois. Les lignes 9 et 10 indiquent qu'à chaque passage dans la boucle, on ajoute à A l'aire du rectangle de dimensions h et $f(x)$.
b. Lorsque N s'accroît, A contient une valeur approchée par défaut de plus en plus précise de l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0; 1]$ puisque la fonction f est continue, positive et croissante sur cet intervalle.

Modifier un programme

3. Modifier la fonction précédente en une fonction nommée EncadrAire afin qu'elle retourne après exécution un encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$.

3. On doit calculer la somme des aires des rectangles dont la réunion contient la courbe $\mathcal{C}$. On utilise une variable B initialisée à 0 : cette variable contiendra les valeurs successives de la somme de ces aires.
Après la ligne 10, on ajoute l'instruction $B = B + h * f(x)$ et on remplace $\text{return}(A)$ par $\text{return}(A, B)$.

THÈMES

- Calcul d'une intégrale
- Intégrations par parties
- Suites définies par une intégrale
- Programmation

Fichier Python

Disponible sur
lycee.editions-bordas.fr

ÉNONCÉ PYTHON RAISONNER CALCULER

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

- 1. a.** Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $F(x) = (-1-x)e^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0; 1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{1-x}$.
b. En déduire que $I_1 = e - 2$.

- 2. a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.
b. Calculer alors I_2 .

c. Recopier et compléter le script de la fonction `termes` ci-contre pour qu'elle renvoie la liste des termes de la suite (I_n) du rang 1 au rang n .

- 3.** Déterminer le sens de variation de la suite (I_n) .

- 4. a.** Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

- b.** En déduire, pour n de $\mathbb{N}^*$, un encadrement de I_n puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

```
1 from math import exp
2 def termes(...):
3     I=exp(1)-2
4     L=[I]
5     for k in range(...):
6         I=...
7         L.append(I)
8     return(L)
```

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ
ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. a. Pour démontrer qu'une fonction F est une primitive de f , on dérive F et on montre que $F' = f$.

b. Pour calculer I_1 , on utilise la primitive F .

Capacité 4, p. 333

2. Pour calculer une intégrale par une intégration par parties, on repère une intégrale de la forme $\int_a^b u'(x)v(x) dx$.

Capacité 6, p. 335

3. Pour étudier le sens de variation de la suite (I_n) , on étudie le signe de $I_{n+1} - I_n$.

Capacité 2, p. 337

4. Pour encadrer l'intégrale d'une fonction, on encadre la fonction et on utilise la propriété de comparaison.

Capacité 5, p. 335

SOLUTION COMMENTÉE

1. a. La fonction F est dérivable sur $[0; 1]$.

Pour tout réel x de $[0; 1]$, $F'(x) = (-1)'e^{1-x} + (-1-x)(-e^{1-x})$

$$F'(x) = -e^{1-x} - (-1-x)e^{1-x}$$

$$F'(x) = -e^{1-x} + (1+x)e^{1-x}$$

$$F'(x) = e^{1-x}(-1+1+x) = f(x).$$

Donc F est une primitive de f sur $[0; 1]$.

b. $I_1 = \int_0^1 xe^{1-x} dx = F(1) - F(0) = -2e^0 - (-1e) = e - 2$.

2. a. $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$. On pose : $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = e^{1-x}$
donc $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -e^{1-x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[0; 1]$. On a donc, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} dx = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

$$\text{Donc : } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

b. $I_2 = (1+1)I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5$.

c. L'argument de la fonction est n . La variable k prend les valeurs allant de 2 à n et la relation de récurrence vue en **a.** permet d'écrire $I = k \cdot I - 1$ en ligne 6.

```
def termes(n):
    I=exp(1)-2
    L=[I]
    for k in range(2,n+1):
        I=k*I-1
        L.append(I)
    return(L)
```

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx - \int_0^1 x^n e^{1-x} dx = \int_0^1 x^n e^{1-x} (x-1) dx \text{ (propriété de linéarité)}$$

Pour x dans $[0; 1]$, $x^n \geq 0$ et $x-1 \leq 0$ et $e^{1-x} > 0$. Donc d'après la propriété de positivité de l'intégrale, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et donc $I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.

4. a. Pour x dans $[0; 1]$ et n dans $\mathbb{N}^*$, $x^n e^{1-x} \geq 0$.

Donc $I_n \geq 0$ (positivité de l'intégrale). De plus, $1-x \leq 1$ donc $e^{1-x} \leq e$ et $x^n e^{1-x} \leq x^n e$ puisque $x^n \geq 0$. Finalement, $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

b. D'après la propriété de comparaison, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n e dx$.

$$\text{Or, } \int_0^1 ex^n dx = e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}. \text{ Donc } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0 \text{ donc d'après le théorème des gendarmes : } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

Sujet A 60 min CALCULER RAISONNER

- THÈMES** • Fonction exponentielle
• Théorème des valeurs intermédiaires
• Calcul d'intégrales et calcul d'aires

CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE

Questions B, 2, c. et C, 2. ► Capacité 4 p. 333

Partie A

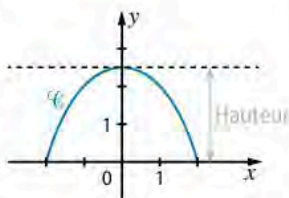
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
2. Justifier que f est paire puis en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les serres en forme de tunnel sont utilisées pour la culture des plantes fragiles et sont construites à partir d'arceaux métalliques identiques ancrés au sol et supportant une bâche en plastique.



Dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre, on modélise un arceau par la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f étudiée en partie A sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.

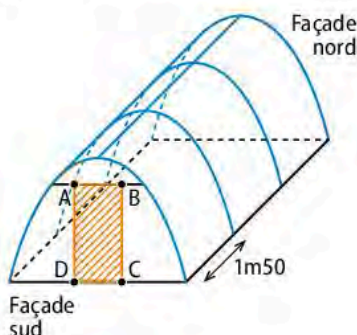
1. Calculer la hauteur d'un arceau.
2. On admet que la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0; \alpha]$ est donnée, en mètres, par :

$$l = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- a. Montrer que, pour tout réel x : $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$.
- b. Calculer l en fonction de α .
- c. Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à $e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel. On fixe au sol quatre arceaux métalliques, espacés de 1,5 mètre.



Sur la façade sud, on prévoit une ouverture représentée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.

On souhaite connaître la quantité, en m^2 , de bâche nécessaire pour réaliser cette serre. Cette bâche est constituée de trois parties : l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (hors ouverture) et la troisième rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Montrer que la quantité Q , en m^2 , de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée par :

$$Q = 4 \int_0^\alpha f(x) dx - 2.$$

2. On prend 1,92 comme valeur approchée de α .

Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche nécessaire à la réalisation de la serre.

Sujet B 35 min

CHERCHER CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL

**THÈMES** • Suite définie par une intégrale

- Calcul d'intégrale
- Intégration par parties

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

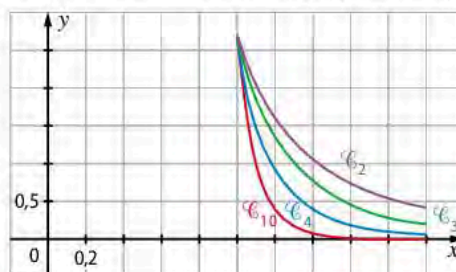
Question 2. a. ► Capacité 4 p. 333

Question 2. b. ► Capacité 6 p. 335

Question 3. ► Capacité 7 p. 335

Question 4. b. ► Capacité 5 p. 333

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_1^2 f_n(x) dx$ où $f_n(x) = \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}$ pour tout réel x de l'intervalle $[1; 2]$. On note $\mathcal{C}_n$ les courbes représentatives des fonctions f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal. On a tracé ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_{10}$.



1. Émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) . Expliquer votre démarche.
2. a. Calculer I_2 .
b. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$$

- c. Calculer I_3 .
3. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n) .
4. a. Justifier que, pour tout réel x de $[1; 2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.
b. En déduire un encadrement de I_n .
c. Étudier la limite éventuelle de la suite (I_n) .

THÈMES • Calcul d'intégrales et calcul d'aires

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- Question 1. ► Capacité 4 p. 333
Question 2. ► Capacité 8 p. 337
Question 3. ► Capacités 6 et 9 pp. 335-337
Question 4. ► Capacité 6 p. 335

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{e^2} \ln(x)$.

Affirmation : L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[e; e^2]$ est égale à 1.

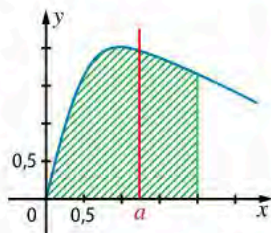
2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = (x-2)^2$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé du plan.

Affirmation : L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$ est égale à 4,5.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{1-x}$.

Affirmation : La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2; 1]$ est égale à $e^3 - 4$.

4. La courbe ci-contre est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.



Affirmation : La valeur exacte du réel positif a tel que la droite d'équation $x=a$ partage le domaine hachuré en deux domaines d'aires égales est $a = \sqrt{5} - 1$.

Sujet D 40 min

REPRÉSENTER CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



THÈMES • Estimation d'intégrales

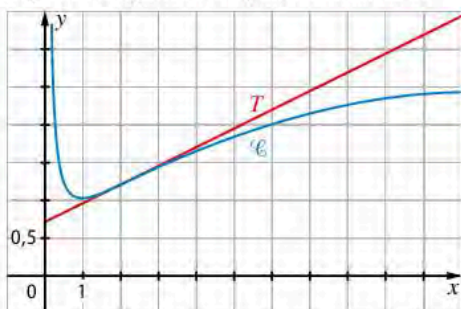
- Calcul d'intégrales et calcul d'aires
- Calcul de valeur moyenne

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- Question 1. ► Capacité 1 p. 331
Question 2. b. ► Capacité 9 p. 337
Question 4. b. ► Capacité 8 p. 337

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f et sa tangente T au point d'abscisse 2.



1. Déterminer graphiquement un encadrement de $\int_2^{10} f(x) dx$ par deux nombres entiers.

2. a. Démontrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = (x+1)\ln(x) - x$ est une primitive de f sur cet intervalle.

b. En déduire la valeur exacte puis celle arrondie au centième de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[2; 10]$.

3. a. Déterminer l'équation réduite de T .

b. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

c. En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et T .

4. On considère le domaine $\mathcal{S}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite T et les droites d'équations $x=2$ et $x=8$. Calculer la valeur exacte, puis celle arrondie au centième, de l'aire du domaine $\mathcal{S}$, en unités d'aire.

Sujet E 40 min

REPRÉSENTER CALCULER

THÈMES • Programmation

- Propriétés de l'intégrale
- Intégration par parties

CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

- Question 2. a. ► Capacité 1 p. 331
Question 3. ► Capacité 9 p. 337
Question 4. c. ► Capacité 8 p. 337

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0; 1]$.

2. On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{5}\right) = f\left(\frac{0}{5}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{5}\right).$$

a. Justifier que, pour tout entier k compris entre 0 et 4,

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x) dx \leq \frac{1}{5} (S_5 - 1).$$

b. En utilisant la relation de Chasles, en déduire que :

$$\frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

3. On considère la fonction **encadrement**, donnée ci-dessous en Python.

```
1 from math import exp
2 def f(x):
3     return (exp(x)/(1+x))
4 def encadrement():
5     U=0
6     V=0
7     for k in range(0,5):
8         U=U+0.2*f(k/5)
9         V=V+0.2*f((k+1)/5)
10    return(U,V)
```

a. Que représentent les variables U et V ?

b. Quel est le rôle de cette fonction ?

4. Soit $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx$.

a. Démontrer que, pour x de $[0; 1]$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.

b. Justifier que $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + I$.

c. Calculer $\int_0^1 (1-x)e^x dx$.

d. En déduire un encadrement de I d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1} .

Utiliser les coefficients binomiaux

1 Dans une classe de 30 élèves, on en choisit au hasard cinq pour constituer une équipe de futsal.

1. Combien d'équipes différentes peut-on former ?
2. Six élèves ne sont pas réellement intéressés pour jouer. Combien y a-t-il alors d'équipes constituées uniquement de joueurs intéressés par le futsal ?
3. En déduire la probabilité qu'au moins un des joueurs non intéressés par le futsal soit sélectionné.

Utiliser un arbre pondéré

2 VRAI/FAUX

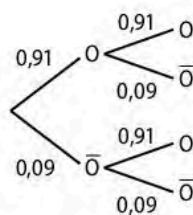
On lance une pièce équilibrée trois fois de suite. On peut s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette situation.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La probabilité d'obtenir trois fois « Pile » vaut $\frac{1}{8}$.
2. La probabilité d'obtenir deux fois « Pile » et une fois « Face » vaut $\frac{1}{8}$.
3. La probabilité d'obtenir au plus une fois « Pile » vaut $\frac{1}{2}$.

3 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Une entreprise compte 91 % d'ouvriers et 9 % de cadres. On note O l'événement « l'employé est un ouvrier ». On choisit au hasard deux employés de cette entreprise. On considère ci-contre l'arbre pondéré illustrant cette situation.



1. La probabilité de l'événement « les deux employés sont des cadres » vaut :

- a. 0,09 b. 0,18 c. $0,09^2$ d. 0,81
2. La probabilité de l'événement « un employé est un cadre et l'autre est un ouvrier » vaut :

- a. 1 b. $0,91 \times 0,09$ c. $2 \times 0,91 \times 0,09^2$ d. 0,1638

Utiliser une variable aléatoire

4 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de devis établis par un réparateur de vélos électriques indépendant.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,25	0,3	0,25	a

1. La somme des probabilités du tableau vaut :

- a. 0,5 b. 0,65 c. 1 d. 0,35
2. La probabilité $P(X \leq 1)$ vaut :
- a. 0,25 b. 0,1 c. 0,35 d. $P(X = 0) + P(X = 1)$

5 On considère la loi de probabilité de l'exercice précédent.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $\{1 \leq X \leq 3\}$, puis celle de l'événement $\{X > 2\}$.



Lors de la coupe du monde de football féminin qui s'est déroulée en 2019 en France, le match opposant la Norvège à l'Australie s'est terminé par une séance de tirs au but, qui a permis à la Norvège d'accéder au quart de finale face à l'Angleterre. Sur une série de cinq tirs supposés indépendants, quelle est la probabilité qu'une gardienne donnée en arrête trois ou quatre, sachant que l'on connaît le taux d'arrêt moyen de la gardienne sur un tir ?

LES NOTIONS DU CHAPITRE

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes
- Épreuve de Bernoulli – Loi de Bernoulli
- Schéma de Bernoulli
- Loi binomiale

Voir exercice 90 page 382



RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos	pp. 367, 369, 370
Animations	pp. 365, 368
Corrigés détaillés	pp. 384, 385, 396, 397

Activité 1

Objectif

Décrire une succession d'épreuves indépendantes.

⇒ Cours 1
Épreuve de Bernoulli

Fort Louvois

Dans le jeu télévisé Fort Louvois, le candidat participe d'abord à l'épreuve de l'araignée, au cours de laquelle il doit retrouver une clé, puis à l'épreuve de la momie où il résout une énigme, puis enfin à l'épreuve de la catapulte au cours de laquelle il doit trouver un code. On note A l'événement « le candidat réussit l'épreuve de l'araignée », M l'événement « le candidat réussit l'épreuve de la momie » et C l'événement « le candidat réussit l'épreuve de la catapulte ». À la suite de nombreuses observations, on estime les probabilités de réussite respectives à chacune de ces épreuves à $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. On suppose que ces épreuves sont indépendantes.



- 1 Lors de la première épreuve, quel est l'ensemble Ω_1 de toutes les issues possibles pour le candidat ?
- 2 On se place dans cette question dans le cadre des deux premières épreuves.
 - a. Écrire l'ensemble décrivant toutes les issues possibles sur les deux premières épreuves à l'aide du produit cartésien de deux ensembles.
 - b. En déduire les couples représentant toutes les issues possibles, et réaliser un arbre illustrant la situation.
 - c. Calculer la probabilité de l'issue (A ; M).
- 3 On se place dans cette question dans le cadre des trois épreuves.
 - a. Écrire l'ensemble décrivant toutes les issues possibles sur les trois premières épreuves à l'aide du produit cartésien de trois ensembles.
 - b. En déduire les triplets représentant toutes les issues possibles, et réaliser un arbre illustrant la situation.
 - c. Calculer la probabilité de l'issue (A ; M ; C), puis de l'issue ($\bar{A}$; $\bar{M}$; $\bar{C}$).

Activité 2

Objectif

Étudier un texte historique.

⇒ Cours 1
Épreuve de Bernoulli

Un texte historique

Dans l'*Ars conjectandi* publié par son neveu Nicolas Bernoulli en 1713, le mathématicien Jacques Bernoulli pose les bases des probabilités actuelles. En voici un extrait.

Je suppose que, dans une urne, à ton insu soient placées trois mille pierres blanches et deux mille pierres noires ; je suppose que pour connaître leurs nombres par expérience tu tires une pierre après l'autre (en remplaçant cependant chaque fois la pierre que tu as tirée avant de choisir la suivante, pour que le nombre des pierres ne diminue pas dans l'urne) ; tu observes combien de fois sort une pierre blanche et combien de fois une noire. On demande si tu peux le faire tant de fois qu'il devienne dix fois, cent fois, mille fois etc. plus probable (c'est-à-dire qu'il devienne moralement certain) que le nombre de fois où tu choisis une pierre blanche et le nombre de fois où tu choisis une pierre noire soient dans ce même rapport sesquialtère* où se complaisent à être entre eux les nombres de pierres ou de cas, plutôt que dans tout autre rapport différent de celui-ci.

*de rapport sesquialtère = de rapport 1,5

- 1 Quelles sont les issues de l'épreuve qui est répétée plusieurs fois dans ce texte ?
- 2 Quelle est la probabilité d'obtenir une pierre blanche lors d'un tirage ?
- 3 En quoi le fait de devoir replacer la pierre dans l'urne après chaque tirage garantit l'indépendance de chacune des épreuves ?

Point Histoire



Nicolas Bernoulli
(1687-1759).

Activité 3

Objectif

Introduire la loi binomiale.

Cours 2
Loi binomiale

Animation

Chemins dans
un arbre –
Loi binomiale



Et pour quelques bonus de plus

Dans un jeu vidéo de plateforme, Yanis fait tourner une roue à la fin de chaque niveau réussi de façon à obtenir un bonus en adéquation avec le type de son personnage.

Cette roue est divisée en six secteurs superposables selon les différents types : plante, feu, eau, air, terre et esprit.

Si le type n'est pas en adéquation avec son personnage, il n'obtient rien.

Le personnage actuel de Yanis possède un double type feu et esprit.

On appelle « succès », noté S , le fait qu'il obtienne un bonus d'un type souhaité.

On définit la variable aléatoire Y qui, à chaque série de n niveaux, associe le nombre de bonus obtenus par Yanis.



- 1 Construire un arbre pondéré qui modélise la situation sur trois niveaux consécutifs.
- 2 Déterminer $P(Y = 0)$ et $P(Y = 3)$.
- 3 a. Parmi trois épreuves, quel est le nombre de façons d'obtenir un seul succès ?
b. Quelle est la probabilité que Yanis obtienne un bonus à la fin du premier niveau uniquement ?
c. Expliquer pourquoi la probabilité de l'événement $\{Y = 1\}$ est égale à $\frac{4}{9}$.
- 4 a. Yanis enchaîne maintenant quatre niveaux consécutifs.
Quel est alors le nombre de façons d'obtenir deux succès exactement ?
b. Quelle est la probabilité de l'événement $\{Y = 0\}$? de l'événement $\{Y = 1\}$? de l'événement $\{Y = 2\}$?
- 5 Donner la loi de probabilité de X .

Activité 4

Objectif

Approcher de façon pratique
la loi binomiale.

Cours 2
Loi binomiale

Point Histoire

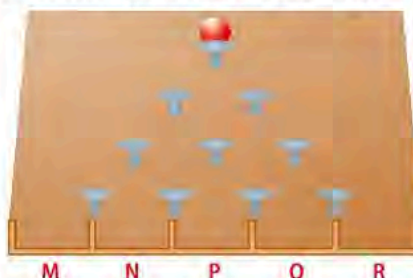
Sir Francis Galton
(1822-1911) est un
anthropologue et
statisticien britannique.

Fichier Tableur

Disponible en ligne sur
lycee.editions-bordas.fr

TABLEUR La planche de Galton

La planche de Galton est un dispositif inventé par Sir Francis Galton. Il s'agit de clous disposés en triangle sur une planche inclinée sur laquelle on lâche une bille, comme ci-dessous.



La bille jaune tombe sur un clou : elle a autant de chances d'aller à droite que d'aller à gauche. Elle rencontre alors un nouveau clou avec les mêmes probabilités de « chute », et ainsi de suite, jusqu'à un clou de niveau 4 qui la dirige vers l'un des casiers M, N, P, Q ou R.

- 1 On a simulé cette expérience sur tableur en laissant tomber 1 024 billes jaunes. Observer et commenter les résultats et la représentation graphique obtenus avec le tableur.
- 2 a. Reproduire la figure ci-dessus matérialisant les différents clous et colorer tous les chemins menant la bille dans le casier N. Donner leur nombre.
b. Compléter cette figure afin de trouver tous les chemins menant à tous les autres casiers. On veillera à changer de couleur pour chaque casier.
c. Grâce à cette modélisation, trouver la probabilité pour une bille d'arriver dans chacun des casiers M, N, P, Q et R.
Est-ce cohérent avec les observations faites à la question 1 ?

1. Épreuve de Bernoulli

Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

PROPRIÉTÉ Lors de la succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i , pour i entier allant de 1 à n .

EXEMPLE Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré à six faces, puis une pièce de monnaie non truquée. Le lancer du dé n'influe pas sur le lancer de la pièce : ces deux épreuves sont indépendantes.

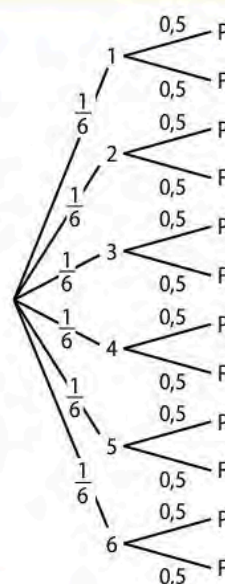
PROPRIÉTÉ La succession de deux épreuves indépendantes d'univers respectifs Ω_1 et Ω_2 a pour univers le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2$.

EXEMPLE L'univers de la première épreuve est l'ensemble des nombres entiers $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; celui de la seconde peut s'écrire $\Omega_2 = \{P; F\}$. L'univers de cette expérience aléatoire est donc le produit cartésien $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{P; F\}$.

Pour déterminer l'ensemble des issues possibles de cette expérience, il faut former tous les couples $(a; b)$, où $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $b \in \{P; F\}$. On peut si besoin s'aider de l'arbre représenté ci-contre.

Les issues de cette expérience aléatoire sont donc : $(1; P), (2; P), (3; P), (4; P), (5; P), (6; P), (1; F), (2; F), (3; F), (4; F), (5; F)$ et $(6; F)$. Chacune de ces issues a ici une probabilité qui vaut $\frac{1}{6} \times 0,5 = \frac{1}{12}$.

REMARQUE Comme les deux épreuves sont indépendantes, sur l'arbre pondéré, les branches du second niveau ne dépendent pas du résultat des branches du premier niveau.



À noter

Il faut bien veiller à l'indépendance de chacune des épreuves, c'est-à-dire que le déroulement d'une épreuve ne modifie pas les probabilités d'une épreuve à venir.

À noter

On utilise les règles de calcul sur les arbres pondérés vues en classe de Première.

Point Histoire



Jacques Bernoulli (1654-1705) est un mathématicien suisse célèbre pour ses travaux en probabilités et leurs applications à l'économie et aux questions sociales.

Épreuve de Bernoulli - Loi de Bernoulli

DÉFINITIONS Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire présentant deux issues dont l'une, nommée « succès », a pour probabilité p et l'autre, nommée « échec » a pour probabilité $1 - p$.

(1) La variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée **variable aléatoire de Bernoulli**.

(2) La loi de probabilité de cette variable aléatoire est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p** .

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

EXEMPLE Lors du lancer d'un dé équilibré, on appelle succès le fait d'obtenir un 4. Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

PROPRIÉTÉ Si X est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p , alors $E(X) = p$; $V(X) = p(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

DÉMONSTRATION

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p.$$

$$\begin{aligned} \text{En outre, } V(X) &= (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p = p^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p \\ &= p \times (1-p) \times (p+1-p) = p \times (1-p). \end{aligned}$$

EXEMPLE Pour la variable aléatoire de l'exemple précédent, $E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

$$V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36} \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

CAPACITÉ

1

Modéliser une succession d'épreuves et la représenter

On considère une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5. Deux boules sont rouges, les autres sont vertes. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard une première boule, à noter son numéro, puis à la remettre dans l'urne. On tire ensuite au hasard une seconde boule dont on note la couleur.

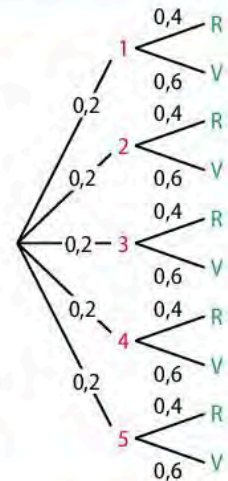
- 1 Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
- 2 Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
- 3 Établir la liste des issues possibles. Quelle est la probabilité de l'issue (1 ; R) ?

Conseil

Pour déterminer les issues possibles d'une succession d'épreuves indépendantes, on peut s'aider d'un arbre.

Solution commentée

- 1 La réalisation de la première épreuve n'a aucune influence sur la réalisation de la seconde, car la boule est remise dans l'urne après tirage.
On peut modéliser cette expérience aléatoire par une succession de deux épreuves indépendantes.
- 2 On obtient l'arbre ci-contre.
- 3 Pour déterminer l'ensemble des issues possibles, il faut former tous les couples $(a; b)$ où $a \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ et $b \in \{R; V\}$.
On peut si besoin s'aider de l'arbre ci-contre. Les issues de cette expérience aléatoire sont donc : (1 ; R), (2 ; R), (3 ; R), (4 ; R), (5 ; R), (1 ; V), (2 ; V), (3 ; V), (4 ; V) et (5 ; V). L'issue (1 ; R) a pour probabilité : $0,2 \times 0,4 = 0,08$.



Voir exercices

50 Pour s'entraîner

101 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

2

Calculer des probabilités dans le cadre d'une succession d'épreuves indépendantes

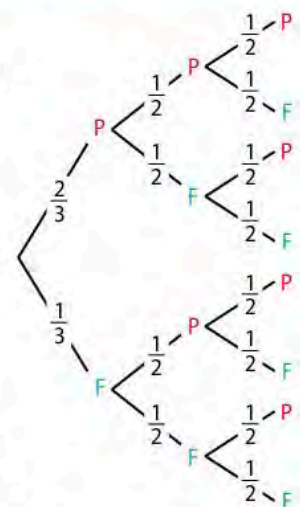
Une expérience aléatoire consiste à lancer trois pièces : une pièce truquée qui tombe deux fois plus souvent sur « Pile » que sur « Face », et deux pièces équilibrées. On modélise cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes.

- 1 Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile » lors du lancer de la pièce truquée ?
- 2 Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
- 3 Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.
- 4 Déterminer la probabilité de l'événement E : « obtenir une seule fois "Pile" ».

Solution commentée

- 1 Soit p la probabilité d'avoir « Pile » et $1 - p$ celle d'avoir « Face ». Alors, $p = 2(1 - p)$, soit $3p = 2$, et $p = \frac{2}{3}$.
- 2 L'univers de chaque épreuve étant $\{P; F\}$, l'univers de cette expérience est $\{P; F\} \times \{P; F\} \times \{P; F\}$.
- 3 En utilisant le modèle de la répétition d'expériences indépendantes, on obtient l'arbre ci-contre.
- 4 On a $E = \{(P; F; F), (F; P; F), (F; F; P)\}$. Pour calculer la probabilité de l'événement E, on calcule la probabilité de chacune des issues qui le constituent.
 $p(P; F; F) = p(P) \times p(F) \times p(F) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
D'autre part, sur l'arbre pondéré, les deux chemins FPF et FFP ont la même probabilité : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Donc la probabilité cherchée est égale à : $\frac{1}{12} \times 2 + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



Vidéo 10:32

Calculer une probabilité sur une succession de deux épreuves indépendantes



Méthode

Pour calculer des probabilités dans le cadre d'une succession d'épreuves indépendantes, on peut s'aider d'un arbre pondéré.

Voir exercices

52 Pour s'entraîner

102 Pour travailler en autonomie

2. Loi binomiale

Schéma de Bernoulli

À noter

L'indépendance est assurée dans le cas de tirages successifs avec remise, ce que l'on appelle des tirages non exhaustifs.

À noter

Lors d'un tirage sans remise de n éléments parmi N éléments, quand n est petit devant N , on peut assimiler ce tirage à n tirages successifs avec remise.

Notation

On note S le succès de probabilité p et $q = 1 - p$.

Animation

Chemins dans un arbre – Loi binomiale

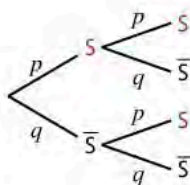


DÉFINITION L'expérience aléatoire consistant en une succession de n épreuves de Bernoulli de paramètre p indépendantes s'appelle un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p** , où p est la probabilité de succès à une épreuve.

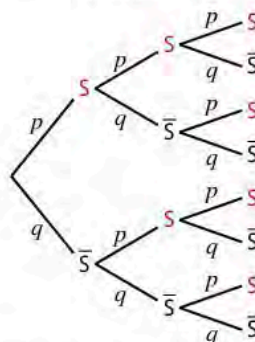
PROPRIÉTÉ L'univers des issues d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est $\{0; 1\}^n$.

EXEMPLES : Le lancer de deux dés, où le succès S est l'obtention d'un 6, est un schéma de Bernoulli de paramètres 2 et $\frac{1}{6}$. Si l'on formalise le succès par un 1 et l'échec par un 0, l'univers de cette expérience aléatoire est $\{0; 1\}^2$.

• Cas où $n = 2$



• Cas où $n = 3$



Les couples formés d'un seul succès sont $(S; \bar{S})$ et $(\bar{S}; S)$.
Or $P(S; \bar{S}) = P(\bar{S}; S) = pq$.
Donc $P(X = 1) = 2pq$.

Les triplets formés d'un seul succès sont $(S; \bar{S}; \bar{S})$, $(\bar{S}; \bar{S}; S)$ et $(\bar{S}; S; \bar{S})$. Or
 $P(S; \bar{S}; \bar{S}) = P(\bar{S}; \bar{S}; S) = P(\bar{S}; S; \bar{S}) = pq^2$.
Donc $P(X = 1) = 3pq^2$.

Le nombre de chemins réalisant k succès est $\binom{n}{k}$, car chaque chemin avec k succès est une partie formée de k éléments S du n -uplet d'une issue.

EXEMPLE : Dans le cas $n = 3$, il y a $\binom{3}{1}$ soit trois chemins qui ne comportent qu'un seul succès.

Loi du nombre de succès

DÉFINITION Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , associe le nombre de succès au cours de ces n épreuves. La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** . On la note $\mathcal{B}(n, p)$.

PROPRIÉTÉ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p . Alors, pour tout entier k compris entre 0 et n , $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, où $q = 1 - p$.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

Dans l'arbre modélisant un schéma de Bernoulli à n épreuves, l'événement $\{X = k\}$ est constitué de toutes les issues comportant k succès.

Ces issues ont toutes la même probabilité $p^k \times q^{n-k}$, d'après une propriété des arbres pondérés. Or le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre associé à un schéma de Bernoulli vaut le coefficient binomial $\binom{n}{k}$. On obtient la formule en faisant la somme des probabilités de toutes ces issues, soit en multipliant $p^k \times q^{n-k}$ par $\binom{n}{k}$.

• Calcul de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$ avec un tableur

Pour $P(X = k)$: =LOI.BINOMIALE(k;n;p;0) . Pour $P(X \leq k)$: =LOI.BINOMIALE(k;n;p;1) .

Modéliser une situation par une loi binomiale

- On considère un jeu de 32 cartes. On tire deux cartes de ce jeu et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de cœurs obtenus. Dans chacune des situations suivantes, dire si X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
 - On tire les deux cartes l'une après l'autre en ne remettant pas la première.
 - On tire les deux cartes l'une après l'autre en remettant la première dans le jeu.
- La ville de Las Vegas accueille environ 100 000 touristes chaque jour. On estime que 5 % des touristes ne viennent pas à Las Vegas pour jouer au casino. On interroge au hasard 10 touristes dans la rue. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de touristes témoignant ne pas être venus dans cette ville pour jouer. Expliquer pourquoi on peut considérer que Y suit une loi binomiale.

Méthode

Pour être dans une situation de loi binomiale, il faut vérifier que l'expérience est bien un schéma de Bernoulli.

Voir exercices

63 Pour s'entraîner

103 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

- Dans cette situation, on tire d'abord une carte dans un jeu qui en comporte 32, puis une carte parmi 31 car une carte a été retirée. La réalisation d'une épreuve affecte donc la suivante : l'expérience n'est pas un schéma de Bernoulli et donc X ne suit pas une loi binomiale.
 - Étant donné qu'il y a remise de la carte, l'épreuve est répétée deux fois de façon identique et indépendante. La probabilité d'un succès (l'obtention d'un cœur) vaut $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ car il y a 8 cœurs dans le jeu. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$.
- Interroger un touriste dans la rue est une épreuve de Bernoulli « le touriste n'est pas venu pour jouer » (le succès) ou « le touriste est venu pour jouer » (l'échec). Comme le nombre de touristes est très grand, on peut assimiler le choix des dix touristes à des tirages successifs avec remise, donc à un schéma de Bernoulli. Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.

Calculer numériquement une probabilité dans le cas d'une variable binomiale X

- Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$. Déterminer la valeur exacte de $P(X = 1)$, puis la valeur exacte de $P(X \leq 2)$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$. Déterminer la valeur exacte de $P(X = 7)$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-4} près.

Solution commentée

- On peut utiliser la formule générale :

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}.$$

Pour $P(X \leq 2)$, on pourrait calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et additionner les résultats. Il est plus aisé d'utiliser le fait que $P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3)$.

$$\text{Ainsi, } P(X \leq 2) = 1 - \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{3-3} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

- En utilisant la formule du cours :

$$\begin{aligned} P(X = 7) &= \binom{10}{7} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-7} \\ &= \frac{10!}{7! \times 3!} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times \frac{1}{4^7} \times \frac{27}{4^3} = \frac{405}{131072} \approx 0,0031. \end{aligned}$$

Vidéo 09:31

Calculer une probabilité sur une loi binomiale



Méthode

Lorsque n est petit, on peut calculer la valeur exacte de la probabilité demandée à l'aide de la formule.

Voir exercices

69 Pour s'entraîner

104 Pour travailler en autonomie

Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation

On lance n fois une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de « Pile » obtenus. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile » dépasse 0,999.

Méthode

Pour résoudre une inéquation d'inconnue n de la forme $a^n \geq b$, on peut utiliser les logarithmes.

Voir exercices

75 Pour s'entraîner

107 Pour travailler en autonomie

Solution commentée

La pièce étant équilibrée, une série de n lancers peut être représentée par un schéma de Bernoulli de paramètres n et $\frac{1}{2}$. X suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

On calcule $P(X \geq 1)$ en utilisant l'événement contraire :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On doit donc résoudre l'inéquation $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0,999$, soit $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,001$.

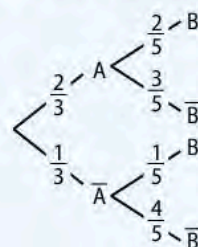
D'où : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(0,001)$, car la fonction $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$.

On obtient : $n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(0,001)$, soit $-n \ln(2) \leq \ln(0,001)$.

$-\ln(2)$ est négatif, donc $n \geq \frac{-\ln(0,001)}{\ln(2)}$. Puisque $\frac{-\ln(0,001)}{\ln(2)} \approx 9,97$ et n entier, la plus petite valeur de n est 10. Il faut donc lancer la pièce au moins dix fois afin que la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile » dépasse 0,999.

Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance ou des probabilités conditionnelles

Pour un recrutement, les candidats doivent passer deux tests qui se soldent chacun par un succès ou un échec. L'événement A est « réussir au premier test » et l'événement B est « réussir au second test ». On considère l'arbre pondéré ci-contre qui représente cette expérience aléatoire.



1 Donner les valeurs des probabilités suivantes :

$$P(A), P_A(B) \text{ et } P_{\bar{A}}(B).$$

2 Calculer $P(B)$.

3 Les événements A et B sont-ils indépendants ?

4 Déterminer $P_B(A)$ et donner une interprétation de cette probabilité.

5 On ajoute un troisième test. On note C l'événement « réussir au troisième test », de probabilité 0,2. Si A et C sont indépendants, que vaut $P(A \cap C)$?

Solution commentée

1 D'après la lecture sur l'arbre pondéré, $P(A) = \frac{2}{3}$, $P_A(B) = \frac{2}{5}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{5}$.

2 On utilise la formule des probabilités totales ; comme A et $\bar{A}$ réalisent une partition de l'univers, on a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$$= P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

3 Étant donné que $P_A(B) \neq P(B)$, les événements A et B ne sont pas indépendants.

4 On a : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$.

Cela signifie qu'un candidat réussissant le second test a quatre chances sur cinq de réussir le premier test.

5 A et C étant indépendants, on a $P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = \frac{2}{3} \times 0,2 = \frac{2}{15}$.

Vidéo 11:46

Utiliser les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales



Conseil

Lorsque l'on dispose d'un arbre pondéré, on peut utiliser la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'un événement se situant au dernier niveau de l'arbre.

Voir exercices

85 Pour s'entraîner

110 Pour travailler en autonomie

Calcul Déterminer un intervalle I pour lequel $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α , ou supérieure à $1 - \alpha$, si X suit une loi binomiale

- 1 Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est 3 %.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 200 gélules, associe le nombre de gélules non commercialisables.
 - a. Quelle est la loi suivie par X ?
 - b. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le plus petit entier b tel que : $P(X \in [0 ; b]) \geq 0,9$.
 - c. Interpréter le résultat précédent.
- 2 On s'intéresse à la proportion de faces marquées 1 obtenues quand on lance un dé tétraédrique bien équilibré (dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4). Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque série de 100 lancers, associe le nombre de 1 obtenus.
 - a. Quelle loi suit Y ?
 - b. Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P(Y \leq a) > 0,025$ et b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b) \geq 0,975$.
 - c. En déduire un intervalle I tel que $P(Y \in I) \geq 0,95$. Interpréter ce résultat.

Méthode

Pour déterminer un intervalle I pour lequel $P(X \in I)$ est inférieure ou supérieure à une valeur donnée, on peut construire avec une calculatrice une table des valeurs $P(X \leq k)$.

Solution commentée

- 1 a. Le fait de choisir une gélule est une épreuve de Bernoulli dont le succès « la gélule est non commercialisable » a pour probabilité 0,03.
La constitution de l'échantillon revient à réaliser 200 fois de façon identique et indépendante cette épreuve de Bernoulli : ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,03$.

b. Comme $P(X \in [0 ; b]) = P(X \leq b)$, on construit la table des valeurs $P(X \leq k)$ pour k compris entre 0 et 100.

En parcourant les valeurs de la table, on obtient $b = 9$, puisque $P(X \leq 8) = 0,85$ et $P(X \leq 9) \approx 0,92$ donc $P(X \leq 9) \geq 0,9$.

c. On peut affirmer qu'au moins 90 % des échantillons de 200 gélules ne contiennent pas plus de 9 gélules défectueuses.

- 2 a. Le dé étant bien équilibré, l'épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir un 1 sur le dé » a pour probabilité $\frac{1}{4}$.

La constitution de l'échantillon revient à réaliser 100 fois de façon identique et indépendante cette épreuve de Bernoulli : ainsi, Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,25$.

b. On construit la table des valeurs $P(Y \leq k)$ pour k compris entre 0 et 100.

En parcourant les valeurs de la table, on obtient $a = 17$, puisque $P(Y \leq 16) \approx 0,02$ et $P(Y \leq 17) = 0,038$ donc $P(Y \leq 17) > 0,025$.

De même, on obtient $b = 34$, puisque $P(Y \leq 33) = 0,972$ et $P(Y \leq 34) \approx 0,984$ donc $P(Y \leq 34) \geq 0,975$.

c. $P(17 \leq Y \leq 34) = P(Y \leq 34) - P(Y < 17)$
 $= P(Y \leq 34) - P(Y \leq 16)$.

$P(Y \leq 34) \geq 0,975$ et $-P(Y \leq 16) \geq -0,025$ donc
 $P(Y \leq 34) - P(Y \leq 16) \geq 0,975 - 0,025$, soit
 $P(Y \in [17 ; 34]) \geq 0,95$.

On peut affirmer que la probabilité d'obtenir entre 17 et 34 fois la face 1 au cours de 100 lancers est au moins égale à 0,95.

Math (Rad Norm) (d/c) Real	
X	Y1
7	0.7481
8	0.8504
9	0.9192
10	0.9598

Math (Rad Norm) (d/c) Real	
X	Y1
16	0.0211
17	0.0378
18	0.063
19	0.0895

Math (Rad Norm) (d/c) Real	
X	Y1
32	0.9554
33	0.9724
34	0.9835
35	0.9905

Voir exercices

80 Pour s'entraîner

108 Pour travailler en autonomie

Calcul de valeurs des probabilités $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$



On va calculer $P(X = 6)$ et $P(X \leq 3)$ pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.

Calculatrice Casio

Appuyer sur la touche **MENU**, choisir le menu **Exe-Mat** puis suivre les instructions ci-dessous.

- 1 Sélection du menu **OPTN** au clavier :



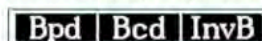
- 2 En sélectionnant le menu **STAT**, on arrive au menu suivant :



- 3 On sélectionne **DIST** ce qui affiche le menu :



- 4 On sélectionne **BINOMIAL**, ce qui affiche :

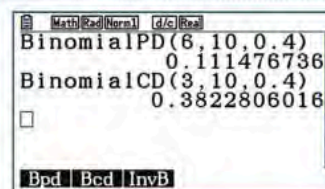


- 5 Pour calculer $P(X = 6)$, on choisit **Bpd**.

On saisit alors : **BinomialPD(6,10,0.4)**.

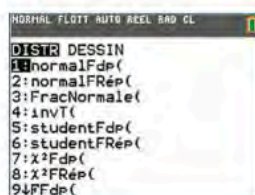
Pour calculer $P(X \leq 3)$, on choisit **Bcd**.

On saisit alors : **BinomialCD(3,10,0.4)**.

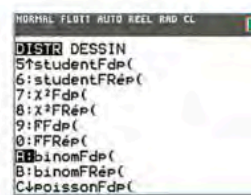


Calculatrice Texas

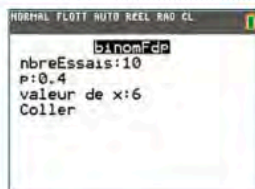
- 1 On sélectionne l'instruction **distrib** au clavier (touches **2nde** puis **var**)



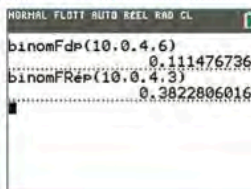
- 2 Pour calculer $P(X = 6)$, avec la flèche de défilement, on recherche le menu **A:binomFdp(**, suivi de **entrer**.



- 3 On entre ensuite les valeurs **nbreEssais : 10**, **p : 0.4**, valeur de **x : 6**, puis on sélectionne **Coller**, et enfin on valide avec la touche **entrer**.



- 4 Pour calculer $P(X \leq 3)$, on sélectionne le menu **B:binomFRép(**, suivi de **entrer**.



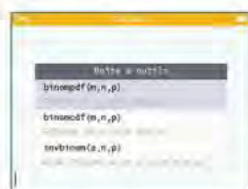
- 5 On entre ensuite les valeurs **nbreEssais:10**, **p : 0.4**, valeur de **x : 3**, puis on sélectionne **Coller**, puis on valide avec **entrer**.

Calculatrice Numworks

- 1 Choisir le menu **Calculs**. Pour calculer $P(X = 6)$, saisir **binompdf(6,10,0.4)** suivi de **EXE**. L'instruction **binompdf** se trouve de la façon suivante :

Boîte à outils puis

Probabilités, ensuite Loi binomiale et enfin **binompdf(m,n,p)**.



- 2 Pour calculer $P(X \leq 3)$, saisir **binomcdf(3,10,0.4)** suivi de **EXE**. L'instruction **binomcdf** se trouve de la façon suivante :

Boîte à outils puis

Probabilités, ensuite Loi binomiale et enfin **binomcdf(m,n,p)**.

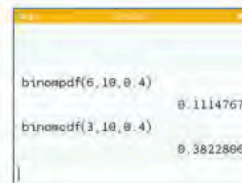


Tableau des valeurs $P(X \leq k)$ ou $P(X = k)$ **CALC**

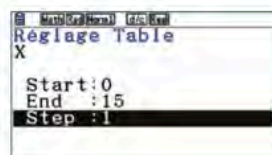
On va construire un tableau des valeurs $P(X \leq k)$ pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,3$.

Calculatrice Casio

Appuyer sur la touche **MENU**, sélectionner le menu **Table**, puis suivre les instructions suivantes :

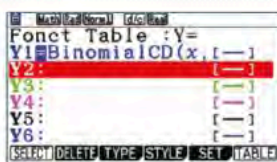
1 Dans **Y1**, saisir **BinomialCD(X,15,0.3)** Suivi de **EXE**.
L'instruction **BinomialCD** se trouve de la façon suivante :
OPTN puis **➤** **F6** puis **STAT** **F3** puis **DIST** **F1** puis **BINOMIAL** **F5** et enfin **Bcd** **F2**.

2 Choisir **SET** **F5**, puis entrer la première **Start** et la dernière valeur **End** : de k , ainsi que le pas, suivi de **EXE**.



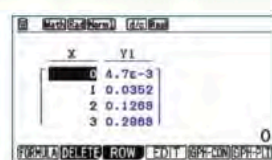
Réglage Table	
X	
Start:	0
End :	15
Step :	1

3 Choisir **TABL**(touche **F6**).



Fonct Table : Y=	
Y1:	BinomialCD(x,15,0.3)
Y2:	
Y3:	
Y4:	
Y5:	
Y6:	

4 Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche **↓** du pavé directionnel.

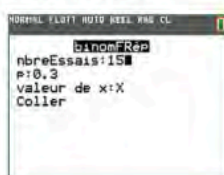


X	Y1
0	4.7E-3
1	0.0352
2	0.1268
3	0.2068

Remarque : pour un tableau des valeurs $P(X = k)$, on utilise l'instruction **BinomialPD(Bpd)**.

Calculatrice Texas

1 Sélectionner au clavier le menu **f(x)**, saisir dans **Y1:BinomFRép(15,0.3,X)** suivi de **entrer**. L'instruction **BinomFRép** se trouve de la façon suivante :
distrib(**2nde** puis **var**) puis avec la flèche de défilement, rechercher le menu **B:BinomFRép**.



BinomFRép	
n:	15
p:	0.3
valeur de x:	X
Coller	

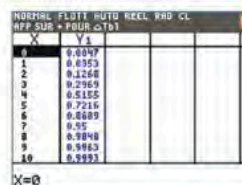
2 Choisir **déf table** (**2nde** puis **fenêtre**), et entrer la première valeur **DébutTbl** ainsi que le pas **ΔTbl**. On entre **Auto** pour **Indpnt** et **Auto** pour **Dépncte**. On passe d'une ligne à l'autre avec les flèches du curseur.



CONFIG TABLE	
DébutTbl=	0
ΔTbl=	1
Indpnt :	Auto Demande
Dépncte :	Auto Demande

3 Sélectionner l'instruction **table** au clavier (**2nde** puis **graphe**). Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche **↓** du pavé directionnel.

REMARQUE : pour un tableau de valeurs $P(X = k)$, on utilise l'instruction **BinomFdp**.

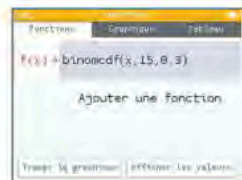


X	Y1
0	0.0047
1	0.0353
2	0.1268
3	0.2068
4	0.3152
5	0.4216
6	0.5089
7	0.55
8	0.5688
9	0.5683
10	0.5593

Calculatrices Numworks

1 Choisir le menu **FONCTIONS**. Saisir dans **f(x) = : binomcdf(x,15,0.3)** suivi de **EXE**. L'instruction **binomcdf** se trouve de la façon suivante :

Boîte à outils  puis **Probabilités**, puis **Loi binomiale** puis **binomcdf(m,n,p)**.



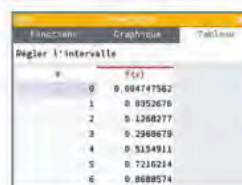
Fonction	
f(x) =	binomcdf(x,15,0.3)
Ajouter une fonction	
Tapez la première : obtenez les valeurs.	

2 Sélectionner l'onglet **TABLEAU**, puis **Régler l'intervalle**. Entrer la première valeur **X début**, la dernière valeur **X fin** ainsi que le **Pas**, puis valider.



Régler l'intervalle	
X début	0
X fin	15
Pas	1
Valider	

3 Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche **↓** du pavé directionnel.



X	f(x)
0	0.004747562
1	0.0352676
2	0.1268077
3	0.2068078
4	0.3154911
5	0.4216214
6	0.5089574

REMARQUE : pour un tableau de valeurs $P(X = k)$, on utilise l'instruction **binomcdf(m,n,p)**.

Calcul mental

1 Convertir les grandeurs suivantes :

- a. 1 609 m en km b. 17 cm en m
c. 33 cL en L d. 250 mL en L
e. 1 m^2 en cm^2 f. 17 mm^2 en cm^2

2 Calculer et simplifier :

- a. $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ b. $\frac{4}{3} + \frac{3}{4}$
c. $6 \times \frac{31-15}{2}$ d. $2 \times \frac{17-5}{4}$
e. $\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ f. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3}$

3 Calculer les pourcentages suivants :

- a. 25 % de 20 % b. 200 % de 30 %
c. 10 % de 120 % d. 5 % de 50 %

4 Déterminer la résistance R équivalente à deux résis-

tances R_1 et R_2 en parallèle grâce à la formule $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

lorsque :

- a. $R_1 = 3$, $R_2 = 6$ b. $R_1 = 10$, $R_2 = 10$

5 Développer et réduire, où x est un réel :

- a. $(2x+3)(3-2x)$ b. $(x^2-3x)(5-x)$

Automatismes

Évolutions et pourcentages

6 QCM Choisir la bonne réponse.

Entre novembre et décembre, le prix d'un jeu vidéo est passé de 50 € à 56 €. Le prix a donc augmenté de :

- a. 10,7 % environ b. 12 %
c. 6 % d. 1,12 %

7 Questions de méthode

1. Le nombre initial d'adhérents à un club de sport l'année de son inauguration est 250. Chaque année, ce nombre augmente de 10 %.

Comment modéliser cette évolution ?

2. L'iode 131 est une molécule qui a une demi-vie de huit jours, c'est-à-dire qu'à partir d'une quantité N de noyaux radioactifs, la moitié se désintègre au bout de huit jours. On s'intéresse à la quantité restante.

Comment modéliser cette évolution ?

Calculs numériques et algébriques

8 Calculer et simplifier :

- a. $A = \frac{2^9 \times (2^5)^{-2}}{(2^7)^2}$ b. $B = \frac{(5^{-4} \times 5^7)^{-4} \times 5^{-2}}{(5^{-5} \times 5^7)^3 \times 5^{-6}}$
c. $C = \frac{(10^{-3})^{-8} \times 10^{-9}}{(10^{-6})^3}$ d. $D = \frac{(10^{-4} \times 5^7)^{-3} \times 5^{-2}}{(5^{-5} \times 10^{-9})^{-4} \times 10^{-6}}$

9 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- a. $e^{2x^2} - e^x = 0$ b. $e^{x^2+1} - e^{2x} = 0$
c. $e^{x^2-5x+4} = 1$ d. $e^{2x+3} - e^{x-3} \geq 0$

10 Question de méthode

Comment faire pour résoudre l'inéquation suivante ?

$$(-x^2 + 4x - 2)(2x + 6x + 8) \geq 0$$

11 Résoudre les systèmes d'équations suivants, où x et y sont des réels :

- a. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$

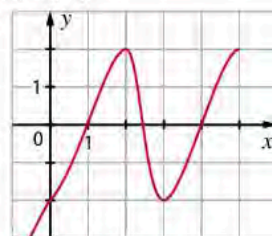
Lectures graphiques

12 On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 5]$.

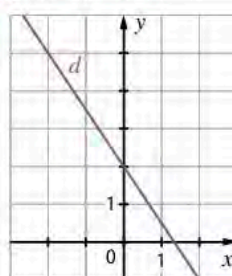
1. Résoudre graphiquement :

- a. $f(x) = 0$ b. $f(x) > 0$
c. $f(x) \leq 0$

2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1; 5]$.



13 On considère la droite tracée dans le repère ci-contre. Par lecture graphique, déterminer l'équation réduite de d .



14 Dans un repère, tracer :

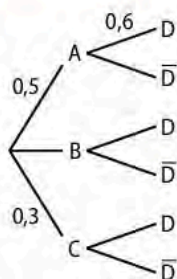
1. La droite d_1 passant par le point $A(1; -1)$ et de coefficient directeur 2.

2. La droite d_2 d'équation réduite $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

Questions flash

- 15** On lance un dé tétraédrique (à quatre faces) équilibré et on note le chiffre apparu sur la face supérieure. On lance ensuite une pièce de monnaie et on note le résultat obtenu.
- Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
 - Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.
- 16** **ORAL** On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note le résultat obtenu. On tire ensuite une carte au hasard dans un jeu et on note sa couleur (cœur, carreau, trèfle ou pique). Donner la liste des issues possibles de cette expérience.
- 17** On a représenté par un arbre pondéré ci-contre une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.
- Quelles sont les issues de la première épreuve ?
 - Quelles sont les issues de la seconde épreuve ?
- Reproduire et compléter l'arbre.
 - On lance un dé tétraédrique et un dé cubique équilibrés. On s'intéresse à l'apparition d'un nombre pair sur chacun des deux dés. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
 - Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.
 - Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair sur chacun des deux dés.



- 18** Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires, numérotées de 1 à 5. On tire au hasard une première boule de cette urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne. On tire une seconde boule et on note son numéro. On note les événements suivants N « la première boule tirée est noire » et P « le numéro indiqué sur la seconde boule est pair ».
- Justifier que l'on peut modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes.
 - Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.

**19 VRAI/FAUX**

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- L'expérience aléatoire « tirer successivement et sans remise trois cartes d'un jeu de 32 cartes » peut être modélisée par une succession d'épreuves indépendantes.
- On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé cubique non truqué et on note le chiffre apparu, puis on lance deux pièces équilibrées et on note les résultats obtenus. Alors le nombre d'issues totales de l'expérience vaut 10.

Loi de Bernoulli

Questions flash

- 20** **ORAL** 1. Proposer une expérience aléatoire dans laquelle une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.
2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,35. Déterminer $P(Y = 0)$.
- 21** Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. Déterminer l'espérance et la variance de X , puis son écart-type.
- 22** Une boîte contient quatre jetons rouges et sept jetons verts. On tire au hasard un jeton de cette boîte.
- Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge ?
 - Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe 1 lorsque le jeton tiré est rouge, et 0 si le jeton tiré est vert. Expliquer pourquoi X suit une loi de Bernoulli et préciser son paramètre.
- 23** Une pièce truquée a deux fois plus de chance de tomber sur « Pile » que sur « Face ». On lance une fois cette pièce et on définit la variable aléatoire X telle que l'événement $\{X = 1\}$ est l'événement « obtenir "Face" » et l'événement $\{X = 0\}$ est l'événement « obtenir "Pile" ».
- Quelle est la probabilité de l'événement $\{X = 0\}$?
 - a. Quelle est la loi suivie par la variable X ?
b. Quel est son paramètre ?
- 24** Dans chacun des cas suivants, déterminer si la variable aléatoire X proposée suit ou non une loi de Bernoulli. Si oui, préciser alors le paramètre de cette loi.
- On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. X prend la valeur 1 si la carte tirée est un carreau, 2 si c'est un cœur, 3 si c'est un trèfle et 4 si c'est un pique.
 - Environ deux tiers de la population française est titulaire du permis de conduire. On interroge au hasard un passant dans la rue. X prend la valeur 1 si le passant est titulaire du permis de conduire, et 0 sinon.
- 25** Pendant le cours de chinois de madame Tchang, 12 élèves proviennent de la Terminale 1 et 18 élèves proviennent de la Terminale 2. Au début de son cours, madame Tchang choisit un élève au hasard et note la classe de cet élève avant de l'interroger.
- Montrer que cette expérience aléatoire peut être modélisée par une loi de Bernoulli, et préciser son paramètre.
 - Peut-on décider d'une autre modélisation par une loi de Bernoulli ?
- 26** **VRAI/FAUX**
- Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Alors :
- $E(X) = p$
 - $\sigma(X) = p(1 - p)$

Schéma de Bernoulli

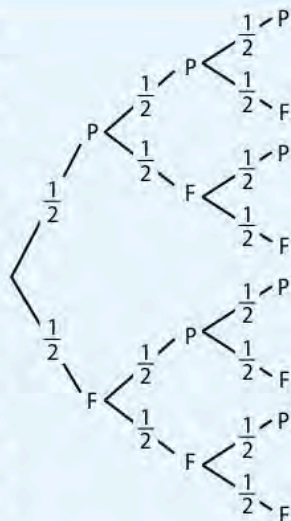
Questions flash

27 ORAL On lance trois fois de suite une pièce bien équilibrée. On considère qu'obtenir « Pile » est un succès.

1. Expliquer pourquoi on peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres.

2. Voici un arbre pondéré illustrant ce schéma de Bernoulli. Quel est le nombre de chemins dans cet arbre pondéré permettant d'obtenir exactement deux fois « Pile » ?

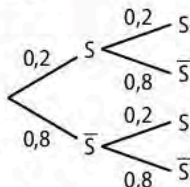
3. Quel est le coefficient binomial qui donne ce nombre de chemins ?



28 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

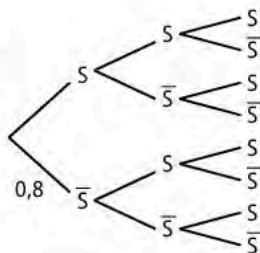
L'arbre pondéré ci-contre représente un schéma de Bernoulli pour lequel le succès est noté S. Les paramètres de ce schéma de Bernoulli sont :

- a. $n = 4$ et $p = 0,8$
- b. $n = 2$ et $p = 0,8$
- c. $n = 2$ et $p = 0,2$
- d. $n = 4$ et $p = 0,2$



29 L'arbre pondéré ci-contre représente un schéma de Bernoulli pour lequel le succès est noté S.

- 1. Donner les paramètres de ce schéma de Bernoulli.
- 2. Reproduire et compléter cet arbre.



30 Réaliser un arbre pondéré illustrant un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et 0,6.

31 Un joueur de basket-ball réalise trois lancers de façon indépendante. La probabilité qu'il marque un panier à chaque lancer est 0,85. Expliquer pourquoi on peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli. En préciser les paramètres.



32 Sur un arbre pondéré modélisant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,3$, que représente le coefficient binomial $\binom{4}{2}$?

33 On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir la face « Pile » est 0,32. Soit S l'événement « obtenir "Pile" ». On note P la variable aléatoire comptant le nombre de « Pile » obtenus.

- 1. a. On répète deux fois l'expérience décrite ci-dessus. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
- b. Réaliser un arbre pondéré illustrant ce schéma.
- 2. Reprendre les questions 1. a. et b. en répétant l'expérience initiale trois fois au lieu de deux.

34 Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne. On note S l'événement « obtenir une boule verte ».

- 1. Déterminer la probabilité de l'événement S.
- 2. On répète trois fois l'expérience ci-dessus. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
- 3. Représenter cette situation par un arbre pondéré.

35 VRAI/FAUX

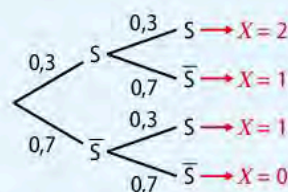
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier. Si l'on répète une expérience de Bernoulli trois fois de suite de façon indépendante, il y a six chemins différents dans l'arbre pondéré correspondant.

Loi binomiale

Questions flash

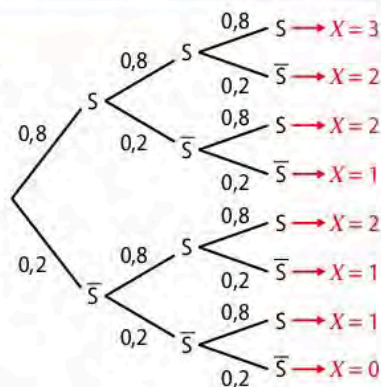
36 On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0,3$.

- 1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 2. On considère l'arbre ci-dessous, illustrant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = 0,3$. Le succès pour chacune des épreuves de Bernoulli est noté S. Quel est le nombre de chemins dans cet arbre pondéré permettant d'obtenir exactement deux succès ?



Quelle est la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$?

37 On considère un schéma de Bernoulli dont on donne la représentation par un arbre pondéré. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de trois résultats, associe le nombre de succès obtenus.



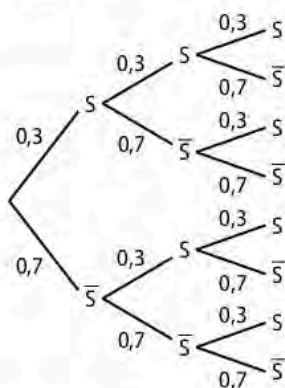
Disponible dans le manuel numérique élève

- 38** Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,3$. En vous aidant d'un arbre pondéré, déterminer les probabilités $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X \leq 1)$.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

- 2.** Quelle est la formule permettant de déterminer $P(Y = 2)$?
Faire ce calcul.

- 40** On considère le schéma de Bernoulli représenté par l'arbre pondéré suivant :



1. Quelle est la loi suivie par X ?

2. Déterminer $P(X = 1)$ et $P(X = 3)$.

- 41** On effectue deux tirages successifs d'une carte dans un jeu de 32 cartes. À chaque fois, on remet la carte dans le jeu. Pour chaque tirage, on note S l'événement « obtenir un as ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant à cette répétition de deux expériences identiques et indépendantes.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux cartes, associe le nombre d'as obtenus.
3. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
4. Décrire l'événement $\{X = 1\}$ puis calculer $P(X = 1)$.

LE SAVIEZ-VOUS

Un jeu de 32 cartes compte 8 cartes par couleur : l'as, le 7, le 8, le 9, le 10 et les trois figures : valet, dame, roi.

- 42** On lance deux fois de suite un dé à six faces bien équilibré. Lors de chaque lancer, on appelle « succès » l'événement « obtenir une face dont le numéro est un multiple de 3 ».

1. Justifier que la probabilité de succès est $\frac{1}{3}$.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le nombre de succès. Donner la loi suivie par X et ses paramètres.

- 43** On dispose de deux dés équilibrés. Le premier est cubique, ses faces étant numérotées de 1 à 6 ; le second est tétraédrique, ses faces étant numérotées de 1 à 4.

On lance le premier dé et on note le numéro obtenu, puis on fait de même avec le second dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de « 3 » obtenus sur l'ensemble des deux dés. X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

- 44** Un sachet de bonbons contient 15 bonbons rouges et 20 bonbons verts. On tire successivement quatre bonbons du sachet, sans jamais en remettre aucun dans le sac.



Soit Z la variable aléatoire qui, à chaque tirage de quatre bonbons, associe le nombre de bonbons rouges obtenus.

Expliquer pourquoi Z ne suit pas une loi binomiale.

- 45** Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0.4$.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Combien existe-t-il de chemins permettant d'obtenir exactement six succès ?
3. Expliquer pourquoi la probabilité de l'événement $\{X = 6\}$ est environ égale à 0,207.

- 46** On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On note la valeur de la carte, puis on la replace dans le jeu. On effectue ainsi cinq tirages successifs. On appelle F la variable aléatoire qui compte le nombre de figures obtenues (valet, dame ou roi) lors des cinq tirages.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une figure au premier tirage ?
2. Expliquer pourquoi F suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.

- 47**  **CALC** Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$.

- 1. a.** Donner les valeurs exactes de $P(X = 5)$ et $P(X = 10)$.
- b.** Donner, à 10^{-3} près, les valeurs approchées des probabilités de la question **1. a.**
- 2.** Calculer, à 10^{-3} près, $P(X \leq 8)$ et $P(X > 5)$.

- 48**  **TABL** On a obtenu ci-après des valeurs approchées des probabilités $P(X = k)$, pour X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.
1. Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, a-t-on saisie en B2 ?
 2. Déterminer des valeurs approchées des événements $\{X = 1\}$ et $\{X \leq 1\}$.

	A	B
1	k	$P(X = k)$
2	0	0,26
3	1	0,39
4	2	0,25
5	3	0,08
6	4	0,02
7	5	0
8	6	0

- 49 VRAI/FAUX

Une urne contient 18 boules rouges et 12 boules noires. On tire successivement cinq boules de l'urne. On considère qu'obtenir une boule rouge est un succès et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de ces succès. Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

« Si on effectue des tirages sans remise, alors X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,6$. »

Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

50 Capacité 1, p. 367

Charlotte écoute un disque vinyle au hasard dans sa collection constituée de 30 % de hip-hop (H), 55 % de rock (R) et 15 % de musique classique (C).

Pendant ce temps, elle lit un livre choisi au hasard parmi les trois présents sur sa table de chevet : un roman policier (P), un livre de science-fiction (SF) et une biographie (B).

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
4. Établir la liste des issues possibles et leurs probabilités.

51 Ahmed se rend à un salon du livre.

Cinq auteurs du genre médiéval-fantastique sont présents, leurs stands sont numérotés de 1 à 5. Ahmed choisit un des auteurs au hasard. On l'autorise à prendre une photo et une seule avec l'auteur choisi. Ahmed étant un piètre photographe, la probabilité qu'il réussisse sa photo est 0,4.

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
4. Établir la liste des issues possibles et leurs probabilités.

52 Capacité 2, p. 367

Pour son petit-déjeuner, Paul choisit au hasard une boisson : un café (C), un thé (T) ou un jus d'orange (J).

Il choisit ensuite indépendamment du choix précédent et au hasard ce qu'il va manger : des flocons d'avoine (A) ou des pétales de blé (B). Dans un cas sur trois, il a également le temps de se préparer un œuf à la coque (O).



1. Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
2. Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.
3. Déterminer la probabilité de l'événement E : « Paul a bu un café, mangé des flocons d'avoine mais n'a pas eu le temps de se préparer un œuf à la coque. »
4. Déterminer la probabilité que Paul boive un thé, mange des pétales de blé et ne mange pas d'œuf à la coque.

378

53 On considère trois urnes : la première contient 12 boules blanches et 18 noires, la deuxième 8 blanches et 12 noires, et la troisième 1 blanche et 5 noires. On tire au hasard successivement une boule de chaque urne et on note sa couleur.

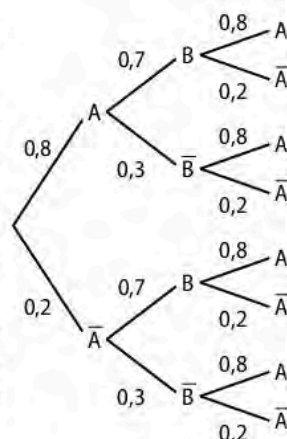
1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ? Justifier.
2. Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.
4. Déterminer la probabilité de l'événement E : « obtenir une seule boule blanche ».

54 On considère l'arbre pondéré suivant :

1. Pourquoi peut-on affirmer que cet arbre illustre bien une succession d'épreuves indépendantes ?

2. Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.

3. Déterminer la probabilité que l'événement A soit réalisé une seule fois au cours de l'expérience.



Loi de Bernoulli

55 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la variable aléatoire X proposée suit ou non une loi de Bernoulli. Si oui, préciser alors le paramètre de cette loi.

1. On lance un dé équilibré. X prend la valeur 1 si le résultat est un multiple de 3, et prend la valeur 0 sinon.
2. On choisit au hasard un élève de Terminale d'un lycée comportant 53 % de filles. X prend la valeur 1 si l'élève est une fille, et 0 sinon.

56 Une question ouverte

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de variance V .

Comment déterminer le paramètre de cette loi ?

Piste → Voir p. 466

57 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

Si Y est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$, alors $E(Y) = \frac{1}{4}$ et $V(Y) = \frac{3}{16}$.

Schéma de Bernoulli

58 Une boîte contient dix jetons noirs et quarante jetons blancs. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux jetons de la boîte ; on appelle succès le fait de tirer un jeton noir.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe le nombre de jetons noirs tirés.

1. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
2. Réaliser un arbre pondéré illustrant ce schéma.
3. Calculer $P(X=1)$, puis $P(X \geq 1)$.

59 Une urne contient deux fois plus de boules rouges que de boules noires.

1. On tire une boule de l'urne.

Quelle est la probabilité p que cette boule soit rouge ?

2. On tire trois fois de suite avec remise une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges tirées.

- a. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
- b. Réaliser un arbre pondéré illustrant ce schéma.
- c. Déterminer $P(X=2)$, puis $P(X \geq 2)$.

MÉTHODE À L'ORAL

60 Un souffleur de verre réussit une pièce très spécifique avec une probabilité égale à 0,35.



On appelle succès (S) le fait qu'il réussisse cette pièce.

Il tente trois essais que l'on considère comme étant indépendants les uns des autres.

Soit V la variable aléatoire qui, à une série de trois essais, associe le nombre de pièces réussies.

1. Comment modéliser cette expérience aléatoire ?
2. Comment illustrer cette expérience aléatoire ?
3. Expliquer comment on peut calculer la probabilité de l'événement $\{V=2\}$.

MATHS & SVT

61 Lors d'une épidémie de fièvre ovine, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt, on peut la guérir, sinon elle est mortelle.



Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,045. On choisit trois animaux au hasard. La taille de cet élevage permet de considérer les épreuves comme indépendantes.

On note M la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
2. Réaliser un arbre pondéré illustrant ce schéma.
3. Calculer la probabilité de l'événement $\{M=0\}$.
4. Calculer $P(M=1)$.
5. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux des animaux aient un test positif ?

62 VRAI/FAUX

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Un arbre pondéré illustrant un schéma de Bernoulli possède un nombre pair de branches.

Loi binomiale

63 Capacité 3, p. 369

On lance cinq fois de suite un dé bien équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On s'intéresse à la variable aléatoire X qui, à chaque série de cinq lancers, associe le nombre de fois où un nombre supérieur ou égal à 15 apparaît.



La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

LE SAVIEZ-VOUS

Un polyèdre régulier à 20 faces s'appelle un icosaèdre. Les dés à 20 faces sont utilisés dans certains jeux de rôle, comme *Donjons et Dragons*.

64 On sait que sur un site de vente en ligne, environ 5 % des commandes font l'objet d'un retour.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la variable aléatoire X proposée suit ou non une loi binomiale. Si oui, préciser alors les paramètres de cette loi.

1. On examine des ventes dans la base de données jusqu'à ce qu'on trouve un retour. On note alors X le nombre de ventes examinées.
2. On examine 100 ventes dans la base de données et on note X le nombre de retours.

65 On estime que 71 % de la population française possède des lunettes de vue. On interroge cinq personnes au hasard dans la rue. On considère que ces cinq personnes portent des lunettes de vue de façon indépendante.

Soit X la variable aléatoire qui, à une série de cinq personnes interrogées, associe le nombre de personnes possédant des lunettes.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

66 Un panier contient 15 fraises et 35 framboises. On tire au hasard et successivement trois fruits, que l'on mange après chaque tirage. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fraises mangées.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

MATHS & SVT

67 Sur une population donnée, on sait qu'environ 15 % des personnes sont porteuses saines d'un virus. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la variable aléatoire Y proposée suit ou non une loi binomiale. Si oui, préciser alors les paramètres de cette loi.

1. On examine des personnes au hasard jusqu'à en trouver une qui soit porteuse saine du virus. On note Y la variable aléatoire associée au nombre de personnes examinées.
2. On examine 500 personnes au hasard et on note Y le nombre de personnes porteuses saines du virus.

68 LOGIQUE Soit la proposition suivante : « Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale, alors elle suit une loi de Bernoulli. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. Énoncer la proposition réciproque. Est-elle vraie ou fausse ?

69 Capacité 4, p. 369

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$.

Déterminer la valeur exacte de $P(X = 1)$, puis la valeur exacte de $P(X \leq 2)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,8$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de $P(X = 17)$.

70  CALC Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,1$.

1. Déterminer les valeurs exactes de $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

2. Déterminer les valeurs approchées à 10^{-4} près des probabilités de la question 1.

3. En déduire une valeur approchée à 10^{-4} près de $P(X \geq 3)$.

71 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et p , avec p réel de $[0 ; 1]$.

1. Exprimer, en fonction de p , la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$.

2. Exprimer, en fonction de p , la probabilité de l'événement $\{X = 3\}$.

72  CALC Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,9$.

1. Calculer, à 10^{-4} près, $P(X = 27)$ et $P(X \geq 27)$.

2. Calculer, à 10^{-4} près, $P(21 \leq X \leq 25)$.

73  CALC Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,55$.

Calculer, à 10^{-4} près, $P(90 \leq Y \leq 100)$.

74 Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,6$.

On donne $P(Z \leq 15) \approx 0,175$ et $P(Z \leq 22) \approx 0,956$.

Déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de $P(16 \leq Z \leq 22)$.

75 Capacité 5, p. 370

Dans un jeu vidéo, la probabilité de réussir le lancement d'un sort spécial est 0,7.

1. Le sort est lancé quatre fois de suite. On suppose que la réussite d'un sort n'influe pas sur les autres.

a. Montrer que la probabilité qu'aucun des quatre sorts ne soit réussi est 0,0081.

b. Calculer la probabilité qu'au moins un sort soit réussi.

2. a. On lance le sort n fois de suite, et on note X la variable aléatoire qui, aux n lancements de sorts, associe le nombre de lancements de sorts réussis.

Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n .

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour que la probabilité qu'au moins un sort soit lancé avec succès dépasse 0,999.



76 Pour financer une sortie, les membres d'une association multisport organisent une loterie. 70 % des membres de cette association pratiquent le tennis. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard et de manière indépendante pour tenir la loterie.

1. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux membres pratiquant le tennis parmi ceux qui sont choisis.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre pratiquant le tennis parmi les membres choisis.

a. Exprimer p_n en fonction de n .

b. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que la probabilité p_n soit supérieure ou égale à 0,95.

77  CALC  TABLEUR Une urne contient 50 % de boules blanches. On tire au hasard et avec remise, n boules de l'urne dont on note la couleur.

Soit X la variable aléatoire qui, au tirage de n boules, associe le nombre de boules blanches tirées.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.

2. Déterminer $P(X = 0)$, puis $P(X = 1)$ en fonction de n .

3. En utilisant une calculatrice ou un tableur, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins deux boules blanches soit supérieure à 0,99.

78 On suppose que chacun des moteurs d'un avion peut tomber en panne indépendamment des autres avec une probabilité p . L'avion reste en vol si au moins la moitié de ses moteurs fonctionnent.



1. On considère un avion avec deux moteurs.

a. Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.

b. Exprimer en fonction de p la probabilité que l'avion ne puisse pas rester en vol.

2. On considère un avion à quatre moteurs.

En remarquant que l'avion ne peut rester en vol si trois ou quatre de ses moteurs sont en panne, exprimer en fonction de p la probabilité que l'avion ne puisse pas rester en vol.

3. Déterminer selon quelles valeurs de p on a plus intérêt à prendre un avion à deux moteurs qu'un avion à quatre moteurs.

Piste 3. : On se ramènera à la résolution de l'inéquation $-3p^2 + 4p - 1 > 0$.

79 Une urne contient dix boules rouges et dix boules bleues. On tire n boules successivement et avec remise, avec n entier supérieur ou égal à 2.

On considère les événements suivants :

A : « on obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « on obtient au plus une boule rouge ».

Quel est le plus probable des événements A et B ?

80  **CALC** *Capacité 7, p. 371*

Dans une population donnée, 30 % des personnes interrogées se disent sans religion.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 200 personnes choisies au hasard, associe le nombre de personnes se disant sans religion.

1. Quelle est la loi suivie par la variable X ?
2. Déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,9$.
3. En déduire un intervalle $[a; b]$ tel que la probabilité $P(X \in [a; b])$ soit supérieure à 90 %.
4. Interpréter le résultat précédent.

81  **CALC** Une enquête réalisée auprès des Français de plus de 18 ans révèle que 57 % d'entre eux disent jouer à des jeux vidéo.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 200 personnes de plus de 18 ans choisies au hasard, associe le nombre d'adeptes de jeux vidéo.

1. Quelle loi suit la variable X ?
2. Déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,95$.
3. En déduire un intervalle $[a; b]$ tel que la probabilité $P(X \in [a; b])$ soit supérieure à 95 %.
4. Interpréter le résultat précédent.

82  **CALC** Dans un grand groupe industriel, une étude montre que 53 % des salariés se disent stressés par leur travail.

1. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 150 salariés du groupe choisis au hasard, associe le nombre de personnes se disant stressées par leur travail.

Quelle loi suit Y ?

2. Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P(Y \leq a) > 0,005$ et b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b) \geq 0,995$.
3. En déduire un intervalle I tel que $P(Y \in I) \geq 0,99$.
4. Interpréter le résultat précédent.

83  **PYTHON** On considère la fonction Python dont on donne le script ci-dessous.

```
1 from random import *
2 def ber():
3     S=0
4     for k in range(4):
5         a=random()
6         if a<0.4:
7             S=S+1
8     return(S)
```

1. On suppose que l'appel `random` renvoie successivement les valeurs 0,1, 0,5, 0,6 et 0,2.

Que retourne alors l'appel `ber()` ?

2. Modifier cette fonction pour qu'elle prenne en argument deux variables n et p et simule une loi binomiale de paramètres n et p .

84 **VRAI/FAUX**

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 10 et p .

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. X prend toutes les valeurs entières de 1 à 10.

2. $P(X = 0) = (1 - p)^{10}$.

3. $P(X = 4) = 4p^4(1 - p)^6$.

Indépendance – Probabilités conditionnelles – Formule des probabilités totales

85 *Capacité 6, p. 370*

Trois candidats A, B et C se présentent à une élection. Ils obtiennent respectivement la moitié, les trois dixièmes et le cinquième des suffrages. D'autre part, on sait que 50 % des électeurs de A, 30 % des électeurs de B et 40 % des électeurs de C sont des hommes.

1. Décrire l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
2. En déduire la probabilité d'interroger un homme ayant voté pour le candidat C.
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité que la personne interrogée soit une femme.

86 Sur son trajet pour aller au travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. La probabilité pour que le feu soit vert au moment où il arrive à sa hauteur est 0,4 pour le premier feu et 0,45 pour le second feu.

On note A l'événement « le premier feu est vert » et B l'événement « le second feu est vert ». On fait l'hypothèse que ces deux événements sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste fasse son trajet sans avoir à s'arrêter ?
2. Calculer $P(\bar{A} \cap B)$. Interpréter cet événement dans le contexte de l'exercice.

87 Une question ouverte

Dans une classe de 30 élèves, il existe un club info et un club théâtre. Le club info est composé de 10 membres, et celui de théâtre de 6 membres. On ne connaît pas le nombre d'élèves qui sont membres des deux clubs à la fois, mais on sait que si on interroge un élève de la classe pris au hasard, les événements I : « l'élève fait partie du club info » et T : « l'élève fait partie du club théâtre » sont indépendants. Combien d'élèves font partie des deux clubs en même temps ?

Piste → Voir p. 466

MATHS & PHYSIQUE

88 Une usine dispose de deux unités de production de composants électroniques, A et B. La production journalière de l'unité A est de 600 pièces, celle de l'unité B est de 900 pièces.



On prélève au hasard un composant de la production d'une journée dans l'usine. La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est 0,014. La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est 0,024.

On note D l'événement « le composant présente un défaut de soudure », A l'événement « le composant est produit par l'unité A » et B l'événement « le composant est produit par l'unité B ».

1. Donner les valeurs de $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$
2. Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.
3. Déterminer la probabilité que le composant présente un défaut.
4. On prélève un composant qui présente un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

Problèmes relevant de la loi binomiale

89 Dans une équipe de basket, on sait que cinq joueurs réussissent leurs deux lancers francs successifs avec une probabilité égale à 0,45. Lors d'un match, ces cinq joueurs effectuent de façon indépendante deux lancers francs successifs.

On appelle succès le fait de réussir deux lancers francs successifs. On considère la variable aléatoire X qui, à un match, associe le nombre de succès.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement $\{X = 2\}$.
3. Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, qu'il y ait au plus deux basketballeurs qui réussissent leurs deux lancers francs ?

RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

90 On a établi par des statistiques des saisons précédentes que, lors d'un tir au but, la gardienne d'une équipe de football arrête le ballon avec une probabilité égale à 0,71.



On note X la variable aléatoire qui, à une série de cinq tirs au but, associe le nombre de ballons qu'elle arrête. Le fait d'arrêter le ballon lors d'un tir ne conditionne pas les autres arrêts potentiels.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Sur une série de cinq tirs, déterminer la probabilité que cette gardienne en arrête trois ou quatre.

91 Eva s'entraîne régulièrement à un jeu de casse-briques sur son smartphone. La probabilité qu'elle franchisse le niveau 7 est égale à 0,8. Elle joue successivement cinq parties indépendantes.

Soit X la variable aléatoire qui, aux cinq parties, associe le nombre de fois où Eva franchit le niveau 7.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement $\{X = 3\}$.
3. Calculer la probabilité qu'Eva réussisse au moins une fois à franchir le niveau 7.

92 Dans un chenil, on vaccine 15 chiots de façon indépendante.



Lors des vaccinations précédentes, 20% des chiots ont présenté une forte réaction au vaccin.

Soit X la variable aléatoire qui, à un groupe de 15 chiots, associe le nombre de chiots qui ont eu une réaction forte suite à cette vaccination.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Calculer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$. Comment interpréter cet événement ?
3. Calculer la probabilité qu'au moins deux des chiots aient eu une forte réaction.

93 Dans une fabrique d'appareils photo numériques, 97% des appareils sont conformes. On stocke l'ensemble des appareils dans des conteneurs de 300 unités.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque conteneur, associe le nombre d'appareils conformes.

On suppose que la production est suffisamment grande pour qu'on puisse assimiler cette épreuve à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Déterminer $P(X = 290)$.
3. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au maximum un appareil non conforme dans le conteneur.

MATHS & SVT

94 Des études médicales ont démontré que 3% des individus d'une population étaient porteurs d'une certaine maladie.

On choisit au hasard un échantillon de 200 individus dans cette population. On suppose la population suffisamment grande pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité que, parmi ces 200 individus :

- a. aucune personne ne soit malade ;
- b. au plus trois personnes soient malades ;
- c. entre dix et vingt personnes soient malades.

95 Paul était une pieuvre mâle de l'aquarium d'Oberhausen en Allemagne. Paul est devenu célèbre auprès des parieurs pour ses « prévisions » de résultats des matchs de l'équipe d'Allemagne de football lors de l'Euro 2008, puis lors de la Coupe du monde 2010.

Paul le poulpe faisait connaître ses prévisions en ouvrant la boîte aux couleurs de l'équipe gagnante.

Soit X la variable aléatoire qui associe aux quatorze prévisions le nombre de bonnes réponses données. On considère que la pieuvre répond au hasard et a donc une chance sur deux de choisir la bonne boîte. Il y a indépendance des réponses pour chaque pronostic.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Déterminer les probabilités $P(X = 12)$, puis $P(X \geq 12)$, à 10^{-4} près.

LE SAVIEZ-VOUS

Sur les 14 prévisions de Paul le poulpe, 12 se sont révélées exactes.

96 Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle.

Les relevés réalisés au cours des premières journées d'enquête permettent de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait. Un employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

On suppose que le fichier client est suffisamment important pour que les choix soient considérés comme étant réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

1. Déterminer la probabilité que cet employé obtienne cinq souscriptions un jour donné. On arrondira le résultat au centième.
2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. On donnera une valeur arrondie au dix-millième.

MATHS & SVT

97 Suite à un pic de pollution, la ville de Lyon décide d'interdire, pendant une journée, la circulation en ville aux véhicules non prioritaires ne portant pas une vignette Crit'Air avec un numéro inférieur ou égal à 3.



La proportion de véhicules n'ayant pas le droit de circuler ce jour-là est estimée à 41 %. Dix contrôles sont effectués au hasard de façon indépendante.

On note I la variable aléatoire égale au nombre de véhicules en infraction.

Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité des événements suivants :

- A : « quatre véhicules exactement sont en infraction » ;
- B : « au plus trois véhicules sont en infraction ».

98 Lors de leur entraînement, un couple de patineurs réussit chacun de ses sauts avec une probabilité égale à 0,7.

En compétition, on admet que leur concentration est telle que la réussite d'un saut n'influe pas sur les autres sauts.

Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'ils réussissent cinq sauts sur les six effectués lors d'une compétition ?



99 Dans une coopérative fruitière, on estime la proportion de fruits présentant un défaut d'aspect à 5 %. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de douze fruits, associe le nombre de fruits examinés présentant un défaut d'aspect.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X = 3\}$.
3. Calculer $P(4 \leq X \leq 7)$.
4. Si le nombre de fruits présentant un défaut dans un lot est strictement supérieur à deux, le lot est soldé. Quelle est la probabilité que cela arrive ?

Problème de synthèse

100

Dans une population de grand effectif, on a observé que 5 % des individus sont allergiques au médicament A et que 40 % sont allergiques au médicament B.

Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire et ce de façon indépendante. On examine un échantillon de n analyses choisies au hasard. La variable aléatoire X associe à ces n analyses le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. On suppose que $n = 10$.

Calculer, à 10^{-2} près, les probabilités de chacun des événements suivants :

- aucune analyse ne révèle l'allergie à A ;
- au moins deux analyses révèlent l'allergie à A.

3. Un organisme tiers établit que 2 % des individus sont allergique à A et B simultanément.

Peut-on en conclure que les événements « être allergique à A » et « être allergique à B » sont indépendants ?

4. On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,4$.

a. Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P(Y \leq a) > 0,025$ et b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b) \geq 0,975$.

b. En déduire un intervalle I tel que $P(Y \in I) \geq 0,95$.

c. Dans un échantillon de 100 analyses, on a observé que 30 individus révèlent l'allergie à B.

Que peut-on en conclure ?

Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

L'essentiel

Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

La probabilité d'une issue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i , pour i entier allant de 1 à n .

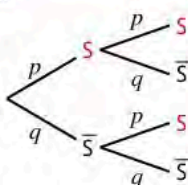
La succession de deux épreuves indépendantes d'univers respectifs Ω_1 et Ω_2 a pour univers $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Schéma de Bernoulli

Succession de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , identiques et indépendantes.

• L'univers des issues d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est $\{0, 1\}^n$.

• $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre associé à un schéma de Bernoulli.



Loi binomiale

Loi binomiale de paramètres n et p

Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , associe le nombre de succès au cours de ces n épreuves.

• La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p . On la note $\mathcal{B}(n, p)$.

• Pour tout entier k compris entre 0 et n , $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, où $q = 1 - p$.

Épreuve de Bernoulli de paramètre p

Expérience aléatoire présentant deux issues dont l'une, nommée « succès », a pour probabilité p et l'autre, nommée « échec » a pour probabilité $1 - p$.

• La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée **variable aléatoire de Bernoulli**.

• La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p .

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

$$E(X) = p, \quad V(X) = p(1 - p) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}.$$

Faire le point avec des exercices corrigés

Utiliser le modèle de la succession d'épreuves indépendantes

* 101 10 min Capacité 1, p. 367

On suppose qu'il y a équiprobabilité des sexes à la naissance. On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une famille de trois enfants.

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
4. Établir la liste des issues possibles et leurs probabilités.

* 102 15 min Capacité 2, p. 367

On considère un jeu de 52 cartes comportant 13 trèfles.

1. On tire une carte au hasard.
Quelle est la probabilité p que cette carte soit un trèfle ?
2. On tire trois fois de suite avec remise une carte de ce jeu. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois cartes, associe le nombre de trèfles obtenus.
 - a. Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
 - b. Réaliser un arbre pondéré représentant cette situation.
 - c. Déterminer, à l'aide de cet arbre pondéré, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ puis $P(X \geq 2)$.

Reconnaître et utiliser la loi binomiale

* 103 10 min Capacité 3, p. 369

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

Une urne contient 40 jetons blancs et 10 jetons noirs. On tire cinq jetons de l'urne et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de jetons noirs tirés. X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,2$ si les tirages successifs sont réalisés :

- sans remise du jeton tiré ;
- avec remise du jeton dans l'urne.

* 104 15 min Capacité 4, p. 369

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0,85$.

- a. Donner les valeurs exactes des probabilités $P(X=21)$ et $P(X=22)$.
- b. Calculer, à 10^{-3} près, les valeurs des probabilités précédentes.
2. Calculer, à 10^{-3} près, $P(X \leq 19)$ et $P(X > 20)$.

* 105 15 min Capacité 4, p. 369

On administre un vaccin à des enfants en bas âge. La proportion des enfants présentant une forte réaction à ce vaccin est 15 %. On examine vingt enfants d'une école maternelle. Le nombre d'enfants dans cette école est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler cet examen à vingt tirages indépendants.

Quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que quatre enfants exactement présentent une forte réaction au vaccin ?

Quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que le nombre d'enfants présentant une forte réaction soit compris entre 3 et 7 ?

* 106 20 min Capacité 4, p. 369

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Un magasin informatique vend le même jour quatre ordinateurs identiques à des particuliers. On estime que la probabilité pour que ce type de matériel soit en état de fonctionnement cinq ans plus tard est 0,2. On suppose l'indépendance des pannes de ces ordinateurs. Alors, cinq ans plus tard, on peut établir que :

- la probabilité pour que les quatre ordinateurs soient en service est, à 10^{-3} près :
a. 0,8 b. 0,16 c. 0,002 d. 0,410
- la probabilité pour que trois ordinateurs exactement ne fonctionnent pas est, à 10^{-3} près :
a. 0,996 b. 0,026 c. 0,590 d. 0,410
- la probabilité pour qu'au moins deux des ordinateurs soient en service est, à 10^{-3} près :
a. 0,154 b. 0,819 c. 0,181 d. 0,846

* 107 10 min Capacité 5, p. 370

Dans un lycée, on estime que 17 % des élèves sont de bons programmeurs Python intéressés pour développer des programmes, et ce indépendamment les uns des autres.

Karl a une idée de programme à développer mais il est un piètre programmeur.

Il décide d'interroger, au hasard dans la cour un certain nombre d'élèves.

Combien d'élèves Karl doit-il interroger pour que la probabilité de dénicher un bon programmeur soit supérieure à 0,95 ?

* 108 10 min Capacité 7, p. 371

QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=80$ et $p=0,45$. Le plus petit entier k tel que :

- $P(X \leq k)$ dépasse 0,05 est :
a. 25 b. 28 c. 29 d. 36
- $P(X \leq k)$ dépasse 0,95 est :
a. 42 b. 43 c. 44 d. 46

* 109 10 min Capacité 7, p. 371

Un pépiniériste vend des arbres porte-greffes dont 87 % résistent à de fortes gelées. Il en vend 30 000 par an. On prélève au hasard un échantillon de 100 arbres.

Soit X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 100 arbres, associe le nombre d'arbres résistant à de fortes gelées.

- Quelle loi suit X ?
- Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) \geq 0,1$.
- Déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,9$.

Utiliser l'indépendance d'événements et la formule des probabilités totales

* 110 15 min Capacité 6, p. 370

Une pièce pouvant présenter un défaut peut être fabriquée par deux machines : la première produit 5 % de pièces défectueuses et la seconde, 4 %.

On note A l'événement « la pièce est fabriquée par la première machine » et B l'événement « la pièce présente un défaut ». On sait de plus que 60 % des pièces sont fabriquées par la première machine. On prélève une pièce au hasard.

- Donner les valeurs des probabilités suivantes : $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_B(B)$.
- Déterminer la valeur de $P(B)$.
- Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- Déterminer la valeur de $P_B(A)$ et donner une interprétation de cette probabilité.

* 111 15 min Capacité 6, p. 370

On diagnostique une maladie au moyen d'un test. Soit T l'événement « le test est positif » et M l'événement « la personne est malade ». On sait que le test est positif pour 98 % des personnes malades, et négatif pour 95 % des personnes saines.

- Traduire les deux données de l'énoncé par des probabilités conditionnelles.
- On sait par ailleurs que 5 % des individus sont atteints par la maladie.
a. Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.
b. Déterminer $P(T)$.
- Les événements M et T sont-ils indépendants ?

Revoir des points essentiels

PARCOURS 1 Modéliser une situation par une loi binomiale

■ **Un exemple :** Une caisse contient quinze balles de ping-pong, trois de couleur blanche et douze de couleur orange. Un jeu consiste à tirer dix fois de suite une balle au hasard dans cette caisse en remplaçant la balle tirée dans la caisse après chaque tirage. On marque un point chaque fois que la balle tirée est blanche. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points marqués au cours d'une partie.

Montrer que cette situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Comment reconnaître une loi binomiale ?	Je cherche dans l'énoncé si l'expérience aléatoire peut être modélisée par une succession d'épreuves identiques et indépendantes. ► Expliquer pourquoi c'est le cas ici. Quelle est l'épreuve répétée et combien de fois l'est-elle ?
De quel type doit être l'épreuve qui se répète ?	Je dois vérifier que l'épreuve est une épreuve de Bernoulli. ► À quelle condition est-ce le cas ? Expliquer pourquoi cette condition est vérifiée ici.
Comment identifier l'issue « succès » ?	Je dois utiliser la définition de X : il s'agit du nombre de points marqués, c'est-à-dire le nombre de balles blanches tirées parmi les dix balles. ► Que va-t-on appeler « succès » lors de chaque épreuve ? Calculer la probabilité de l'issue « succès ».
Comment terminer ?	Je dois préciser la loi suivie par X et ses paramètres. ► Conclure.

112 Soit un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Un joueur lance le dé sept fois de suite. Justifier que la variable aléatoire X égale au nombre de fois où l'on obtient la face « 5 » suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.

113 Treize amis vont tous les vendredis soirs au restaurant. Au moment de payer, chacun choisit au hasard entre le paiement en liquide ou le paiement en carte bancaire. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque soirée, associe le nombre de paiements en espèces. Justifier que X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

PARCOURS 2 Calculer des probabilités avec la loi binomiale

■ **Un exemple :** Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,7$. Déterminer les probabilités $P(X = 8)$, $P(X = 9)$, $P(X = 10)$ et $P(X \leq 7)$, à 0,01 près.

Ma réflexion	→ Ma démarche
Comment démarrer ?	Je dois calculer les probabilités d'événements liés à une loi binomiale. ► Quelles sont les différentes méthodes possibles ?
Comment déterminer la probabilité d'un événement $\{X = k\}$?	Je peux utiliser la formule du cours qui donne $P(X = k)$. ► Quelle est cette formule ? L'appliquer avec $k = 8$, $k = 9$ et $k = 10$.
Comment déterminer la probabilité d'un événement $\{X \geq k\}$ ou $\{X \leq k\}$?	Je dois me ramener à une réunion d'événements de la forme $\{X = k\}$. Si besoin, je peux utiliser l'événement contraire pour faire le moins de calculs possible. ► L'événement contraire de $\{X \leq 7\}$ est $\{X \geq 8\}$. L'événement $\{X \geq 8\}$ est la réunion des événements $\{X = 8\}$, $\{X = 9\}$ et $\{X = 10\}$.
Comment terminer ?	Je dois effectuer les calculs du type $P(X = k)$ comme précédemment. ► Exprimer $P(X \geq 8)$ en fonction de $P(X = 8)$, $P(X = 9)$ et $P(X = 10)$, puis conclure.

114 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,79$. Calculer $P(X = 9)$, puis $P(X \leq 8)$.

115 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,01$. Calculer $P(X = 1)$, puis $P(X \geq 2)$.

PARCOURS 3 Loi géométrique

116 Chercher en autonomie

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé tant que l'événement S : « obtenir un six » n'est pas réalisé.

1. Quelle est la probabilité p que l'événement S soit réalisé au premier lancer ? au second lancer ?
2. Représenter la situation par un arbre pondéré tronqué pour quatre lancers.
3. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers effectués avant la réalisation de l'événement S . Déterminer les probabilités $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.
4. On pose $q = 1 - p$. À l'aide d'un arbre, expliquer pourquoi $P(X = k) = p^{k-1}q$.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p .

117 Application

Dans un jeu de société, à chaque fin de tour, un joueur lance un dé équilibré à vingt faces. Si le résultat est un multiple de 3, il gagne alors un bonus spécial. Il ne peut gagner qu'un seul bonus par partie et ne lance plus le dé s'il a gagné ce bonus. Manon joue une partie.

On note B l'événement « Manon obtient un bonus ».

1. Quelle est la probabilité p que l'événement B soit réalisé au premier tour de jeu ?
2. Représenter la situation par un arbre pondéré tronqué pour cinq tours de jeu.
3. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tours effectués avant la réalisation de l'événement B . Donner les probabilités $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$ et $P(X = 5)$.

LE SAVIEZ-VOUS

La loi géométrique modélise la mort d'une particule radioactive.

PARCOURS 4 Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales

118 Chercher en autonomie

On considère des variables aléatoires X_n avec n entier naturel non nul, telles que :

- pour tout entier naturel n non nul, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p_n .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (np_n) = \lambda$.

1. À l'aide de la formule du cours, exprimer $P(X_n = k)$ en fonction de k , n et p_n .

2. Pour tout entier naturel n non nul, on définit λ_n par la relation $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$.

Quelle est alors la limite de λ_n quand n tend vers $+\infty$?

3. Soit k un entier, compris entre 0 et n .

$$\text{Montrer que } P(X_n = k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}.$$

4. En utilisant la limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité $P(X_n = k)$.

La formule $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ définit sur l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à zéro une loi de probabilité appelée **loi de Poisson**, du nom de Siméon Denis Poisson.

119 Application

Dans une usine, on considère une chaîne de production où 1 % des pièces sont défectueuses.

On tire au hasard un lot de 400 pièces et on les examine. Étant donné la très grande production journalière de la chaîne, on assimile cette expérience à un tirage avec remise.

On note X le nombre de pièces défectueuses sur un prélèvement de 400 pièces.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Donner une approximation des probabilités des événements $\{X = 0\}$, $\{X \geq 2\}$ et $\{2 \leq X \leq 5\}$ à 10^{-3} près, et interpréter chacun de ces événements dans le contexte de l'exercice.
3. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.
a. Calculer $P(Y = 0)$, $P(Y \geq 2)$ et $P(2 \leq Y \leq 5)$ à 10^{-3} près.
b. Que constate-t-on ? Expliquer.

Point Histoire



Siméon Denis Poisson (1781-1842) est un mathématicien français.

Piste : voir l'approfondissement du Chapitre 7 page 232.

LE SAVIEZ-VOUS

La loi de Poisson est la loi des événements rares.

120 Surcharges d'un serveur Web

On s'intéresse aux requêtes reçues par le serveur web d'une grande entreprise, provenant de clients dispersés sur le réseau Internet. La réception de trop nombreuses requêtes est susceptible d'engendrer des problèmes de surcharge du serveur. On considère :

– d'une part, que la probabilité pour le serveur de ne pas connaître de dysfonctionnements importants au cours d'une journée donnée est $p = 0,99$;

– d'autre part, que des dysfonctionnements importants survenant au cours de journées distinctes constituent des événements aléatoires indépendants.

On appelle Y la variable aléatoire qui, à un mois de 30 jours, associe le nombre de jours où le serveur ne connaît pas de dysfonctionnements importants.

1. Déterminer la loi suivie par Y .

2. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que le serveur connaisse au plus 3 jours de dysfonctionnements importants pendant un mois.

LE SAVIEZ-VOUS

Un serveur Web combine plusieurs éléments : par exemple un serveur LAMP combine Linux (système d'exploitation), Apache (serveur HTTP), MySQL (langage de base de données) et PHP (langage de programmation). Mais on peut très bien imaginer remplacer PHP par Python !

121 Contrôle douanier

Dans un aéroport, les passagers d'un avion en provenance d'un pays dit « sensible » sont attentivement surveillés.

En effet, la douane a estimé à 8 % le pourcentage de trafiquants présents dans cet avion. De cet avion débarquent 345 passagers dont n seront contrôlés au hasard par les douaniers, avec n supérieur ou égal à 3.



Soit X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de n personnes contrôlées, associe le nombre de trafiquants.

1. Exprimer, en fonction de n , la probabilité de l'événement « il y a au moins un trafiquant parmi les personnes contrôlées ».

2. Le chef des douaniers se fixe un objectif : contrôler suffisamment de personnes pour que la probabilité de trouver au moins un trafiquant soit supérieure ou égale à 0,7.

Déterminer alors le nombre minimal de personnes que les douaniers doivent contrôler pour atteindre leur objectif.

122 CALC Coups francs

À l'entraînement, un grand footballeur marque 61 % de ses coups francs. La réussite de chacun de ses tirs est supposée indépendante des autres tirs. On arrondira les probabilités demandées au millième.

1. Quelle est la probabilité qu'il marque chaque fois s'il tire 20 coups francs ?

2. Quelle est la probabilité qu'il marque au moins un coup franc dans un match durant lequel il aura eu trois tentatives ?

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de coups francs qu'il devrait tirer dans un match pour que la probabilité de marquer au moins un but soit supérieure à 0,999.

123 Un parc éolien

Un parc de dix éoliennes toutes identiques est mis en service. La probabilité qu'une des éoliennes soit encore en fonctionnement sans défaut de performance au bout d'un an vaut 0,8. Le fonctionnement d'une éolienne est indépendant de celui des autres éoliennes.

1. Quelle est la probabilité que sept éoliennes exactement fonctionnent sans défaut de performance au bout d'un an ?

2. Sachant qu'il y a au moins sept éoliennes fonctionnant sans défaut de performance, calculer la probabilité pour qu'il y en ait au plus neuf.

124 RAISONNER = CALCULER**Un festival de cinéma**

À l'occasion d'un festival de cinéma à Tarantville, on interroge cinq personnes à la fin de la projection d'un film.

Le nombre de personnes assistant à cette projection est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce sondage à des « tirages successifs » avec remise. On appelle C la variable aléatoire qui associe, à chaque groupe de personnes interrogées, le nombre de personnes ayant aimé le film.

1. On a constaté dans d'autres villes de la région que 40 % des personnes interrogées ont aimé le film.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire C ?

b. On appelle A l'événement « parmi les cinq personnes interrogées, il y en a trois qui ont aimé ce film ».

Déterminer la probabilité de l'événement A .

2. Il s'avère que la population ayant assisté à cette projection est très différente de celle des autres villes car cette projection a eu lieu dans le cadre d'un festival. On appelle p la probabilité pour une personne d'aimer ce film.

a. Exprimer, en fonction de p , la probabilité de l'événement A .

b. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(p) = p^3(1 - p)^2$.

c. Pour quelle valeur de p , la probabilité de l'événement A est-elle maximale ?

125 Des points au hasard

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher. On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac ; puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

À chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O ; i, j)$, le point M de coordonnées $(x ; y)$. On désigne par $\mathcal{D}$ le disque de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

1. Placer dans le plan les points correspondants aux différents résultats possibles.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$.

Déterminer la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

3. Calculer la probabilité que le point M appartienne au disque $\mathcal{D}$.
4. On tire cinq fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise : on obtient ainsi cinq points du plan.
 - a. Quelle est la probabilité que trois points exactement appartiennent au disque $\mathcal{D}$?
 - b. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces points appartienne au disque $\mathcal{D}$?
5. On renouvelle, n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise : on obtient ainsi n points du plan. Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement « au moins un de ces points appartient à $\mathcal{D}$ » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

126 CHERCHER RAISONNER

Coefficients binomiaux et schéma de Bernoulli

1. Soit l'arbre pondéré associé à la répétition de n expériences identiques d'un schéma de Bernoulli.

- a. Quel est le nombre de chemins distincts de cet arbre ?
- b. Rappeler ce que vaut la somme suivante en fonction de n :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

2. On considère à présent l'arbre pondéré associé à la répétition de $2n$ expériences identiques d'une épreuve de Bernoulli.

- a. Quel est le nombre de chemins avec n succès de cet arbre ?
- b. Que représente chacun des produits

$$\binom{n}{0} \times \binom{n}{n}, \binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1}, \dots, \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} \text{ avec } k \text{ compris entre } 0 \text{ et } n ?$$

c. En déduire la somme suivante en fonction de n :

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2.$$

Piste 2.b. : Interpréter chaque coefficient $\binom{n}{k}$ comme un nombre de chemins de l'arbre.

127 RAISONNER CALCULER

Test unilatéral : défauts de mitigeurs

Une entreprise du bâtiment a constaté qu'un certain nombre de mitigeurs thermostatiques, posés par elle, avait un mauvais fonctionnement, dû à une pièce cylindrique. L'entreprise pose 304 mitigeurs. Le pourcentage de pièces ayant un défaut est de 5 %. Soit X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 304 pièces, associe le nombre de défauts.

1. Quelle loi suit X ?
2. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,95$.
3. En déduire un intervalle $[a; b]$ tel que la probabilité $P(X \in [a; b])$ soit supérieure à 95 %.
4. On sait qu'il y a 18 défauts sur 304 pièces. Que peut-on en conclure ?

Point Histoire

Ce sont les statisticiens Jerzy Neyman (1894-1981) et Egon Pearson (1895-1980) qui ont proposé vers 1930 une démarche de décision universellement admise, à la base de la théorie des tests statistiques.

128 Surréservation à l'hôtel capsule

Au Japon, un hôtel capsule a une capacité d'accueil de 70 places et n'héberge que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente à l'hôtel est estimée à 0,8.



On note n le nombre de réservations prises par l'hôtel et X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de n personnes ayant réservé, associe le nombre de ces personnes qui se présentent à l'hôtel.

Chaque personne prend sa réservation pour elle seule et de façon indépendante des autres.

1. Quelle est alors la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
2. Afin de compenser ses pertes, l'hôtel décide de recourir à la surréservation et prend 82 réservations.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients ayant réservé qui se présentent ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

3. Déterminer le nombre maximum de réservations que l'hôtel peut prendre en étant sûr à 95 % de ne pas décevoir une personne ayant réservé.

MATHS & SVT

129 Sexisme à l'embauche

Deux entreprises recrutent leur personnel dans un vivier de très grande taille comportant autant d'hommes que de femmes. Voici la répartition entre hommes et femmes dans ces deux entreprises.

	Hommes	Femmes	Total
Entreprise A	57	43	100
Entreprise B	1425	1075	2500

1. Calculer la proportion des hommes dans chacune de ces entreprises.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 100 personnes, associe le nombre d'hommes présents dans ce groupe. On suppose qu'il y a parité homme-femme.

On se pose alors la question (Q) suivante : « Peut-on suspecter l'une des entreprises de ne pas respecter la parité hommes-femmes à l'embauche ? »

- a. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b. Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.
- c. En déduire un intervalle I tel que $P(X \in I) \geq 0,95$.
- d. Répondre à la question (Q) pour l'entreprise A.

3. En considérant la variable aléatoire Y qui, à un échantillon de 2 500 personnes choisies au hasard, associe le nombre d'hommes présents dans ce groupe, reprendre la question 2. pour l'entreprise B.

130 TABLEUR RAISONNER CALCULER

Promenade en montagne

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du soleil. L'été, il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.



L'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres. Les probabilités demandées seront arrondies au centième le plus proche.

1. Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

2. On désigne par X la variable aléatoire qui, à un mois de 30 jours, associe le nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ.

a. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis donner la signification des événements $\{X = 30\}$ et $\{X = 0\}$.

b. Calculer la probabilité de ces événements.

3. Une somme de 1 *Crédit* (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade. Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le *Crédit* que ce groupe aurait versé pour la journée.

On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en *Crédits*, perçue par l'association un jour donné.

Calculer la probabilité de l'événement $\{S = 11\}$.

4. Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^e groupe sera dirigé vers une activité de

substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 *Crédits* à l'association.

a. Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné, il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution. Expliquer pourquoi la loi de la variable aléatoire R est une loi de Bernoulli et calculer son espérance.

5. a. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de groupes se présentant au départ sur les 13 ayant une réservation. Quelle est la loi suivie par Y ?

b. À l'aide d'un tableur, construire le tableau suivant, pour k allant de 0 à 13.

	A	B	C
1	k	$P(Y = k)$	$k \times P(Y = k)$
2	0	1,819E-12	0
3	1	1,6558E-10	1,655E-10
4	2	6,9522E-09	1,39E-08
5	3	1,7844E-07	5,353E-07

c. Comment interpréter chacun des termes de la colonne C ?

d. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C16 pour faire la somme des éléments de la plage de données C2:C15 ? Le faire.

e. En déduire le gain moyen pour l'association pour une journée.

6. La décision du dirigeant de l'association est-elle rentable ?

TRAVAIL EN GROUPE

131 Virus et inférence bayésienne

À l'échelle mondiale, un virus se répand dans la population et rend malade une personne sur 10 000. Le directeur d'un grand groupe pharmaceutique annonce avec fierté les performances du nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99 % ; si elle n'est pas malade, il est positif à 0,1 %.

1. Sachant qu'une personne donnée a un test positif, quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

2. Réaliser un exposé sur la formule de Bayes, l'inférence bayésienne et ses applications.

Prise d'initiatives

132 Quatre vacanciers Amine, Boris, Chiara et Dylan tirent à la courte-paille pour savoir qui fera la vaisselle. L'un d'entre eux, Dylan, présente aux trois autres quatre allumettes dont une brûlée. Ils tirent à tour de rôle et celui qui tire l'allumette brûlée fera la vaisselle. Bien entendu, Dylan prend l'allumette laissée par les autres. Chiara proteste : « Je tire toujours la troisième derrière Amine et Boris, c'est injuste ! Je veux être la première à choisir. »

Qu'en pensez-vous ?

133 Soit p un réel appartenant à $]0 ; 1[$ et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et p . Déterminer, selon les valeurs de p , pour quelle valeur de k la probabilité $P(X = k)$ est maximale.

134 Lors d'un contrôle qualité d'une chaîne de production pharmaceutique, on prélève un échantillon de six flacons ; on constate que deux d'entre eux présentent un défaut.

Peut-on raisonnablement penser qu'un tiers de la production présente un défaut ?

135 Une organisation gouvernementale affirme que 60 % des oiseaux d'une réserve naturelle sont bagués.

Pour vérifier cette affirmation, un ornithologue contrôle au hasard 280 oiseaux. Parmi ceux-ci, 120 sont bagués.

Peut-on valider l'affirmation de l'organisation gouvernementale ?

TP1 Simuler une loi binomiale **TABLEUR** **MODÉLISER** **CHERCHER**

On considère une urne contenant 35 % de boules blanches et 65 % de boules noires.

On tire au hasard et avec remise, 100 boules de l'urne dont on note la couleur.

Dans ce TP, on va simuler 500 tirages de 100 boules de l'urne, puis calculer les fréquences d'apparition d'une boule blanche (succès). On estimera alors combien d'entre elles appartiennent à des intervalles de la forme $[0,35 - ks ; 0,35 + ks]$, où s est l'écart-type de la série des fréquences, et k un entier valant 1, 2 ou 3.

- a.** Dans la cellule A1, entrer une formule simulant un tirage d'une boule de l'urne. On pourra utiliser la fonction ALEA() du tableur afin d'afficher 0 si la boule tirée est noire et 1 si elle est blanche.
- b.** Recopier vers le bas la formule saisie en A1 sur la plage de cellules A2: A100 afin de simuler un échantillon de 100 tirages.
- c.** Quelle formule peut-on saisir en A102 afin d'obtenir la fréquence d'apparition de 1 dans cet échantillon ?
- 2.** Dans les colonnes A à SF, simuler 500 échantillons de 100 tirages de l'urne et afficher la fréquence d'apparition des 1 pour chaque échantillon.
- 3. a.** Saisir une formule en B104 permettant de calculer l'écart type s de la série des fréquences de la plage de cellules A102:SF102. On pourra utiliser la fonction ECARTYPE.PEARSON du tableur.
- b.** Dans chacune des cellules B106 et C106, saisir une formule destinée à être copiée vers le bas afin d'obtenir pour chaque valeur de k les bornes de l'intervalle $[0,35 - ks ; 0,35 + ks]$.
- 4.** Saisir dans la cellule D106 la formule : =NB.SI(B\$102:SF\$102;»>>>>&B106)-NB.SI(B\$102:SF\$102;»>>>>&C106)
- Que permet d'obtenir cette formule ? La recopier vers le bas jusqu'en D108.
- 5.** Dans les cellules E106 à E108, déterminer les pourcentages d'appartenance des fréquences à chacun des intervalles de la forme $[0,35 - ks ; 0,35 + ks]$.
- 6.** Quelle proportion de fréquences de succès semble-t-il y avoir entre $0,35 - s$ et $0,35 + s$? Entre $0,35 - 2s$ et $0,35 + 2s$? Entre $0,35 - 3s$ et $0,35 + 3s$?

	A	B	C	D
94	0	0	0	1
95	1	0	0	0
96	1	0	0	1
97	0	1	0	0
98	0	1	0	0
99	0	0	0	1
100	1	0	0	0
101				
102	0,38	0,24	0,26	0,34
103	Ecart-type s de la fréquence			
104	des 1	0,0467033		
105	k=	0,35-ks	0,35+ks	nf
106	1	0,3032967	0,3967033	343
107	2	0,2565935	0,4434065	479
108	3	0,2098902	0,4901098	495

TP2 Simuler une planche de Galton PYTHON MODÉLISER RAISONNER

Fichier Python

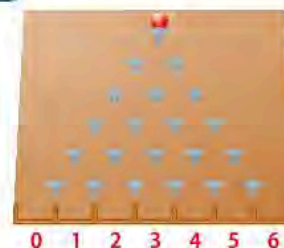
Disponible en ligne sur
lycee.editions-bordas.fr

Dans ce TP, on va simuler une planche de Galton (voir **activité 4** page 365).

Lorsqu'une bille parcourt une planche de Galton, elle tombe en équiprobable à gauche ou à droite du clou qu'elle heurte.

1. On considère une planche de Galton triangulaire, avec six rangées de clous en hauteur.
- a. Soit une variable `droite` initialisée à 0 au moment du lâcher de la bille, et que l'on incrémente de 1 chaque fois que la bille tombe à droite d'un clou. Où se situe la bille si la variable `droite` vaut 6 à la fin de la chute de la bille ? et si elle vaut 3 ? et 0 ?
- b. Recopier et compléter la fonction `simul_une_bille` ci-contre qui prend en argument un entier naturel non nul `h` représentant la « hauteur de chute », c'est-à-dire le nombre de clous heurtés avant de tomber dans un casier. On veut que cette fonction simule une chute de bille et renvoie le numéro du casier dans laquelle se trouve la bille après sa chute.
- c. Compléter alors la fonction `simul_N_billes` qui retourne une liste de taille `h + 1` avec la répartition de `N` billes dans les différents casiers de la planche de Galton.
2. Représenter graphiquement la répartition aléatoire dans les casiers de 500 billes ayant parcouru une planche de Galton triangulaire de six rangs de clous en hauteur.
- On pourra importer le module `matplotlib.pyplot` et utiliser les instructions `bar` et `show` comme ci-contre.
- ```
8
9
10
11
12
13

16 import
17 plt.bar
18 plt.sho
```



```
1 from random import *
2 def simul_une_bille(h):
3 droite=...
4 for i in range(...):
5 droite=droite+...
6 return(...)
```

```

8 def simul_N_billes(N,h):
9 planche=[0 for i in range(...)]
10 for i in range(...):
11 a=simul_une_bille(h)
12 planche[...]=planche[...]+1
13 return(planche)

```

```
16 import matplotlib.pyplot as plt
17 plt.bar(range(7), simul_N_billes(500,6))
18 plt.show()
```



### TP3 Surréservation d'une compagnie aérienne

PYTHON

3D

MODÉLISER

O

RAISONNER

La compagnie « *in the air* » dispose d'un avion de 240 places pour un vol intérieur.

On considère que les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres et on évalue à 0,9 la probabilité qu'un passager soit présent à l'embarquement.

La compagnie souhaitant remplir ce vol intérieur, elle a recours à la surréservation, c'est-à-dire qu'elle compte vendre plus de billets qu'elle ne dispose de places.

Dans ce TP, on va chercher à optimiser le taux de surréservation sans dépasser un niveau de risque raisonnable pour la compagnie « *in the air* ».



#### A Modélisation du problème

On suppose dans cette partie que la compagnie a vendu exactement 240 places et on nomme  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de passagers embarquant parmi les 240 possibles.

1. Quelle est la loi suivie par  $X$  ?

2. a. Calculer  $P(X \leq 222)$ .

b. Donner une interprétation de ce nombre expliquant la nécessité pour la compagnie d'avoir recours à la surréservation.

3. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous où dans la plage de données A3:B243 se trouve le tableau de valeurs des probabilités  $P(X \leq k)$ .

On utilisera la fonction **LOI.BINOMIALE** du tableur.

|   | A                                      | B                                                                  | C                   | D                        | E                                         |
|---|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------|--------------------------|-------------------------------------------|
|   | Nombre k de passagers à l'embarquement | Probabilité qu'il n'y ait pas plus de k passagers à l'embarquement | Capacité de l'avion | Nombre de places vendues | Probabilité qu'il y ait trop de passagers |
| 1 |                                        |                                                                    |                     |                          |                                           |
| 2 | k                                      | $P(X \leq k)$                                                      | 240                 |                          |                                           |
| 3 | 0                                      | 1E-240                                                             |                     |                          |                                           |

4. Déterminer alors le plus petit entier  $k$  tel que  $P(X \leq k) \geq 0,95$ , puis interpréter le résultat.

#### B Étude du risque de surréservation

1. La compagnie a vendu 257 places alors qu'elle n'en dispose que de 240.

a. Quel est le taux de surréservation, c'est-à-dire le rapport entre le nombre de places vendues au-delà de la capacité de l'appareil et cette même capacité ? On exprimera le résultat en pourcentage, arrondi à 0,1 %.

b. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de passagers se présentant effectivement à l'embarquement. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire  $Y$ , et en préciser les paramètres.

c. Pour quelles valeurs de  $Y$  la compagnie devra-t-elle refuser des passagers à l'embarquement ?

d. Déterminer la probabilité que la compagnie doive refuser au moins un client.

2. a. Dans la plage de données D2:D52, faire afficher les entiers de 241 à 291.

b. Dans la cellule E2, saisir une formule permettant de calculer la probabilité que plus de 240 passagers se présentent à l'embarquement.

c. Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la ligne 52.

3. a. La compagnie souhaite ne pas prendre un risque supérieur à 1 %.

La situation envisagée est-elle acceptable pour la compagnie ?

b. Déterminer alors le nombre maximum de places que la compagnie peut vendre en ne prenant pas un risque supérieur à 1 %.

c. Quel est alors le taux de surréservation ? Exprimer le résultat en pourcentage, arrondi à 0,1 %.

4. En utilisant la feuille de calcul précédente et en changeant seulement la valeur saisie dans la cellule C2, déterminer le nombre de places en surréservation que la compagnie « *in the air* » peut se permettre de vendre sur un vol long-courrier effectué avec un A380 de 555 places, avec un seuil de risque de 2 %.



## Question

Comment interpréter les résultats d'un test diagnostique en médecine ?

## Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 60, 131

## Enjeu de la question

Des avancées majeures ont été réalisées en médecine ces dernières décennies. Depuis les années 1950, les tests de dépistage rapide (ou test de diagnostic rapide, en abrégé TDR) ont permis de détecter avec une grande fiabilité des maladies infectieuses comme l'angine, le paludisme ou encore le VIH.



## Plan possible

1. Présentation du problème
2. Faux positifs
3. Intervalle de fluctuation d'une fréquence
4. Prise de décision sur un échantillon
5. Conclusion

## Les mots-clés

Probabilités conditionnelles • Arbres pondérés  
• Loi binomiale • Fluctuation d'échantillonnage

## Support de présentation possible

## • Formule de Bayes

Pour deux événements A et B de probabilités non nulles :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})}$$

## • Loi binomiale

Si X suit la loi  $\mathcal{B}(n; p)$  alors pour tout entier k,

$$0 \leq k \leq n : P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

## • Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, a le plus petit entier tel que :

$$P(X \leq a) > 0,025 \text{ et } b \text{ le plus petit entier tel que } P(X \leq b) \geq 0,975.$$

Pour tout échantillon de taille n issu de la population, la fréquence d'apparition du succès se trouve dans l'intervalle  $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$  avec une probabilité au moins égale à 95 %.

## Questions d'approfondissement possibles

Énoncer la formule des probabilités totales.

Comment construit-on une règle de décision à l'aide de la loi binomiale ?

Quelles probabilités recouvrent les termes médicaux sensibilité, spécificité, valeur prédictive positive ou négative ?

Énoncer la loi des grands nombres et expliquer son rôle dans les problèmes d'échantillonnage.

## Poursuite d'études et projet professionnel

## • Pourquoi étudier les probabilités ?

Les probabilités forment un champ mathématique qui dispose de nombreuses applications : en médecine, en sociologie, en économie, en biologie, en météorologie, dans la finance...

## • Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?

L'étude des probabilités est approfondie dans beaucoup de formations de l'enseignement supérieur : licences scientifiques ou économiques, études de médecine et assimilés, IUT, classes préparatoires, écoles d'ingénieur.

## • Un exemple de métier ?

Le (la) **bio-informaticien(ne)** utilise des domaines mathématiques tels que l'algorithmique ou les probabilités, et crée des logiciels et des bases de données pour recueillir les informations issues du monde vivant. Grâce à la puissance de calcul informatique, ces données peuvent être analysées, exploitées et comparées par les chercheurs en biologie ou en médecine.



Cette page fait le point sur les capacités relatives à l'algorithmique et à la programmation, liées à ce chapitre, qui peuvent être demandées au BAC.

## UN EXEMPLE

On considère une urne contenant 55 % de boules blanches. On tire au hasard et avec remise,  $n$  boules de l'urne dont on note la couleur. On définit le succès  $S$  « la boule tirée est blanche ». On considère les deux fonctions dont on donne le script incomplet en Python ci-dessous.

## Fichier Python

Disponible sur  
lycee.editions-bordas.fr

```
1 from random import *
2 def simu():
3 a=random()
4 if a<0.55:
```

```
18 def Freq(N,n):
19 F=[]
20 for k in range(N):
21 ...
22 return(F)
```

## LES QUESTIONS QUI PEUVENT ÊTRE POSÉES LE JOUR DU BAC

## Écrire un programme

1. a. Écrire une fonction `simu` en langage Python qui permet de simuler l'épreuve de Bernoulli consistant à tirer une boule de l'urne en retournant 1 si la boule tirée est blanche, et 0 sinon.

## RÉPONSES

1. a. La fonction `simu` doit, à partir d'un réel de l'intervalle  $[0; 1]$  généré par l'appel de l'instruction `random()`, retourner 1 si ce réel est strictement inférieur à 0,55, et 0 sinon. On obtient la fonction ci-contre.

```
1 from random import *
2 def simu():
3 a=random()
4 if a<0.55:
5 return(1)
6 else:
7 return(0)
```

## Comprendre un programme

b. On considère la fonction `simu2` dont on donne le script ci-dessous. Que retourne cette fonction ?

```
8 def simu2():
9 return(random()<0.55)
```

b. La condition `random()<0.55` peut être vérifiée ou non : si le nombre aléatoire retourné par l'appel `random()` est effectivement inférieur à 0,55, alors cette condition est équivalente au booléen `True` ; dans le cas contraire, elle est équivalente à `False`.

La fonction `simu2` simule donc l'épreuve de Bernoulli mentionnée à la question 1. a. en retournant `True` si la boule est blanche, et `False` sinon.

## Compléter un programme

2. a. Recopier et compléter la fonction `n_simu` de façon à ce qu'elle retourne le nombre moyen de succès obtenus lors de  $n$  répétitions de l'épreuve de Bernoulli décrite dans l'énoncé, de façon identique et indépendante.

2. a. À la ligne 12, on initialise la variable `T` à 0. Pour effectuer  $n$  simulations, on complète la ligne 13 par l'instruction `for i in range(n)`. Une simulation est effectuée par l'appel `simu()`. La variable `T` joue le rôle d'un accumulateur du nombre

```
11 def n_simu(n):
12 T=0
13 for i in range(n):
14 T=T+simu()
15 return(T/n)
```

de succès de l'épreuve de Bernoulli : on complète la ligne 14. Pour que la fonction `n_simu` retourne le nombre moyen de succès, on divise le nombre de succès `T` par le nombre de répétitions : on complète alors la ligne 15.

b. On considère la fonction `Freq` donnée ci-dessus. Compléter la ligne 20 du script pour que cette fonction retourne la liste des fréquences observées sur  $N$  échantillons de taille  $n$  de l'expérience.

b. À chaque itération de la boucle « **For** », on doit ajouter le résultat d'une simulation d'un tirage de  $n$  boules. Or, une simulation est effectuée par l'appel `n_simu(n)`. On utilise l'instruction `append` pour compléter la ligne 20 : `F.append(n_simu(n))` ajoute la valeur retournée par l'appel `n_simu(n)` à la fin de la liste `F`.

```
17 def Freq(N,n):
18 F=[]
19 for k in range(N):
20 F.append(n_simu(n))
21 return(F)
```



## THÈMES

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes
- Loi binomiale

ÉNONCÉ  RAISONNER  CALCULER

Un artiste expose son nouveau concept : chaque mois, il crée une œuvre unique qu'il expose dans un lieu à chaque fois différent. Après l'exposition, si l'œuvre n'est pas vendue, elle est détruite. Il recommence ainsi le mois suivant. Vu la notoriété de l'artiste, on estime à 0,85 la probabilité que l'œuvre soit vendue une fois exposée. Les ventes sont indépendantes les unes des autres. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à une période de  $n$  mois, associe le nombre d'œuvres vendues.

1. L'artiste décide d'étaler son projet sur un trimestre.

a. Comment peut-on modéliser cette expérience aléatoire ? Représenter l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.

b. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

c. Calculer la probabilité que l'artiste vende une œuvre exactement.

2. Finalement l'artiste décide de réaliser ce projet sur un an.

a. Quelle est la loi suivie par  $X$  ? En préciser les paramètres.

b. Calculer la probabilité que l'artiste vende exactement 9 œuvres. On arrondira le résultat à  $10^{-3}$  près.

3. Sur combien de mois l'artiste doit-il étaler son projet pour que la probabilité de ne pas vendre toutes ses œuvres dépasse 0,95 ?

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ  
ET CHOISIR LES MÉTHODES

1. a. Identifier les épreuves de la succession.

Capacité 1, p. 367

b. Utiliser les paramètres du schéma de Bernoulli.

Capacité 1, p. 367

c. Calculer la probabilité de chacun des chemins réalisant l'événement.

Capacité 2, p. 367

2. a. Se rappeler la loi associée à un schéma de Bernoulli.

Capacité 3, p. 369

b. Utiliser la formule du cours.

Capacité 4, p. 369

3. Utiliser l'événement contraire, puis résoudre une inéquation à l'aide du logarithme.

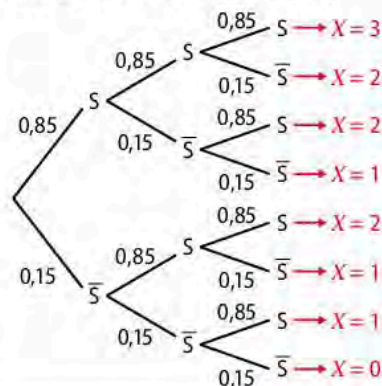
Capacité 5, p. 370

## SOLUTION COMMENTÉE

1. a. L'épreuve « vendre une œuvre » est répétée trois fois de façon identique et indépendante. L'expérience peut être modélisée par un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 3$  et  $p = 0,85$ . Soit  $S$  l'événement « l'œuvre est vendue ». L'univers de chaque épreuve étant  $\{S, \bar{S}\}$ , celui de l'expérience aléatoire est  $\{S, \bar{S}\} \times \{S, \bar{S}\} \times \{S, \bar{S}\}$ .

b. On construit un arbre à trois niveaux en plaçant à l'extrémité de chaque branche  $S$  ou  $\bar{S}$ . L'énoncé donne  $P(S) = 0,85$ , donc  $P(\bar{S}) = 1 - 0,85 = 0,15$ . On obtient l'arbre ci-contre.

c. On cherche la probabilité d'obtenir exactement un succès. Il y a trois chemins qui conduisent à un seul succès. La probabilité de chacun de ces chemins est  $0,85^1 \times 0,15^2 = 0,019125$ . La probabilité qu'il vende une seule œuvre est donc 0,057375.



2. a. L'expérience aléatoire étant modélisée par un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 12$  et  $p = 0,85$ ,  $X$  suit la loi du nombre de succès associée, c'est-à-dire la loi binomiale de paramètres  $n = 12$  et  $p = 0,85$ .

b.  $P(X = 9) = \binom{12}{9} 0,85^9 \times 0,15^{12-9}$  d'après la formule du cours. À l'aide de la calculatrice, on obtient  $P(X = 9) \approx 0,172$ .

3. L'événement « ne pas vendre toutes ses œuvres » est l'événement  $\{X \leq n - 1\}$ . Son événement contraire est  $\{X = n\}$ .

On a :  $P(X \leq n - 1) = 1 - P(X = n)$  avec  $P(X = n) = 0,85^n$ .

On doit donc résoudre  $1 - 0,85^n \geq 0,95$ , ce qui équivaut à  $0,85^n \leq 0,05$ . Ceci équivaut à  $\ln(0,85^n) \leq \ln(0,05)$  soit  $n \ln(0,85) \leq \ln(0,05)$ , soit  $n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,85)}$  car  $\ln(0,85) < 0$ .

Or  $\frac{\ln(0,05)}{\ln(0,85)} \approx 18,4$  donc cette inégalité est vraie à partir de  $n = 19$ .

L'artiste devra donc étaler son projet sur 19 mois au minimum.



Sujet A  30 min  REPRÉSENTER  CALCULER

THÈMES • Indépendance de deux événements  
• Loi binomiale

## CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions 1. et 2. ► Capacité 1 p. 367  
Question 3. ► Capacité 2 p. 367  
Question 4. a. ► Capacité 3 p. 369  
Questions 4. b., c. et d. ► Capacité 4 p. 369  
Question 5. ► Capacité 5 p. 370

Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, tandis que les autres ne sont pas licenciés. Aucun participant n'abandonne la course. Parmi les cyclistes, 66 % font le parcours en moins de 5 heures, les autres au moins en 5 heures.

On estime que le fait d'être licencié et celui de faire le parcours en moins de 5 heures sont des événements indépendants. On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note  $L$  l'événement « le cycliste est licencié dans un club » et  $M$  l'événement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures ».

1. On choisit un cycliste au hasard. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.

2. Représenter l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.

3. Établir la liste des issues possibles et leurs probabilités.

4. Un journaliste interroge indépendamment dix cyclistes au hasard.

On note  $X$  la variable aléatoire qui donne, parmi les dix cyclistes interrogés, le nombre de cyclistes ayant fait le parcours en moins de cinq heures.

On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par  $X$  ?

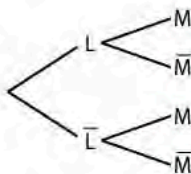
b. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

c. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

d. Calculer la probabilité, arrondie au millième, que plus de 5 cyclistes aient réalisé le parcours en 5 heures et plus.

5. Un second journaliste souhaite interroger un cycliste licencié dans un club.

Combien de cycliste le journaliste doit-il interroger pour que la probabilité d'interroger un cycliste licencié dans un club soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Sujet B  45 min  REPRÉSENTER  RAISONNER  
SOLUTION EN FIN DE MANUEL

THÈMES • Probabilités conditionnelles  
• Loi binomiale

## CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE

Questions A. 5. et 6. ► Capacité 6 p. 370  
Questions B. 1., 2. et 3. ► Capacités 3 et 4 p. 369

Quand cela est nécessaire, on arrondira les résultats à  $10^{-3}$  près.

## Partie A

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

- 53 % de ses clients ont plus de 50 ans ;
  - 32 % de ses clients sont intéressés par des placements dits risqués ;
  - 25 % de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits risqués.
- On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les événements suivants :
- A : « le client a plus de 50 ans » ;
  - R : « le client est intéressé par des placements dits risqués ».

1. Donner  $P(A)$ ,  $P(R)$  et  $P_A(R)$ .

2. Représenter la situation par un arbre pondéré. Cet arbre pourra être complété par la suite.

3. Montrer que la probabilité que le client ait plus de 50 ans et soit intéressé par des placements dits risqués est 0,1325.

4. Sachant que le client est intéressé par des placements dits risqués, quelle est la probabilité qu'il ait plus de 50 ans ?

5. Calculer  $P(\bar{A} \cap R)$  puis en déduire  $P_{\bar{A}}(R)$ .

Interpréter les deux résultats obtenus.

6. Calculer la probabilité qu'un client qui n'est pas intéressé par des placements dits risqués ait moins de 50 ans.

## Partie B

L'une des agences de cette banque charge ses conseillers de proposer un placement dit risqué  $R_1$  à tous ses clients. Elle promet à ses conseillers une prime de 150 € s'ils parviennent, en un mois, à convaincre au moins 10 clients d'effectuer ce placement.

Elle ajoutera une prime supplémentaire de 150 € s'ils parviennent, en un mois, à convaincre au moins 15 clients d'effectuer ce placement.

L'une des conseillères de cette banque, Camille, reçoit 45 clients ce mois-ci. On admet que la probabilité que Camille réussisse à placer ce produit auprès de l'un de ses clients est de 0,23 et que la décision d'un client est indépendante de celles des autres clients.

1. Déterminer la probabilité que Camille place le produit  $R_1$  auprès de 10 clients exactement ce mois-ci.

2. Montrer que la probabilité que Camille obtienne exactement 150 € de prime est environ 0,532.

3. Calculer la probabilité que Camille obtienne 300 € de prime.



**Sujet C** 30 min

CHERCHER



CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



- THÈMES** • Probabilités conditionnelles  
 • Formule des probabilités totales  
 • Loi binomiale

**CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

- Question A ► Capacité 6 p. 360  
 Question B. 1. a. ► Capacité 4 p. 369  
 Question B. 1. b. ► Capacité 7 p. 371  
 Question B. 2. ► Capacité 5 p. 370

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

**Partie A**

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable ;
- la machine A fournit 60 % de la production journalière ;
- la proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

- A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
- B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
- V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que  $P(B \cap V) = 0,372$  et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

**Partie B**

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge.

Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
  - a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à  $10^{-3}$ .
  - b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?
2. L'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %. Quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

**Sujet D** 45 min

MODÉLISER



RAISONNER

- THÈMES** • Probabilités conditionnelles  
 • Formule des probabilités totales  
 • Loi binomiale

**CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

- Questions A. 2. et 3. ► Capacité 6 p. 370  
 Question B. ► Capacité 4 p. 369  
 Question C. ► Capacité 7 p. 371

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de surréservation afin d'abaisser les coûts. Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site Internet de la compagnie.

**Partie A**

Une étude réalisée par la compagnie a établi que, sur cette ligne, pour une réservation en agence, 5 % des clients ne se présentent pas à l'embarquement alors que, pour une réservation par Internet, 2 % des clients ne se présentent pas à l'embarquement.

Les réservations en agence représentent 30 % de l'ensemble des réservations.

Pour un embarquement donné et une réservation prise au hasard, on considère les événements suivants :

- A : « la réservation a été faite en agence » ;
- I : « la réservation a été faite par Internet » ;
- E : « le passager se présente à l'embarquement ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Démontrer que la probabilité qu'un client ne se présente pas à l'embarquement est 0,029.
3. Calculer la probabilité que la réservation ait été faite en agence sachant que le client ne s'est pas présenté à l'embarquement.

**Partie B**

Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations.

On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi binomiale de paramètres  $n = 202$  et  $p = 0,971$ .

1. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
2. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
3. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

**Partie C**

Cette compagnie affiche un taux de satisfaction de la part de ses clients de 98 %. Sur les 400 réponses à une enquête de satisfaction, il y a 383 réponses exprimant leur satisfaction. Ce résultat contredit-il l'affirmation de la compagnie ?



## ► Utiliser une variable aléatoire

### 1 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

Soit  $V$  la variable aléatoire qui, à un jour donné, associe le nombre de vols répertoriés dans un grand magasin. La loi de probabilité de  $V$  est donnée par le tableau suivant, où  $a$  est un réel.

| Nombre de vols $v_i$ | 0    | 1    | 2    | 3   | 4    |
|----------------------|------|------|------|-----|------|
| $P(V = v_i)$         | 0,87 | 0,07 | 0,03 | $a$ | 0,01 |

- a. La valeur de  $a$  est 0,02.    b.  $P(V \geq 0) = 0,13$ .  
c. La probabilité qu'il y ait moins de deux vols par jour est 0,03.

2 Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque lancer d'un dé à six faces bien équilibré, associe le numéro affiché sur sa face supérieure.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par  $X$  ? Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
2. Calculer la probabilité de l'événement  $A = \{3 \leq X \leq 5\}$ .
3. Soit l'événement  $B = \{|X - 3| \leq 1\}$ . Écrire cet événement sous la même forme que  $A$ , puis calculer sa probabilité.

3 Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 boules rouges et 6 boules vertes. On tire au hasard deux boules de l'urne sans remettre la première boule tirée.

1. Illustrer cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Soit  $T$  la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de  $T$ .

## ► Utiliser la loi binomiale

4 Un sac contient 30 jetons bleus et 20 jetons jaunes.

On tire successivement et avec remise cinq jetons du sac.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à cette épreuve le nombre de jetons jaunes tirés.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer à 0,001 près la probabilité de tirer deux jetons jaunes exactement.
3. Calculer à 0,001 près la probabilité de tirer au moins quatre jetons jaunes.

5 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

La variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,2$ .

1.  $P(X = 0)$  est égal à : a.  $0,2^{10}$     b.  $1 - 0,2^{10}$     c.  $0,8^{10}$     d.  $1 - 0,8^{10}$
2.  $P(X \leq 9)$  est égal à : a.  $0,2 \times 0,8^9$     b.  $1 - 0,8^{10}$     c.  $0,2^9 \times 0,8$     d.  $1 - 0,2^{10}$

## ► Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire

6 La loi de probabilité de la variable aléatoire  $D$  est définie par  $P(D = k) = \frac{k}{10}$ , pour tout  $k$  de  $\{1; 2; 3; 4\}$ . Calculer  $E(D)$  et  $V(D)$ .

### 7 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- a. Si une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs  $-1$  et  $1$ , alors  $E(X)$  est toujours égal à 0.  
b. La variance d'une variable aléatoire est toujours positive ou nulle.



# VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI DES GRANDS NOMBRES

CHAPITRE  
**12**



Le sex-ratio d'une population est le rapport du nombre de mâles sur le nombre de femelles de cette population. Pour l'espèce humaine, le sex-ratio en Europe est voisin de 1,05. On va découvrir dans ce chapitre un outil probabiliste qui permet de décider si une variation du sex-ratio d'une population est normale ou bien peut être due à des facteurs comme la pollution, des infections...

Voir exercice 78 page 416

## LES NOTIONS DU CHAPITRE

- Opérations sur les variables aléatoires
- Échantillons de taille  $n$  d'une loi de probabilité
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Loi des grands nombres



## RESSOURCES NUMÉRIQUES

Téléchargez l'application FlashPage, puis scannez la page indiquée pour consulter votre ressource sur smartphone ou tablette.

Vidéos ..... pp. 405, 407  
Corrigés détaillés ..... pp. 418, 419, 427, 428



## Activité 1

### Objectif

Découvrir la somme de deux variables aléatoires.

### Cours 1

Opérations sur les variables aléatoires

## Jeux de cartes en double

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis tire une seconde carte dans un autre jeu de 32 cartes.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe un gain de 2 € si la carte tirée est un as, un gain de 1 € si la carte tirée est une carte « habillée » (roi, dame, valet), et rien du tout dans les autres cas.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui, au second tirage, associe un gain de 1 € si la carte tirée est un pique, et rien du tout dans les autres cas.

On appelle  $Z$  la variable aléatoire qui, à chaque double tirage, associe le gain total du joueur.

On peut noter cette variable :  $Z = X + Y$ .



- 1 Déterminer les valeurs prises par  $X$ , par  $Y$  et par  $Z$ .
- 2 Donner la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .
- 3 a. Exprimer l'événement  $\{Z = 0\}$  en fonction des événements  $\{X = 0\}$  et  $\{Y = 0\}$ .  
b. En utilisant l'indépendance des deux épreuves, déterminer  $P(Z = 0)$ .  
c. Calculer de la même façon  $P(Z = 3)$ .
- 4 a. Déterminer  $P(Z = 1)$  en exprimant l'événement  $\{Z = 1\}$  comme réunion de deux événements incompatibles.  
b. En déduire  $P(Z = 3)$ , puis la loi de  $Z$ .
- 5 Calculer l'espérance et la variance des variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Que constate-t-on ?

## Activité 2

### Objectif

Découvrir la somme de deux variables aléatoires non indépendantes.

### Cours 1

Opérations sur les variables aléatoires

## Tombola de clés USB

Un sac contient cinq clés USB dont deux clés d'une valeur de 10 € et trois clés d'une valeur de 30 €. À l'issue d'une épreuve sportive, le vainqueur tire au hasard dans ce sac une clé USB puis, sans remettre la clé dans le sac, il tire une seconde clé.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, au premier tirage associe le prix de la clé obtenue, et  $Y$  la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le prix de la clé obtenue. On note  $S$  la variable aléatoire qui, aux deux tirages, associe la somme des prix des clés gagnées.



- 1 Quelles sont les valeurs prises par  $S$  ?
- 2 a. Déterminer la loi de  $X$ .  
b. Calculer son espérance et sa variance.
- 3 a. Construire un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.  
b. Calculer  $P(Y = 10)$  à l'aide de l'arbre pondéré.  
c. En déduire la loi de probabilité de  $Y$ .  
d. Calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .
- 4 a. Calculer  $P(S = 20)$ , puis  $P(S = 60)$ .  
b. Déterminer la loi de probabilité de  $S$ .  
c. Calculer l'espérance et la variance de  $S$ . Que constate-t-on ?



### Activité 3

#### Objectif

Découvrir la variable aléatoire moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire.

#### Cours 2

Échantillon de taille  $n$  d'une loi de probabilité

## Échantillons et chiens de traîneau

Dans une station de montagne, Nicolas loue des attelages de chiens de traîneau à la journée. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à un jour donné, associe le nombre d'attelages loués ce jour-là. Des observations ont permis d'établir la loi de  $X$ , donnée dans le tableau ci-contre.

| $x_i$        | 0   | 1   | 2   | 3   |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| $P(X = x_i)$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,3 |

- 1 Calculer son espérance et sa variance.
- 2 On considère l'expérience aléatoire qui consiste à étudier la location d'attelages sur deux jours. On admet que la location d'une journée n'influe pas sur la location de la journée suivante. Chaque couple de jours de location constitue un échantillon de taille 2 de la loi de  $X$ .
  - a. Justifier qu'il y a 16 échantillons. Les écrire tous.
  - b. Soit  $X_1$  (respectivement  $X_2$ ) la variable aléatoire qui, à chaque échantillon, associe le nombre d'attelages loués le premier jour (respectivement le second jour). Donner les valeurs de  $X_1$ , puis celles de  $X_2$ , associées aux 16 échantillons.
  - c. Donner les lois de  $X_1$  et  $X_2$ . Que constate-t-on ?
  - d. Soit  $M_2$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de taille 2, associe la moyenne des locations, soit  $M_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ . Déterminer la loi de  $M_2$ , puis calculer son espérance et sa variance. Que constate-t-on ?

### Activité 4

#### Objectif

Analyser le début du texte historique de Pafnouti Tchebychev sur sa célèbre inégalité.

#### Cours 3

Loi des grands nombres

## Un texte de Tchebychev

Tchebychev présente en 1867 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* l'inégalité qui l'a rendu célèbre. Le but de cette activité est de comprendre le théorème proposé.

Si nous convenons d'appeler *espérance mathématique* d'une grandeur quelconque, la somme de toutes les valeurs qu'elle est susceptible de prendre, multipliées par leurs probabilités respectives, il nous sera aisé d'établir un théorème très simple sur les limites entre lesquelles restera renfermée une somme de grandeurs quelconques.

**THÉORÈME.** – Si l'on désigne par  $a, b, c, \dots$ , les espérances mathématiques des quantités  $x, y, z, \dots$ , et par  $a_1, b_1, c_1, \dots$  les espérances mathématiques de leurs carrés  $x^2, y^2, z^2, \dots$ , la probabilité que la somme  $x + y + z, \dots$  est renfermée entre les limites

$$a + b + c + \dots + \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots},$$

et

$$a + b + c + \dots - \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots},$$

sera toujours plus grande que  $1 - \frac{1}{\alpha^2}$  quel que soit  $\alpha$ .

- 1 Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs  $x_1, x_2, x_3$  avec les probabilités  $p_1, p_2, p_3$ .
  - a. Rappeler la formule donnant la variance  $V(X)$ .
  - b. En développant les termes  $(x_i - E(X))^2$  pour  $i$  entre 1 et 3, montrer que :
 
$$V(X) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i^2 - (E(X))^2.$$
- 2 Dans le texte ci-dessus, on comprendra  $x_1, x_2, \dots$  comme des variables aléatoires.
  - a. Que représente «  $a + b + c + \dots$  » dans ce texte ?
  - b. Que représentent «  $a_1 + b_1 + c_1 + \dots$  » et «  $a^2 + b^2 + c^2 + \dots$  » dans ce texte ?
  - c. Que représente alors «  $\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots}$  » ?
  - d. En utilisant la variable aléatoire  $S_n$  du cours, montrer que ce que dit Tchebychev peut s'écrire :
 
$$P(E(S_n) - \alpha \sigma(S_n) \leq S_n \leq E(S_n) + \alpha \sigma(S_n)) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$
  - e. Montrer alors que  $P(|S_n - E(S_n)| > \alpha \sigma(S_n)) \leq \frac{1}{\alpha^2}$ .
- 3 Appliquer ce résultat avec  $E(S_n) = 0$ ,  $\sigma(S_n) = 1$  et  $\alpha = 3$ . Expliquer le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.

#### Point Histoire



Pafnouti Tchebychev (1821-1894) est un mathématicien russe.



# 1. Opérations sur les variables aléatoires

## Produit par un nombre réel et somme de variables aléatoires

**EXEMPLE :** On lance deux pièces de monnaie sur lesquelles sont inscrites 0 et 1. L'une est équilibrée, et l'autre est telle que la probabilité que 0 sorte est 0,4.

Soit  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires qui, au lancer d'une pièce, associent le numéro inscrit sur la face supérieure de la pièce. À chaque lancer, on peut associer la somme des numéros inscrits sur les pièces : on définit ainsi une nouvelle variable aléatoire  $Z$  appelée « somme de  $X$  et  $Y$  », et que l'on note  $Z = X + Y$ .

L'événement  $\{Z = 0\}$  est l'événement  $\{X = 0 \text{ et } Y = 0\}$ .

Les événements  $\{X = 0\}$  et  $\{Y = 0\}$  sont indépendants car les deux épreuves (les lancers des deux dés) le sont. D'où :  $P(Z = 0) = P(X = 0) \times P(Y = 0) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$ .

L'événement  $\{Z = 1\}$  est la réunion des deux événements incompatibles  $\{X = 0 \text{ et } Y = 1\}$  et  $\{X = 1 \text{ et } Y = 0\}$ . Ainsi,  $P(Z = 1) = P(X = 0 \text{ et } Y = 1) + P(X = 1 \text{ et } Y = 0)$ , et on obtient  $P(Z = 1) = 0,5$  en opérant comme précédemment.

On peut aussi définir la variable aléatoire  $T = 2X$ , produit de  $X$  par le réel 2, qui prend pour valeurs 0 et 2, avec  $P(T = 0) = P(X = 0) = 0,5$  et  $P(T = 2) = P(X = 1) = 0,5$ .

**DÉFINITIONS**  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires définies sur des univers finis  $\Omega = \{e_1; \dots; e_m\}$  et  $\Omega' = \{e'_1; \dots; e'_n\}$  qui associent à chaque issue  $e_i$  (respectivement  $e'_j$ ) le réel  $x_i$  (respectivement  $y_j$ ).

**(1)** La variable aléatoire  $Z = aX$  est la variable aléatoire qui associe à chaque issue  $e_i$  le nombre réel  $a \times x_i$  avec  $P(Z = ax_i) = P(X = x_i)$ .

**(2)** La somme des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est la variable aléatoire  $S = X + Y$  qui, aux issues  $e_i$  et  $e'_j$  associe  $x_i + y_j$ , où  $P(S = s_k)$  est la somme de toutes les probabilités  $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$  telles que  $x_i + y_j = s_k$ .

Les variables  $X$  et  $Y$  de l'exemple précédent sont dites indépendantes, car elles sont associées à des épreuves indépendantes.

**PROPRIÉTÉ** Deux variables aléatoires sont **indépendantes** si, quelles que soient les valeurs  $x_i$  et  $y_j$ ,  $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$ .

## Propriétés des opérations sur les variables aléatoires

**PROPRIÉTÉS (1)** Soit  $X$  une variable aléatoire, et  $a$  un réel. Alors on a :

$$E(aX) = aE(X); V(aX) = a^2V(X); \sigma(aX) = |a|\sigma(X).$$

**(2)** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. Alors  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

On peut étendre la propriété **(2)** à  $n$  variables :  $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$ .

**EXEMPLE :** On choisit un fût de cidre dans le stock d'un producteur.

À chaque fût, les variables aléatoires  $A$  et  $B$  associent respectivement la masse en kg de cidre contenue dans le fût, d'espérance  $E(A) = 200$ , et la masse en kg de bois du fût lui-même, d'espérance  $E(B) = 65$ .

Alors, l'espérance de la variable aléatoire  $X = A + B$ , qui à un fût associe sa masse totale en kg, a pour espérance  $E(X) = E(A) + E(B) = 265$ .

**PROPRIÉTÉ** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires **indépendantes**.

Alors  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

Avec  $n$  variables indépendantes, on a :  $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$ .

**EXEMPLE :** Dans l'exemple des deux pièces,  $E(X) = 0,5$  et  $E(Y) = 0,6$ .

On a aussi :  $V(X) = 0,25$  et  $V(Y) = 0,24$ .

Puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :  $V(X + Y) = 0,25 + 0,24 = 0,49$ .

### À noter

Deux épreuves successives sont dites **indépendantes** lorsque le déroulement de l'une n'a aucune influence sur le déroulement de l'autre.

### Vocabulaire

Les deux propriétés concernant l'espérance traduisent le fait que celle-ci est **linéaire**.

**Démonstration de la propriété (2)**  
Voir page 408

### À noter

Pour  $a$  et  $b$  réels :  
 $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$   
 $E(aX + b) = aE(X) + b$   
 $V(aX + b) = a^2V(X)$



## Déterminer la loi d'une somme de deux variables aléatoires

Une urne contient trois jetons rouges marqués « 0 » et deux jetons bleus marqués « 1 ». On tire au hasard deux jetons de l'urne. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré, et  $Y$  la variable aléatoire qui, au second tirage, associe le numéro du jeton tiré. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Z = X + Y$  si le tirage du second jeton :

- 1 se fait avec remise ; 2 se fait sans remise.

## Méthode

Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Z = X + Y$ , commencer par calculer les valeurs prises par  $Z$ , puis, pour chaque somme trouvée, déterminer tous les cas donnant cette somme.

## Solution commentée

$X$  et  $Y$  prennent les valeurs 0 et 1, donc  $Z$  prend les valeurs 0, 1 et 2.

On a  $P(X=0) = \frac{3}{5} = 0,6$  et  $P(X=1) = 0,4$ .

- 1 Dans le cas d'un tirage avec remise :

$$P(Y=0) = 0,6 \text{ et } P(Y=1) = 0,4.$$

$$P(Z=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = P(X=0) \times P(Y=0) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

$$P(Z=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = 0,4 \times 0,4 = 0,16.$$

On peut déduire  $P(Z=1)$  par la formule

$$P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) = 1, \text{ ce qui donne}$$

$$P(Z=1) = 1 - 0,36 - 0,16 = 0,48.$$

| $z_i$      | 0    | 1    | 2    |
|------------|------|------|------|
| $P(Z=z_i)$ | 0,36 | 0,48 | 0,16 |

- 2 Dans le cas d'un tirage sans remise, on a :

$$P_{X=0}(Y=0) = \frac{2}{4} = 0,5 ; P_{X=0}(Y=1) = \frac{2}{4} = 0,5 ; P_{X=1}(Y=0) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$P_{X=1}(Y=1) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$$P(Z=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = P(X=0) \times P_{X=0}(Y=0) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$$

$$P(Z=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = P(X=1) \times P_{X=1}(Y=1) = 0,4 \times 0,25 = 0,1.$$

$$\text{On en déduit : } P(Z=1) = 1 - P(Z=0) - P(Z=2) \\ = 1 - 0,3 - 0,1 = 0,6.$$

| $z_i$      | 0   | 1   | 2   |
|------------|-----|-----|-----|
| $P(Z=z_i)$ | 0,3 | 0,6 | 0,1 |

## Voir exercices

41 Pour s'entraîner

87 Pour travailler en autonomie

## Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

Une entreprise fabrique des machines. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant cette période. Une étude statistique permet d'établir la loi de probabilité de  $X$ .

| $x_i$      | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $P(X=x_i)$ | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,28 | 0,25 | 0,17 | 0,06 |

- Calculer l'espérance de  $X$ .
- La vente d'une machine rapporte 5 000 €. On note  $Y$  la variable aléatoire qui, à un mois tiré au hasard, associe le résultat en euros de l'atelier. Déterminer l'espérance de  $Y$ , puis l'interpréter.
- Le résultat mensuel, en euros, du second atelier de l'entreprise définit une variable aléatoire  $T$  d'espérance 20 000. Quelle est l'espérance du résultat mensuel total de l'entreprise ?

## Solution commentée

$$1 \quad E(X) = \sum_{i=1}^7 (x_i \times P(X=x_i)) = 3,37.$$

- 2 On a :  $Y = 5\,000X$ , et  $E(Y) = E(5\,000X) = 5\,000 E(X)$ , par linéarité de l'espérance. D'où  $E(Y) = 5\,000 \times 3,37 = 16\,850$ .

Le résultat mensuel moyen de cet atelier peut donc être estimé à 16 850 €.

- 3 On doit calculer  $E(Y+T)$ . Par linéarité de l'espérance :  $E(Y+T) = E(Y) + E(T) = 36\,850$ . L'espérance du résultat moyen de l'entreprise est 36 850 €.

## Conseil

Pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire, on peut l'exprimer en fonction d'autres variables aléatoires dont on connaît l'espérance.

## Voir exercices

48 Pour s'entraîner

89 Pour travailler en autonomie



## 2. Échantillon d'une loi de probabilité

### Échantillon de taille $n$ d'une loi de probabilité

**DÉFINITION** Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur l'ensemble  $\Omega$  des issues d'une expérience aléatoire. Un **échantillon de taille  $n$  de la loi de  $X$**  est une liste  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.

**EXEMPLE :** Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque paquet de chips issue d'une chaîne de production, associe sa masse en grammes. On note  $X_i$  la variable aléatoire qui, à chaque lot de 3 paquets de chips, associe la masse du  $i$ -ème paquet. Les variables  $X_1, X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes et suivent la même loi que  $X$ , donc  $(X_1, X_2, X_3)$  est un échantillon de taille 3 de la loi de  $X$ .

**DÉFINITIONS (1)** La **variable aléatoire somme** d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $X$  est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille  $n$  par  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

**(2)** La **variable aléatoire moyenne** est la variable aléatoire définie par  $M_n = \frac{1}{n} S_n$ .

**EXEMPLE :** Dans l'exemple précédent, la variable aléatoire somme  $S_3$  définie par  $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$  associe à chaque lot sa masse en grammes. La variable aléatoire moyenne  $M_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$  associe à chaque lot de 3 paquets la masse moyenne d'un paquet.

### Espérance, variance et écart-type de $S_n$ et $M_n$

**PROPRIÉTÉ** Soit  $S_n$  la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ , alors  $E(S_n) = nE(X)$ ,  $V(S_n) = nV(X)$  et  $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$ .

#### DÉMONSTRATION

Pour  $k$  entier compris entre 1 et  $n$  :  $E(X_k) = E(X)$  et  $V(X_k) = V(X)$ .

$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ . D'où :  $E(S_n) = nE(X)$ .

$X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes, donc :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n).$$

On en déduit :  $V(S_n) = nV(X)$ , et  $\sigma(S_n) = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n} \sqrt{V(X)} = \sqrt{n} \sigma(X)$ .

**PROPRIÉTÉ** Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ , alors  $E(M_n) = E(X)$ ,  $V(M_n) = \frac{1}{n} V(X)$  et  $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ .

**EXEMPLE :** Pour l'exemple des chips :  $E(M_3) = E(X)$  et  $V(M_3) = \frac{1}{3} V(X)$ .

### Espérance et variance de la loi binomiale

**PROPRIÉTÉ** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Alors :  $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1-p)$  et  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ .

#### DÉMONSTRATION AU PROGRAMME

$X$  est la somme de  $n$  variables indépendantes de Bernoulli  $X_k$  telles que  $P(X_k) = p$ , puisque  $X$  compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Donc,  $E(X) = E(S_n) = nE(X_k)$ , et puisque  $E(X_k) = p$ , on a :  $E(X) = np$ .

On a aussi :  $V(X) = V(S_n) = nV(X_k) = np(1-p)$ , puisque  $V(X_k) = p(1-p)$ .

**EXEMPLE :** La loi binomiale de paramètres  $n = 1\,000$  et  $p = 0,01$  a pour espérance 10 et pour écart-type  $\sqrt{9,9}$ .

#### À noter

Une suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de valeurs prises par les variables  $X_i$  est une **réalisation** de cet échantillon.

#### À noter

$V(M_n) = \frac{1}{n} V(X)$  montre que la variance diminue quand la taille de l'échantillon augmente. Elle quantifie la **fluctuation d'échantillonnage**, c'est-à-dire l'écart moyen entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance.



Vidéo 08.04

Représenter  
une variable  
aléatoire  
comme somme  
de variables



CAPACITÉ

3

## Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples

On étudie la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine  $O$ . La particule est à l'origine au temps 0 et se déplace à chaque unité de temps d'une unité sur la droite avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  ou d'une unité vers la gauche avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .

On suppose les déplacements de la particule indépendants les uns des autres. Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le  $k$ -ième déplacement a lieu vers la droite et qui vaut  $-1$  dans le cas contraire. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $S_n$  l'abscisse de la particule à l'instant  $n$ .

- 1 Donner, pour tout entier naturel  $k$  non nul, l'espérance et la variance de  $X_k$ .
- 2 Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $S_n$  en fonction de certaines des variables  $X_k$ .
- 3 En déduire l'espérance et la variance de  $S_n$ .

### Solution commentée

1  $E(X_k) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ , et  $V(X_k) = E((X_k - 0)^2) = E(X_k^2) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} = 1$ .

2 Puisque la particule est à l'origine au départ, on a :  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

3  $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = n \times E(X_k) = 0$ .

Puisque les déplacements sont indépendants, les variables  $X_k$  sont indépendantes, on peut donc appliquer la formule :

$$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = n \times 1 = n.$$

### Méthode

Pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire, on peut écrire cette variable comme somme de variables plus simples dont on connaît l'espérance.

Voir exercices

59 Pour s'entraîner

90 Pour travailler en autonomie

CAPACITÉ

4

## Utiliser la somme et la moyenne d'un échantillon de taille $n$

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, en secondes, subi par la clientèle avant d'être prise en communication avec un standardiste.

La variable aléatoire  $T$ , qui associe à tout client son temps d'attente, a pour espérance 18 et pour écart-type 7. On estime que la probabilité qu'un client ait une attente de plus de 20 secondes est égale à 0,4.

- 1 Au cours d'une même semaine, un même client passe cinq appels, indépendants les uns des autres. On note  $X$  la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours de ces cinq appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes. Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $X$ .
- 2 Dans le but de diminuer le temps d'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit  $Y$  la variable aléatoire mesurant le temps d'attente moyen exprimé en secondes pour un échantillon de 100 clients. Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $Y$ .

### Solution commentée

- 1 On est en présence de l'épreuve constituée par le temps d'attente à un appel téléphonique. Cette épreuve se répète 5 fois, de façon identique et indépendante, et la probabilité de succès (le temps d'attente est de plus de 20 secondes) est égale à 0,4.  $X$  suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = 0,4$ .

Son espérance est  $E(X) = np = 5 \times 0,4 = 2$  et son écart-type est

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{1,2}, \text{ soit environ } 1,1.$$

- 2  $Y$  est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de la variable  $T$  de taille 100, donc  $E(Y) = E(T) = 18$ . Son écart-type est  $\sigma(Y) = \frac{\sigma(T)}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10}$ , soit 0,7.

### Méthode

Pour déterminer l'espérance et l'écart-type d'une loi binomiale, on identifie d'abord le nombre  $n$  d'épreuves et la probabilité de succès  $p$ .

Voir exercices

65 Pour s'entraîner

93 Pour travailler en autonomie



### 3. Loi des grands nombres

#### Point Histoire

**Irénée-Jules Bienaymé** (1796-1878) est un mathématicien français qui a énoncé cette inégalité en 1853. Mais, c'est **Pafnouti Tchebychev** (1821-1894) qui l'a démontrée en 1867.

#### À noter

Pour tout  $t > 0$ ,  
 $P(|X - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$ .

#### Point Histoire



C'est **Jacques Bernoulli** (1654-1705) qui publie l'une des premières versions de ce résultat dans son ouvrage posthume *Ars Conjectandi* en 1713. Il le démontre dans le cas particulier de la loi binomiale.

#### À noter

La probabilité que la moyenne s'éloigne de l'espérance devient très petite pour les grands échantillons.

### Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

La principale interprétation de l'écart-type  $\sigma$  réside dans le fait que les écarts avec l'espérance sont de l'ordre de grandeur de  $\sigma$ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev précise cette idée.

**INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV** Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  et de variance  $V$ . Pour tout réel strictement positif  $\delta$ , on a :  $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ .

#### DÉMONSTRATION

Soit  $\Omega' = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $X$  et soit l'événement  $A = \{|X - \mu| \geq \delta\}$ , dont on note les éléments  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Ces éléments  $a_1, a_2, \dots, a_k$  appartiennent à  $A$ , et  $|a_i - \mu| \geq \delta$  pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ).

On sait que,  $V(X) = (x_1 - \mu)^2 P(X = x_1) + \dots + (x_n - \mu)^2 P(X = x_n)$ .

Tous les termes de cette somme sont positifs, donc si on ne garde dans cette somme que les termes portant sur les issues présentes dans  $A$ , la somme diminue, d'où :

$$V(X) \geq (a_1 - \mu)^2 P(X = a_1) + \dots + (a_k - \mu)^2 P(X = a_k).$$

Par définition de  $A$ , chaque nombre  $|a_i - \mu|$  est supérieur à  $\delta$ , donc chacun des nombres  $(a_i - \mu)^2$  est supérieur à  $\delta^2$ . Ainsi :

$$(a_1 - \mu)^2 P(X = a_1) + \dots + (a_k - \mu)^2 P(X = a_k) \geq \delta^2 P(X = a_1) + \dots + \delta^2 P(X = a_k).$$

$$V(X) \geq \delta^2 (P(X = a_1) + \dots + P(X = a_k)) \text{ et } P(X = a_1) + \dots + P(X = a_k) = P(X \in A).$$

$$\text{D'où : } V(X) \geq \delta^2 P(X \in A), \text{ et ainsi } P(X \in A) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}, \text{ soit encore } P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

**INÉGALITÉ DE CONCENTRATION** Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  et de variance  $V$ .

Alors, pour tout réel  $\delta > 0$ , on a :  $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ .

#### DÉMONSTRATION

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à  $M_n$  :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}. \text{ D'une part, } E(M_n) = \mu \text{ et d'autre part } V(M_n) = \frac{V}{n},$$

$$\text{ce qui entraîne } P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

### Loi faible des grands nombres

**THÉORÈME** Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  et de variance  $V$ .

Alors pour tout réel  $\delta > 0$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$ .

#### DÉMONSTRATION

Soit  $\delta$  un réel strictement positif. D'après l'inégalité de concentration, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ .

$$\text{D'où : } 0 \leq P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{V}{n\delta^2} \right) = 0.$$

Avec le théorème des gendarmes, on en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$ .

Ce résultat justifie la possibilité de définir des probabilités en prenant pour valeurs approchées les fréquences obtenues pour un « grand » nombre d'essais.



## Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On lance 3 600 fois une pièce de monnaie non truquée.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

- 1 Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable  $X$ .
- 2 Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

### Conseil

On peut utiliser une propriété de la valeur absolue pour écrire différemment un intervalle :

$$|x - a| < r \text{ équivaut à } a - r < x < a + r.$$

### Voir exercices

70 Pour s'entraîner

95 Pour travailler en autonomie

### Vidéo 08.04

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev



### Méthode

Pour que l'inégalité  $A \leq B$  soit vérifiée sachant que  $A \leq B$ , il suffit d'avoir  $B \leq 0,95$ .

### LOGIQUE

On utilise ici un raisonnement par condition suffisante, voir p. 449.

## Utiliser l'inégalité de concentration pour définir une taille d'échantillon

LOGIQUE

On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon, et  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$ .

- 1 Déterminer  $E(X)$  et  $V(X)$ , puis écrire l'inégalité de concentration relative à  $M_n$ .
- 2 À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

### Solution commentée

- 1  $X$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $\frac{2}{5} = 0,4$  donc  $E(X) = 0,4$  et  $V(X) = 0,4 \times (1 - 0,4) = 0,24$ . On écrit l'inégalité de concentration relative à  $M_n$ , variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$  avec  $\mu = 0,4$  et  $V = 0,24$  :

$$P(|M_n - 0,4| \geq \delta) \leq \frac{0,24}{n\delta^2}, \text{ pour tout réel } \delta > 0.$$

- 2 On cherche ici le plus petit entier  $n$  tel que  $P(0,35 < M_n < 0,45) > 0,95$ .

On remarque que  $0,35 < M_n < 0,45$  équivaut à  $|M_n - 0,4| < 0,05$ .

On veut que  $M_n$  vérifie :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) > 0,95$ .

L'événement contraire de  $\{|M_n - 0,4| < 0,05\}$  est  $\{|M_n - 0,4| \geq 0,05\}$ .

Ainsi :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) = 1 - P(|M_n - 0,4| \geq 0,05)$ .

Donc :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) > 0,95$  équivaut à  $1 - P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) > 0,95$

soit  $P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) < 0,05$  (1).

L'inégalité de concentration avec  $\delta = 0,05$  s'écrit :

$$P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq \frac{0,24}{n \times 0,05^2}, \text{ soit } P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq \frac{60\,000}{n}.$$

L'inégalité (1) sera vérifiée si l'on choisit  $n$  tel que  $\frac{60\,000}{n} < 0,05$

On en déduit :  $0,05n > 60\,000$ , soit  $n > \frac{60\,000}{0,05}$ .

$\frac{60\,000}{0,05} = 1\,200\,000$ , donc le nombre minimal de lancers est 1 200 001.



## Étudier une démonstration

On se propose de démontrer la propriété suivante dans le cas où  $X$  prend ses valeurs sur  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  et  $Y$  sur  $\{y_1; y_2\}$ .

PROPRIÉTÉ DU COURS 1 PAGE 402

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. Alors  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

### RÉDACTION DE LA DÉMONSTRATION

On note  $p_i = P(X = x_i \text{ et } Y = y_1)$  et  $q_i = P(X = x_i \text{ et } Y = y_2)$ , pour tout  $i$  entier compris entre 1 et  $n$ . On forme le tableau ci-contre.

|       | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|-------|-------|-------|-----|-------|
| $y_1$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |
| $y_2$ | $q_1$ | $q_2$ | ... | $q_n$ |

• On calcule d'abord l'espérance de  $X$ :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

5 Or, l'événement  $\{X = x_1\}$  est la réunion disjointe

des événements  $A = \{X = x_1 \text{ et } Y = y_1\}$  et  $B = \{X = x_1 \text{ et } Y = y_2\}$ .

$$\text{D'où : } P(X = x_1) = P(X = x_1 \text{ et } Y = y_1) + P(X = x_1 \text{ et } Y = y_2) = p_1 + q_1.$$

De la même façon, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on a :

$$P(X = x_i) = P(X = x_i \text{ et } Y = y_1) + P(X = x_i \text{ et } Y = y_2) = p_i + q_i$$

10 On en déduit l'espérance de  $X$  :  $E(X) = x_1(p_1 + q_1) + x_2(p_2 + q_2) + \dots + x_n(p_n + q_n)$

$$E(X) = x_1 p_1 + x_1 q_1 + x_2 p_2 + x_2 q_2 + \dots + x_n p_n + x_n q_n \quad (1)$$

• On calcule ensuite l'espérance de  $Y$ .

$Y$  prend les valeurs  $y_1$  et  $y_2$  avec les probabilités  $p_1 + \dots + p_n$  et  $q_1 + \dots + q_n$ .

$$\text{En effet, } P(Y = y_1) = P(X = x_1 \text{ et } Y = y_1) + P(X = x_2 \text{ et } Y = y_1) + \dots + P(X = x_n \text{ et } Y = y_1)$$

$$15 \quad = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

$$\text{D'où : } E(Y) = y_1(p_1 + \dots + p_n) + y_2(q_1 + \dots + q_n) = y_1 p_1 + y_1 p_2 + \dots + y_1 p_n + y_2 q_1 + y_2 q_2 + \dots + y_2 q_n \quad (2)$$

• Par addition membre à membre des égalités (1) et (2) :

$$E(X) + E(Y) = (x_1 p_1 + x_1 q_1 + \dots + x_n p_n + x_n q_n) + (y_1 p_1 + y_1 p_2 + \dots + y_1 p_n + y_2 q_1 + y_2 q_2 + \dots + y_2 q_n)$$

$$E(X) + E(Y) = (x_1 p_1 + y_1 p_1) + (x_1 q_1 + y_1 q_1) + \dots + (x_n p_n + y_1 p_n) + (x_n q_n + y_2 q_n)$$

$$20 \quad E(X) + E(Y) = (x_1 + y_1)p_1 + (x_1 + y_1)q_1 + \dots + (x_n + y_1)p_n + (x_n + y_2)q_n$$

On retrouve toutes les valeurs prises par la variable  $X + Y$  avec les probabilités associées qui sont dans le tableau. Donc :  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

### QUESTIONS

1. Justifier l'affirmation des lignes 5 et 6.
2. Justifier la seconde affirmation de la ligne 13.
3. Quelle notation pratique peut-on utiliser pour simplifier toutes ces écritures ?

## Faire une démonstration

Soit  $X$  une variable aléatoire, et  $a$  et  $b$  deux réels.

**D1** Démontrer que l'espérance de la variable aléatoire  $aX$  est  $aE(X)$ .

**D2** Démontrer que la variance de la variable aléatoire  $aX$  est  $a^2V(X)$ .

**D3** Démontrer que la variable aléatoire  $Y = aX + bY$  a pour espérance  $aE(X) + bE(Y)$  et pour variance  $a^2V(X)$ .

**Piste :** Utiliser la formule de l'espérance et factoriser par  $a$ .



## Calcul mental

1 Calculer et simplifier :

a.  $\frac{1}{4} - \frac{5}{2}$     b.  $\frac{4}{3} + \frac{7}{6}$     c.  $\frac{6}{5} - \frac{1}{15}$     d.  $\frac{1}{12} - \frac{5}{4} + \frac{7}{3}$

2 VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a.  $\frac{11}{13} > \frac{11}{14}$     b.  $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$     c.  $\frac{4}{3} < \frac{5}{4}$     d.  $\frac{7}{10} < \frac{77}{111}$

3 Soit  $P$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = 2x^2 - 3x + 7$ .  
Calculer : a.  $P(0)$     b.  $P(1)$     c.  $P(-1)$

4 Développer et réduire les expressions suivantes, où  $x$  est un réel.

a.  $A = (x-1)(x+4)$

b.  $B = x(2x-1)(2x+1)$

5 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

a.  $3x = 0$

b.  $4x + 1 = 2x - 7$

c.  $\frac{3}{8}x = 5$

d.  $\frac{1}{4}x = \frac{4}{3}$

## Automatismes

## Calculs numériques et algébriques

6 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

a.  $3x - 2 > 5x + 1$

b.  $x^2 - 7 \leq 0$

c.  $x^3 \geq 16x$

d.  $-\frac{5}{12}x > -\frac{15}{4}$

7 Résoudre les systèmes d'équations suivants, où  $x$  et  $y$  sont des réels.

1.  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - 4y = 17 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} 4x + 5y = -3 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$

8 Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels strictement positifs et tels que :  
 $(a+b)(c+1) = 1$ .1. Exprimer  $c$  en fonction de  $a$  et  $b$ .2. Exprimer  $a$  en fonction de  $b$  et  $c$ .9 Factoriser les expressions suivantes, où  $x$  est un réel.

a.  $A = x(x-1) - (x-3)(1-x)$

b.  $B = 9x^2 - 16x^4$

c.  $C = -x^2 - x - 56$

d.  $D = 9x^3 + 12x^2 - 3x$

10 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

a.  $6x^2 + x - 1 = 0$

b.  $x^2 + 6x + 6 = 0$

## Géométrie

11 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

1. La droite passant par le point  $A(-2; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2; -3)$  a pour équation :

a.  $2x - 3y = 1$

b.  $2x - 3y + 7 = 0$

c.  $3x + 2y + 4 = 0$

d.  $3x - 2y + 8 = 0$

2. La valeur exacte de  $\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)$  est :

a.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c.  $\frac{1}{2}$

d.  $-\frac{\pi}{3}$

3. La droite passant par les points  $A(1; 5)$  et  $B(2; -1)$  a pour coefficient directeur

a. 3

b. -6

c.  $\frac{3}{4}$

d.  $-\frac{1}{6}$

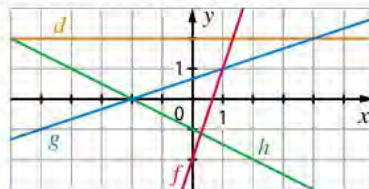
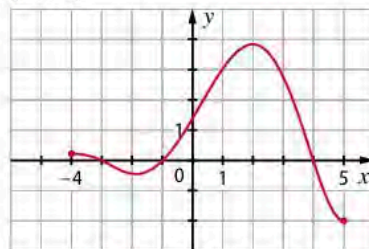
12 Question de méthodes

Comment démontrer que deux droites dont on donne des équations cartésiennes sont parallèles ?

13 Les droites d'équations respectives  $2x - 4y + 1 = 0$  et  $6x + 3y - 5 = 0$  dans un repère orthonormé sont-elles perpendiculaires ?

## Lectures graphiques

14 Déterminer par lecture graphique les équations réduites des droites données ci-dessous.

15 La fonction  $f$  représentée ci-dessous est définie sur l'intervalle  $[-4; 5]$ .

Résoudre graphiquement :

a.  $f(x) \leq 3$

b.  $f(x) > 0$



## Opérations sur les variables aléatoires

## Questions flash

## 16 ORAL VRAI/FAUX

Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs 1 et 3, et  $Y$  une variable aléatoire prenant les valeurs 0 et 2.

On pose  $Z = 2X$  et  $T = X + Y$ .

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La variable aléatoire  $Z$  prend les valeurs 2 et 6.
2. La variable aléatoire  $T$  prend les valeurs 0 et 5.

17 La variable aléatoire  $X$  prend les valeurs 1 et 3.

La variable aléatoire  $Y$  prend les valeurs 0, 1 et 2.

Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire  $X + Y$  ?

18 On lance successivement deux dés équilibrés. On note  $X$  (respectivement  $Y$ ) la variable aléatoire qui, à un lancer, associe le nombre inscrit sur la face supérieure du premier dé (respectivement du second dé).

Soit la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

1. Quelles sont les valeurs prises par  $Z$  ?
2. Interpréter l'événement  $\{Z = 12\}$ .
3. Interpréter l'événement  $\{Z = 11\}$ .

19 La variable aléatoire  $X$  prend pour valeurs 1, 2 et 3 et elle est telle que  $P(X = 1) = 0,2$  et  $P(X = 2) = 0,3$ .

Soit la variable aléatoire  $Y = 3X$ .

1. Quelle sont les valeurs prises par  $Y$  ?
2. Déterminer  $P(Y = 3)$  et  $P(Y = 6)$ .
3. Déterminer  $P(Y = 9)$ .

20 On lance deux pièces équilibrées marquées 0 et 1 sur leurs faces. On note  $X$  (respectivement  $Y$ ) la variable aléatoire qui, au lancer de la première pièce (respectivement deuxième pièce) associe le numéro de sa face supérieure.

Soit la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

1. Déterminer  $P(Z = 0)$ .
2. a. Exprimer l'événement  $\{Z = 1\}$  à l'aide des événements  $A = \{X = 0 \text{ et } Y = 1\}$  et  $B = \{X = 1 \text{ et } Y = 0\}$ .
- b. Montrer que  $P(Z = 1) = 0,5$ .

21 Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes dont on donne les lois :

$P(X = 1) = 0,1$  ;  $P(X = 2) = 0,9$  et  $P(Y = 0) = 0,8$  ;  $P(Y = 1) = 0,2$ .

Soit la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

1. Quelles sont les valeurs prises par  $Z$  ?
2. Justifier que  $P(Z = 1) = 0,08$ .
3. Calculer  $P(Z = 3)$ .
4. En déduire  $P(Z = 2)$ .

22 Rico obtient chaque semaine une certaine somme d'argent de poche de la part de son père et de sa mère. On note  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires égales respectivement

aux sommes en euros données par son père et par sa mère, et on suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

On donne leurs lois ci-dessous.

|              |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|
| $x_i$        | 8   | 10  | 12  |
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | 0,7 | 0,1 |

|              |     |     |
|--------------|-----|-----|
| $y_i$        | 8   | 10  |
| $P(Y = y_i)$ | 0,4 | 0,6 |

Soit la variable aléatoire  $S = X + Y$ .

1. Interpréter la variable  $S$ .
2. Quelles sont les valeurs prises par  $S$  ?
3. Calculer  $P(S = 16)$ .
4. a. Exprimer l'événement  $\{S = 18\}$  à l'aide des événements  $A = \{X = 8 \text{ et } Y = 10\}$  et  $B = \{X = 10 \text{ et } Y = 8\}$ .
- b. Montrer que  $P(S = 18) = 0,4$ .

## Propriétés des opérations sur les variables aléatoires

## Questions flash

## 23 ORAL VRAI/FAUX

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1.  $E(5X) = 5E(X)$
2.  $E(-X) = -E(X)$
3.  $E(2X - Y) = 2E(X) + E(Y)$
4.  $V(4X) = 4V(X)$

24 QCM Choisir la ou les bonnes réponses.

Soit  $X$  une variable aléatoire. Alors,  $V(-2X + 5)$  est égal à :

- a.  $4V(X)$    b.  $-2V(X) + 5$    c.  $-2V(X)$    d.  $4V(X) + 5$

25 Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes d'écarts-type respectifs 3 et 4.

1. Déterminer l'écart-type de  $X + Y$ .
2. Déterminer la variance de  $2X - Y$ .
3. Déterminer la variance de  $-3X + 1$ .

26 À chaque jour ouvré de la semaine, on associe le chiffre d'affaires d'un supermarché : ceci définit une variable aléatoire  $X$  d'espérance 120 (en milliers d'euros). On suppose qu'il y a indépendance entre les chiffres d'affaires des différents jours.

1. Quelle variable aléatoire  $Y$  est associée au chiffre d'affaires d'une semaine ?
2. Déterminer l'espérance de  $Y$ .

27 Pour la réalisation d'un projet, une société doit effectuer successivement deux tâches A et B. Soit  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de la tâche A (en semaines) et  $Y$  la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de la tâche B (en semaines). On suppose que la durée de la tâche A n'a pas d'influence sur la durée de la tâche B.

L'espérance de  $X$  est 22 et son écart-type est 3. L'espérance de  $Y$  est 25 et son écart-type est 4.

1. Que représente la variable aléatoire  $Z = X + Y$  ?
2. Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $Z$ .



## 28 PYTHON Compléter un programme

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. On donne ci-contre le script incomplet de la fonction `sommeva` de paramètres :

```
from math import*
def sommeva(EX, SX, EY, SY):
 EZ = ...
 SZ = ...
 return(...)
```

- l'espérance  $EX$  et l'écart-type  $SX$  de  $X$  ;
- l'espérance  $EY$  et l'écart-type  $SY$  de  $Y$ .

Recopier et compléter cette fonction afin qu'elle retourne l'espérance et l'écart-type de la variable  $X + Y$ .

## Échantillon de taille $n$ d'une loi de probabilité

### Questions flash

**29** Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 20 et de variance 5.

1. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire somme  $S_{50}$  d'un échantillon de taille 50 de la variable  $X$  ?
2. Quelle est la variance de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 200 de  $X$  ?

**30** ORAL Déterminer l'espérance et la variance de la loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = 0,1$ .

**31** Déterminer l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale de paramètres  $n = 100$  et  $p = 0,2$ .

**32** La masse en grammes d'un paquet de café est donnée par une variable aléatoire  $C$  d'espérance 250 et de variance 4. Soit  $L$  la variable aléatoire donnant la masse en grammes d'un lot de deux paquets. On suppose les masses des deux paquets indépendantes entre elles. Déterminer  $E(L)$  et  $V(L)$ .

**33** Une machine remplit automatiquement des pots de yaourt dont la masse (en grammes) de produit est associée à une variable aléatoire  $Y$  d'espérance 125 et d'écart-type 1,2. On suppose que les remplissages des pots sont des tirages indépendants.



1. Exprimer la masse d'un lot de 16 pots comme la variable aléatoire somme  $S_{16}$  d'un échantillon de la variable  $Y$ .
2. Déterminer l'espérance de  $S_{16}$ .
3. Montrer que l'écart-type de  $S_{16}$  est 4,8.

**34** Une machine produit des joints dont l'épaisseur définit une variable aléatoire  $X$  d'espérance 2 mm et d'écart-type 0,1 mm. Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ .

1. Déterminer l'espérance de  $M_n$ .
2. Calculer l'écart-type de  $M_{100}$ , puis de  $M_{10\,000}$ .

**35** Dans une population d'adultes, la variable aléatoire  $X$  associe à chaque individu sa glycémie, en milligrammes par 100 millilitres. On suppose que  $X$  a pour espérance 92 et pour écart-type 7. Soit  $M_{400}$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 400 de la variable aléatoire  $X$ . Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $M_{400}$ .

## Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

### Questions flash

**36** 1. Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu = 10$  et de variance  $V(X) = 0,5$ . Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et justifier que  $P(|X - 10| \geq 1) \leq 0,5$ .

2. Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire  $X$  d'espérance 0. Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n| \geq 1)$  ?

**37** Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu = 1$  et de variance  $V(X) = 0,2$ . Justifier, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que  $P(|X - 1| \geq 0,5) \leq 0,8$ .

**38** Une usine fabrique des tubes dont l'épaisseur en millimètres définit une variable aléatoire  $X$  d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

1. Justifier, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :  $P(|X - 1,5| \geq 0,15) < 0,22$ .
2. En déduire que  $P(1,35 < X < 1,65) > 0,78$ .

**39** Une épreuve consiste à tirer au hasard dix jetons avec remise dans un sac contenant 40 % de jetons bleus. On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, à cette série de tirages, associe le nombre de jetons bleus obtenus.

1. a. Justifier que  $X$  suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.
- b. Déterminer son espérance.
- c. Montrer que sa variance est 0,24.
2. Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que  $P(|X - 4| \geq 2) \leq 0,06$ .
3. a. Quel est l'événement contraire de l'événement  $\{|X - 4| \geq 2\}$  ?
- b. Montrer que  $P(|X - 4| < 2) \geq 0,94$ .

**40** LOGIQUE Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire  $X$ . On suppose que  $X$  a pour espérance 0 et pour variance 1.

1. Montrer, en appliquant l'inégalité de concentration à  $M_n$ , que l'on a :  $P(|M_n| \geq 4) \leq \frac{1}{4n}$ .

2. QCM Choisir la bonne réponse.

Par quelle expression doit-on compléter le raisonnement suivant :

« Pour que  $P(|M_n| \geq 4)$  soit inférieur ou égal à 0,01,

..... que  $\frac{1}{4n}$  soit inférieur ou égal à 0,01. »

- a. il faut ?
- b. il suffit ?
- c. il faut et il suffit ?



## Somme de variables aléatoires

## 41 Capacité 1, p. 403

On lance deux dés équilibrés A et B à six faces (numérotées de 1 à 6). On définit la variable aléatoire  $X$  qui, à chaque lancer du dé A, associe comme gain le numéro obtenu s'il est inférieur à 4, et 0 sinon.

On définit la variable aléatoire  $Y$  qui, à chaque lancer du dé B, associe comme gain 0 si le numéro obtenu est multiple de 3, 1 si c'est le numéro 5 et 2 sinon.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

## 42 Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges.

On tire successivement 2 boules de l'urne, sans remise.

On note  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon, et  $Y$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la seconde boule tirée est blanche et 0 sinon.

- Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .
- Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

43 Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs 0 et 1,

et  $Y$  une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 0.

On donne les probabilités :

$$P(X = 0 \text{ et } Y = -1) = 0,1 ; P(X = 0 \text{ et } Y = 0) = 0,4 ;$$

$$P(X = 1 \text{ et } Y = -1) = 0,3 ; P(X = 1 \text{ et } Y = 0) = 0,2.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

## 44 On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées 1, 1, 2, 2 pour le premier et 1, 2, 3, 3 pour le second.

La variable aléatoire  $X$  (respectivement  $Y$ ) associe à chaque lancer le numéro inscrit sur la face inférieure du premier dé (resp. du second dé).

Soit la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

- Déterminer la loi de  $X$ , puis celle de  $Y$ .
- Déterminer la loi de  $Z$ .

45  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes, telles que  $X$  et  $Y$  suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{4}$ .

Soit  $Z$  la variable  $Z = X + Y$ .

- Calculer  $P(Z = 1)$ .
- Déterminer la loi de  $Z$ .
- Calculer  $P_{Z=1}(X = 1)$ .
- Calculer  $P_{X=1}(Z = 2)$ .

## 46 VRAI/FAUX

Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs 1 et 2.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- $P(X + Y = 2) = P(X = 1) + P(Y = 1)$ .
- $P(X + Y = 3) = P(X = 1) \times P(Y = 2)$ .
- $P(X + Y = 4) = P(X = 2) \times P(Y = 2)$ .

## 47 Une question ouverte

Une secrétaire donne  $n$  coups de téléphone à  $n$  correspondants. On admet que chaque appel est indépendant des précédents et on note  $p$  la probabilité d'obtenir le correspondant cherché.

Après ses  $n$  recherches, la secrétaire contacte, une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des correspondants qui n'ont pas répondu lors du premier appel.

La variable aléatoire  $X$  (respectivement  $Y$ ) associe à la première série d'appels (resp. seconde série) le nombre de correspondants qui ont répondu.

Déterminer en fonction de  $p$  la probabilité de l'événement  $\{X + Y = 1\}$ .

Piste → Voir p. 466

## Propriétés de la somme de variables aléatoires

## 48 Capacité 2, p. 403

Un promoteur a observé pendant plusieurs mois le nombre d'appartements vendus. Il a établi la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  qui, à un mois donné, associe le nombre d'appartements vendus.



| $x_i$        | 0    | 1    | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    | 7    | 8    |
|--------------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| $P(X = x_i)$ | 0,02 | 0,06 | 0,08 | 0,25 | 0,2 | 0,13 | 0,12 | 0,08 | 0,06 |

Il a d'autre part constaté que les ventes des mois successifs étaient indépendantes.

- Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre annuel d'appartements vendus.
- L'agence touche 1 000 € pour la vente d'un appartement et les charges fixes annuelles s'élèvent à 50 000 €. Calculer l'espérance et la variance du bénéfice annuel de l'agence.

## MÉTHODE À L'ORAL

49 Lionel étudie le temps qu'il passe chaque année pour se rendre à son travail et en revenir. Il note  $D$  la variable aléatoire qui, à chacun de ses déplacements, associe sa durée, en minutes. Il estime que  $D$  a pour espérance 15 et pour écart-type 10. Il fait un aller-retour par jour, 5 jours par semaine et cela pendant 46 semaines.

On veut déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire associée à la durée de ses trajets sur un an.

- Comment relie-t-on la question posée à la variable  $D$  ?
- Quelles formules doit-on appliquer ?



**50** On lance un dé équilibré 10 fois de suite. On gagne chaque fois une somme en euros égale au numéro de la face supérieure du dé. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à cette expérience, associe le gain total en euros. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**51** Soit  $n$  un entier naturel non nul. On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ , si et seulement si, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$  :  $P(X = k) = \frac{1}{n}$ .

1. Calculer l'espérance de  $X$ .

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$  :  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

b. Calculer la variance de  $X$ .

3. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ .

Déterminer l'espérance et la variance de la variable  $X + Y$ .

**52** La société Salonrama a procédé à une étude statistique de la demande mensuelle des canapés du modèle « Plaisir ». Cette demande est alors modélisée par la variable aléatoire  $D$  dont on donne la loi de probabilité ci-dessous.

| Nombre de canapés $n_i$ | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
|-------------------------|------|------|------|------|------|
| $P(D = n_i)$            | 0,10 | 0,35 | 0,25 | 0,15 | 0,15 |

1. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette loi.

2. On suppose que les demandes d'un mois à l'autre sont des variables aléatoires indépendantes.

Établir la loi de probabilité de la demande  $X$  pour une période de deux mois.

3. Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $X$ .

**53** La variable aléatoire  $X$  associe à une station de métro donnée le nombre de voyageurs qui montent dans une rame de métro.

La variable aléatoire  $Y$  associe le nombre de voyageurs qui en descendent, et la variable aléatoire  $Z$  associe le nombre de voyageurs dans la rame avant l'arrivée à la station.

On suppose ces trois variables aléatoires indépendantes entre elles.

$X$ ,  $Y$  et  $Z$  ont pour espérances respectives 40, 30 et 100, et pour écarts-type respectifs 9, 12 et 20.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire  $N$  égale au nombre de voyageurs qui repartent dans la rame.

**54** Pour aller à son lycée à vélo, Marion rencontre 6 feux tricolores. L'état de chaque feu est indépendant des autres et la probabilité qu'un feu soit vert est  $\frac{2}{3}$ . Quand le feu est orange ou rouge, elle s'arrête et perd 1 minute et 30 secondes.

Le lycée est situé à trois kilomètres de son domicile et Marion roule en moyenne à 15 km/h entre les feux.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque trajet de l'élève, associe le nombre de feux verts rencontrés et  $T$  la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le temps en minutes mis par l'élève pour rejoindre le lycée.

1. Quelle loi suit  $X$  ? Préciser ses paramètres.

2. a. Si Marion n'a qu'un seul feu vert, combien de temps met-elle pour aller au lycée ?

b. Exprimer  $T$  en fonction de  $X$ .

c. En déduire l'espérance et la variance de  $T$ .

3. Marion décide de partir 15 minutes avant le début des cours. Quelle est la probabilité pour qu'elle arrive en retard au lycée ?

**55** Une agence de location de voiture dispose de trois voitures qu'elle loue à la journée.



On admet que la demande journalière de véhicules est une variable aléatoire  $X$  dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

| $x_i$        | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|--------------|------|------|------|------|------|------|
| $P(X = x_i)$ | 0,22 | 0,37 | 0,24 | 0,10 | 0,05 | 0,02 |

On suppose que tous les véhicules sont en état de marche. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

1. Déterminer la loi de  $Y$ .

2. Calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .

3. Le prix de location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.

a. Exprimer la variable aléatoire  $B$  égale au bénéfice journalier en fonction de  $Y$ .

b. Calculer l'espérance et la variance de  $B$ .

#### MATHS & SES

**56** Un fabricant de machines à laver a observé qu'une machine à laver sur 10 tombe en panne au cours de la première année d'utilisation.

Plutôt que de faire réparer à ses frais les machines en panne, dont le coût est de 100 € par machine, il préfère accorder aux revendeurs une remise de 20 euros par machine vendue, moyennant quoi les revendeurs se chargent des réparations éventuelles.

1. Un revendeur vend 40 machines par an.

a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire  $X$  qui, à une année, associe le nombre de machines issues de ce revendeur en panne au cours de la première année d'utilisation.

b. En déduire le profit moyen pour le revendeur résultant de cette proposition.

c. Déterminer la probabilité que cette proposition ne soit pas favorable au revendeur

2. Un autre revendeur vend 10 machines par an.

a. Répondre aux questions du 1. pour ce revendeur.

b. Comparer la proposition du fabricant pour ces deux revendeurs.



## 57 Une question ouverte

Dans un atelier, deux machines sont utilisées pour fabriquer des pièces identiques. La machine  $M_1$  produit 5 % de pièces défectueuses et la machine  $M_2$  en produit 2 %. Chaque jour, on prélève au hasard 10 pièces de la production de la machine  $M_1$  et 20 pièces de la production de la machine  $M_2$ . La production de ces deux machines étant importante, on assimile le prélèvement des pièces pour chacune d'elles à un tirage avec remise.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement journalier, associe le nombre de pièces défectueuses.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $X$ .

Piste → Voir p. 466

58 Le jeu des mille euros est un jeu radiophonique au cours duquel une équipe de deux candidats doit répondre successivement à six questions de difficulté progressive : trois questions bleues, deux questions blanches et une question rouge.

On estime que la probabilité de répondre juste à une question bleue est 0,95, celle de répondre juste à une question blanche est 0,90 et celle de répondre juste à une question rouge est 0,80. Les questions sont indépendantes entre elles.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre de réponses justes aux questions bleues,  $Y$  la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre de réponses justes aux questions blanches, et  $Z$  la variable aléatoire qui, à une équipe, associe 1 si elle répond juste à la question rouge et 0 sinon.

1. Déterminer les lois suivies par  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ .
2. Déterminer l'espérance et la variance de chacune de ces variables aléatoires.
3. On appelle  $R$  la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre total de réponses justes. Déterminer l'espérance et la variance de  $R$ .
4. Les candidats qui ont 6 réponses justes accèdent directement à la question « Banco », et ceux qui ont 5 réponses justes passent par un repêchage pour accéder au « Banco ». On estime que la probabilité de répondre correctement à la question de repêchage est 0,8.

- a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.
  - b. Quelle est la probabilité d'accéder directement à la question « Banco » ?
  - c. Quelle est la probabilité de passer par le repêchage ?
  - d. Quelle est la probabilité d'accéder au « Banco » ?
5. La probabilité de répondre juste à la question « Banco » est 0,4.  
Quelle est la probabilité, pour une équipe de candidats qui se présente au jeu, de remporter le « Banco » ?

## LE SAVIEZ-VOUS

Le jeu des mille euros est un jeu radiophonique quotidien, diffusé sur France Inter peu avant 13 heures. C'est le plus ancien jeu de la radio : il a été créé en 1958 et s'appelait alors « le jeu des 1 000 francs ».

## Représentation d'une variable aléatoire comme somme de variables plus simples

## 59 Capacité 3, p. 405

Soit  $a$  et  $b$  des entiers naturels non nuls. On tire avec remise un jeton dans une urne contenant  $a$  jetons marqués +1 et  $b$  jetons marqués -1.

Sur un axe d'origine  $O$ , à chaque jeton tiré, on déplace un pion d'une unité vers la droite si le jeton est marqué +1 et d'une unité vers la gauche si le jeton est marqué -1. Au départ, le pion est en  $O$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $i$  un entier tel que  $1 \leq i \leq n$ . On désigne par  $T_i$  la variable aléatoire égale au numéro inscrit sur le jeton tiré au  $i$ -ième tirage et par  $X$  la variable aléatoire égale à l'abscisse du pion à l'issue de  $n$  déplacements.

1. Exprimer  $X$  en fonction des variables  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .
2. Calculer  $E(T_i)$  et en déduire l'espérance de  $X$ .

60 Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré trois fois successivement, puis une pièce de monnaie non truquée cinq fois successivement.

On gagne autant d'euros que le numéro inscrit sur le dé, et un euro quand on obtient pile.

Pour tout entier  $k$  compris entre 1 et 3, on note  $X_k$  la variable aléatoire qui, au  $k$ -ième lancer du dé, associe le gain obtenu et, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et 5,  $Y_i$  la variable aléatoire qui, au  $i$ -ième lancer de la pièce, associe le gain obtenu.

1. Calculer  $E(X_k)$  et  $V(X_k)$ .
2. Calculer  $E(Y_i)$  et  $V(Y_i)$ .
3. Soit  $Z$  la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur.
  - a. Exprimer  $Z$  en fonction des variables  $X_k$  et  $Y_i$ .
  - b. En déduire l'espérance et la variance de  $Z$ .

61 Soit  $n$  cartes numérotées de 1 à  $n$ .

On permute au hasard les cartes de ce jeu et on note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de cartes qui occupent leur place « naturelle ».

Pour  $k$  entier compris entre 1 et  $n$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la  $k$ -ième carte est à sa place et 0 sinon.

1. Montrer que  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .
2. En déduire l'espérance de  $Y$ .

62 Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Deux joueurs A et B disposent d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « Face » à chaque lancer est égale à  $\frac{1}{2}$ .

Chacun des deux joueurs lance la pièce  $n$  fois.

On désigne par  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires suivantes :  $X$  représente le nombre de « Face » obtenus par A, et  $Y$  représente le nombre de « Face » obtenus par B.

On définit aussi :  $Z = X + Y$  et  $T = X - Y$ .

1. Déterminer la loi suivie par les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .
2. Déterminer la probabilité des événements  $\{Z = 1\}$  et  $\{Z = n\}$ .
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type des variables  $Z$  et  $T$ .



**63** On répartit au hasard  $n$  boules dans  $n$  urnes, où  $n$  est un entier naturel non nul. Pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire qui, à l'urne numéro  $i$ , associe 1 si cette urne est vide, et 0 sinon.

**1. a.** Montrer que la probabilité que la première boule ne soit pas dans l'urne numéro  $i$  est  $1 - \frac{1}{n}$ .

**b.** Déterminer  $p(X_i = 1)$ .

**c.** Calculer l'espérance de  $X_i$ .

**2.** Déterminer en fonction de  $n$  l'espérance de la variable aléatoire qui, à l'ensemble de ces  $n$  urnes, associe le nombre d'urnes vides.

### 64 Une question ouverte

Soit deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ . La première urne contient cinq boules rouges et trois boules noires. La deuxième urne contient trois boules rouges et sept boules noires.

On tire une boule dans  $U_1$ , on note sa couleur et on la remet dans  $U_1$ . Puis on fait de même avec  $U_2$ . Cette succession de deux tirages est répétée  $n$  fois, avec  $n$  entier naturel non nul. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à l'ensemble de  $2n$  tirages (où  $n$  est un entier naturel non nul), associe le nombre de boules rouges extraites.

Déterminer l'espérance de  $X$ .

**Piste → Voir p. 466**

## Échantillons de taille $n$ d'une variable aléatoire

### 65 Capacité 4, p. 405

On suppose que la masse d'un certain type de colis que reçoit une entreprise définit une variable aléatoire d'espérance 300 kg et d'écart-type 50 kg. On place ces colis sur un monte-charge, et on s'intéresse à la variable aléatoire  $M$  qui, à un groupe de 25 colis, associe la masse totale de l'ensemble des colis.

On note  $P_i$  la variable aléatoire associée à la masse du  $i$ -ième colis.

**1.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $M$ .

**2.** On suppose les variables  $P_i$  indépendantes. Déterminer l'écart-type de  $M$ .

**66** On dispose de deux dés bien équilibrés : un dé rouge, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et un dé bleu, comportant deux faces marquées 1, deux faces marquées 2, deux faces marquées 3.

On lance simultanément les deux dés ; le gain du joueur est la somme des numéros sortis sur le dé rouge et le dé bleu.

On note  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires qui, à chaque lancer des dés, associent respectivement le numéro du dé rouge et celui du dé bleu.

**1.** Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .

Calculer  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$  et  $V(Y)$ .

**2.** Soit  $Z$  la variable aléatoire qui associe à cette épreuve le gain du joueur.

Montrer que  $E(Z) = \frac{9}{2}$  et  $V(Z) = \frac{43}{12}$ .

**3.** On répète 10 fois cette épreuve, et on appelle  $S$  la variable aléatoire qui, à cet ensemble d'épreuves, associe le gain total du joueur. Déterminer l'espérance et la variance de  $S$ .

**67** Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Une urne contient des boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue  $n$  tirages au hasard d'une boule avec remise à chaque fois de la boule tirée et on note  $X_i$  le numéro de la boule obtenue au  $i$ -ième tirage. On suppose les variables  $X_i$  indépendantes. Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne de l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Calculer l'espérance et la variance de la variable  $M_n$ .

**68** La conformité d'un produit est examinée successivement par quatre contrôleurs qualité. L'espérance du temps nécessaire à chaque contrôleur pour inspecter le produit est de 30 secondes et l'écart-type de ce temps est de 6 secondes. De plus, le temps nécessaire à un contrôleur pour inspecter le produit ne dépend pas du temps nécessaire à un autre contrôleur pour inspecter le produit.

On note  $T$  la variable aléatoire qui, à un produit choisi au hasard, associe le temps nécessaire aux contrôleurs pour l'inspecter.

**1.** Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $T$ .

**2.** Combien faudrait-il de contrôleurs au minimum pour que l'écart-type de ce temps d'inspection soit inférieur ou égal à 2 ?

### 69 VRAI/FAUX

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 5 et d'écart-type 2. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $S_n$  (respectivement  $M_n$ ) la variable aléatoire somme (resp. moyenne) d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$ .

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

**a.** L'espérance de  $S_{10}$  est 50.

**b.** La variance de  $M_{100}$  est 0,2.

**c.** L'écart-type de  $S_{400}$  est 40.

**d.** L'espérance de  $M_{50} - 50$  est 0.

## Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

### 70 Capacité 5, p. 407

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui, sur le créneau horaire 14 h – 15 h, associe le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport. On estime que  $E(X) = 16$  et  $V(X) = 16$ .

**1.** Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable  $X$ .

**2.** Déterminer une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14 h et 15 h.

**71** Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ .

**1.** Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable  $X$ .

**2.** Déterminer les valeurs du réel positif  $\sigma$  de façon que  $P(|X - \mu| < 15) \geq 0,96$ .

**72 LOGIQUE** L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à une variable aléatoire  $X$  d'espérance 2 et de variance 1 s'écrit, pour tout réel strictement positif  $\delta$  :  $P(|X - 2| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2}$ . Laquelle de ces deux propositions est correcte ?

**a.** Pour que  $P(|X - 2| \geq \delta) \leq 0,1$ , il faut que  $\frac{1}{\delta^2} < 0,1$ .

**b.** Pour que  $P(|X - 2| \geq \delta) \leq 0,1$ , il suffit que  $\frac{1}{\delta^2} < 0,1$ .



**73** Le nombre de matelas en laine que fabrique une petite entreprise d'Ardèche en un mois définit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.

- Justifier que  $P(X \geq 75) \leq P(|X - 50| \geq 25)$ .
- Majorer la probabilité que la production du mois à venir dépasse 75 matelas.
- Minorer la probabilité que la production du mois à venir soit strictement comprise entre 40 et 60 matelas.

**74** Un avion peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Sans les passagers, ni les bagages, mais avec l'équipage et le carburant, il pèse 120 tonnes. Les consignes de sécurité interdisent le décollage si le poids de l'appareil dépasse 129,42 tonnes. Les 100 places ont été occupées.

Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance 70 kg et d'écart-type 10 kg. Le poids de ses bagages suit une loi d'espérance 20 kg et d'écart-type 10 kg. Toutes ces variables sont supposées indépendantes.

- Calculer l'espérance du poids de l'avion au décollage.
- L'espérance calculée est-elle conforme aux normes de sécurité ?
- Calculer l'écart-type du poids total de l'appareil.
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver un majorant de la probabilité pour que le poids réel de l'appareil au décollage dépasse 129,42 tonnes.

**75** Soit la variable aléatoire  $T$  qui, à chaque enfant français âgé d'un an, associe sa taille en centimètres. Des statistiques permettent d'estimer que cette variable a pour espérance 50 et pour écart-type 2.

- Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de  $T$  de taille 10 000.
- À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer la probabilité que cette taille moyenne s'écarte de 50 cm de plus de 0,1 cm.

## 76 VRAI/FAUX

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On appelle  $S_n$  la variable aléatoire somme et  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire d'espérance 4. Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 4| \geq 1) = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(2 < M_n < 6) = 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_n \geq 4,1) = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(3n < S_n < 5n) = 0$

## 77 Une question ouverte

Hugo et Léa jouent à pile ou face avec une pièce truquée. La probabilité d'obtenir « Pile » est 0,49. On gagne un euro quand on obtient « Pile » et on perd un euro dans le cas contraire. Ils jouent  $n$  fois consécutivement à ce jeu. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à  $n$  lancers, associe le gain de Hugo. Montrer qu'il existe un entier  $n$  tel que la probabilité  $P(X > 0)$  soit inférieure à 0,01.

Piste → Voir p. 466

## RETOUR SUR L'OUVERTURE DU CHAPITRE

**78** On définit le sex-ratio d'une population à la naissance comme le rapport du nombre de naissances de garçons sur le nombre de naissances de filles. Pour la population mondiale, il est de 1,05. Pour la Chine, il est de 1,13 (données 2019).



1. Montrer que la proportion  $p_m$  de naissances féminines pour la population mondiale est 0,488 à  $10^{-3}$  près, et que cette proportion  $p_c$  pour la Chine est 0,469 à  $10^{-3}$  près.

2. Soit la variable aléatoire  $X$  qui, à un groupe de 1,3 milliard d'êtres humains (population de la Chine), associe le nombre de femmes de ce groupe.

a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et en préciser ses paramètres.

b. On définit la variable aléatoire :  $F = \frac{1}{1,3 \times 10^9} X$ . Que représente  $F$  ?

c. Déterminer l'espérance et la variance de  $F$ .

3. a. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de la probabilité  $P(|F - p_m| \geq 10^{-2})$ .

b. En considérant la proportion de naissances féminines  $p_c$  de la Chine comme une réalisation de la variable aléatoire  $F$ , majorer la probabilité qu'elle se produise.

c. Que peut-on en penser ?

**79** Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire  $X$ . On suppose que  $X$  a pour espérance 10 et pour écart-type 1.

1. Montrer, en appliquant l'inégalité de concentration à  $M_n$ , que l'on a :  $P(|M_n - 10| \geq 1) \leq \frac{1}{n}$ .

2. a. Résoudre l'inéquation  $\frac{1}{n} \leq 0,01$ , où  $n$  est un entier naturel non nul.

b. En utilisant les questions précédentes, déterminer des valeurs de  $n$  pour lesquelles on a  $P(|M_n - 10| \geq 1) \leq 0,01$ .

## 80 Capacité 6, p. 407

On lance  $n$  fois un dé équilibré à six faces.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, à un lancer donné, associe 1 si la face 1 sort, et 0 sinon.

On note  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ .

1. Déterminer  $E(X)$  et  $V(X)$ , et écrire l'inégalité de concentration relative à la variable  $M_n$ .

2. Combien suffit-il d'effectuer de lancers pour que la fréquence de sortie de la face 1 s'écarte de plus de  $\frac{1}{100}$  de la valeur  $\frac{1}{6}$  avec une probabilité inférieure ou égale à 0,95 ?



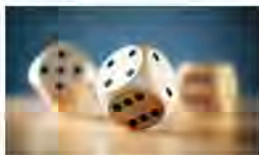
**81** On lance  $n$  fois une pièce équilibrée et l'on désigne par  $F_n$  la variable aléatoire qui, à ces  $n$  lancers, associe la fréquence de « Pile » obtenus.

Déterminer un entier  $n$  tel que la probabilité de l'événement  $\{0,48 < F_n < 0,52\}$  soit au moins égale à 0,95.

**82** Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire d'espérance 40 et de variance 10.

À l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que  $P(|M_n - 40| \leq 2) \geq \frac{1}{2}$ .

**83** On lance  $n$  fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.



Comment suffit-il de choisir  $n$  pour que la probabilité d'obtenir un nombre de fois la face marquée 6 inférieure ou égale à  $\frac{n}{3}$  soit au moins égale à 0,5 ?

#### 84 Histoire des mathématiques

Siméon Denis Poisson, dans le traité *Recherche de la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, publie le texte ci-dessous en 1837.

Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres. Elle consiste en ce que, si l'on observe des nombres très considérables d'événements d'une même nature, dépendants de causes constantes et de causes qui va-vient irrégulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans aucun sens déterminé, on trouvera, entre ces nombres, des rapports à très peu près constants.

Pour chaque nature de choses, ces rapports auront une valeur spéciale dont ils s'écarteront de moins en moins, à mesure que la série d'événements observés augmentera davantage, et qu'ils atteindraient rigoureusement s'il était possible de prolonger cette série à l'infini.

**1.** Dans la deuxième phrase, que veut dire Poisson quand il parle de « rapports à très peu près constants » ?

**2.** Quelle est cette « valeur spéciale dont ils s'écarteront de moins en moins » ?

#### Point Histoire

Siméon Denis Poisson (1781-1840) est un mathématicien et physicien français qui va développer le calcul intégral et le calcul des probabilités.

Une loi de probabilité porte son nom. En théorie de l'élasticité, il introduisit un coefficient qui porte aussi son nom.



**85** Dans une population donnée, on note  $p$  la proportion de personnes en accord avec un projet de loi.

Cette proportion  $p$  est inconnue, mais on sait qu'elle se situe dans l'intervalle  $[0,2 ; 0,8]$ .

Pour chaque personne tirée au hasard dans cette population, on définit la variable aléatoire  $A$  valant 1 si cette personne est d'accord avec le projet de loi, et 0 sinon.

On suppose que les réponses des personnes sont toutes indépendantes entre elles.

**1.** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, soit  $S_n$  la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $A$ .

**a.** Quelle est la loi de  $S_n$  ?

**b.** En déduire  $E(S_n)$  et  $V(S_n)$ , puis l'espérance et la variance de  $F_n = \frac{S_n}{n}$ , variable aléatoire donnant la fréquence des personnes disant « oui au projet de loi » dans un échantillon de taille  $n$ .

**2.** Soit  $\delta$  un nombre réel.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de  $P(|F_n - p| < \delta)$  en fonction de  $n$ ,  $p$  et  $\delta$ .

**3. a.** Montrer, en utilisant les variations de la fonction  $p \mapsto p(1-p)$  que  $p(1-p) \geq 0,16$ .

**b.** Donner une valeur de l'entier  $n$  telle que :

$$P(|F_n - p| < 0,1) > 0,95.$$

**4.** On effectue un sondage sur un échantillon de 350 personnes et on obtient une fréquence de « oui » de 0,6.

Si on se base sur cet échantillon pour en déduire que, dans cette population, une majorité est en faveur du projet de loi, quel est le risque d'erreur que l'on prend ?

## Problème de synthèse

**86** CALCULER RAISONNER

Dans une entreprise, l'étude d'un dossier comporte deux volets : le temps, en heures, consacré à l'étude financière d'un dossier suit une loi de probabilité d'espérance 5 et d'écart-type 2, et celui consacré à l'étude administrative suit une loi d'espérance 3 et d'écart-type 1.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au temps total consacré à l'étude d'un dossier. On admet que les temps d'étude sont indépendants.

**1.** Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $X$ .

**2.** Soit  $T$  la variable aléatoire qui, à un échantillon aléatoire de 100 dossiers de l'entreprise, associe le temps passé à étudier l'ensemble de ces dossiers.

Déterminer l'espérance et la variance de  $T$ .

**3. a.** Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable aléatoire  $T$ .

**b.** Montrer que la probabilité que le temps d'étude de cet échantillon de dossiers soit compris entre 700 et 900 heures est d'au moins 95 %.





Tous ces exercices sont corrigés, leurs solutions succinctes sont disponibles à la fin du manuel (p. 466).  
En flashant la page, vous accéderez aux corrigés rédigés et détaillés sur votre smartphone ou votre tablette.

## L'essentiel

### Opérations sur les variables aléatoires

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires. On définit :

- la variable aléatoire  $aX$ , produit de  $X$  par un réel  $a$  ;
- la variable aléatoire  $X + Y$ , somme des variables  $X$  et  $Y$ .

#### Propriétés

- $E(aX) = a E(X)$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- Si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :  
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $\sigma(aX) = |a| \sigma(X)$

### Variables aléatoires

#### Variables aléatoires indépendantes

- Deux variables aléatoires sont dites indépendantes quand elles sont associées à des épreuves indépendantes.
- Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si, quelles que soient les valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  
 $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$   
où  $X$  prend les valeurs  $x_i$  et  $Y$  les valeurs  $y_j$ .

#### Échantillon d'une loi de probabilité

- Un échantillon de taille  $n$  de la loi de la variable aléatoire  $X$  est une liste  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.
- La variable aléatoire somme d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $X$  est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille  $n$  par :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$E(S_n) = n E(X) \quad V(S_n) = n V(X) \quad \sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$$

- La variable aléatoire moyenne est la variable aléatoire  $M_n = \frac{1}{n} S_n$ .

$$E(M_n) = E(X) \quad V(M_n) = \frac{1}{n} V(X) \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

- Loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  : c'est la variable somme de  $n$  variables aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Espérance :  $np$

Variance :  $np(1-p)$  Écart-type :  $\sqrt{np(1-p)}$

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  et de variance  $V$ .

#### Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout réel  $\delta > 0$ ,  $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ .

#### Inégalité de concentration

Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable  $X$ .

Pour tout réel  $\delta > 0$ ,  $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ .

#### Loi faible des grands nombres

Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable  $X$ .

Pour tout réel  $\delta > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$ .

## Faire le point avec des exercices corrigés

### Déterminer la somme de deux variables aléatoires

**87** 10 min Capacité 1, p. 403

Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes dont on donne les lois.

|              |     |     |
|--------------|-----|-----|
| $x_i$        | 0   | 1   |
| $P(X = x_i)$ | 0,4 | 0,6 |

|              |     |     |
|--------------|-----|-----|
| $y_i$        | 1   | 2   |
| $P(X = y_i)$ | 0,7 | 0,3 |

Soit la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

- Déterminer  $P(Z = 1)$  et  $P(Z = 3)$ .
- En déduire  $P(Z = 2)$ .

**88** 15 min Capacité 1, p. 403

Deux dés équilibrés sont tels que le premier comporte trois faces marquées 1 et les autres marquées 2, et le second comporte une face marquée 0, trois faces marquées 1 et deux faces marquées 2.

On note  $X$  (resp.  $Y$ ) la variable aléatoire qui au lancer du 1<sup>er</sup> dé (resp. du second dé) associe le nombre inscrit sur sa face supérieure.

Soit la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

- Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .
- Calculer  $P(Z = 1)$  et  $P(Z = 4)$ .
- Montrer que  $P(Z = 2) = \frac{1}{3}$ .
- En déduire la loi de  $Z$ .



## Calculer l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires

**89** 10 min Capacité 2, p. 403

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires d'espérances respectives 3 et 5.

- Déterminer l'espérance de  $Z = X + Y$ .
- Déterminer l'espérance de  $T = -2X + 4Y$ .
- Peut-on trouver un réel  $a$  tel que la variable aléatoire  $U = aX - Y$  ait pour espérance 0 ?

**90** 20 min Capacités 2 et 3, pp. 403-405

Un sociologue étudie la différence de taille entre les hommes et les femmes. On note  $H$  (resp.  $F$ ) la variable aléatoire qui, à un homme (resp. une femme) choisi(e) au hasard dans ce pays, associe sa taille en centimètres.

$H$  a pour espérance 178 et pour écart-type 7 ;  $F$  a pour espérance 164 et pour écart-type 6.

On suppose les variables  $H$  et  $F$  indépendantes.

On note  $D$  la variable aléatoire qui, à un homme et une femme choisis au hasard, associe leur différence de taille, en centimètres.

Calculer l'espérance et la variance de  $D$ .

**91** 20 min Capacités 2 et 3, pp. 403-405

La variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4. La variable aléatoire  $Y$  suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,6. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire  $Z = 2X - Y$ .

**92** 20 min Capacité 2, p. 403

Une machine fabrique 10 000 pièces par jour, dont certaines sont défectueuses. La probabilité qu'une pièce soit acceptable est 0,99. On suppose que les défauts sont indépendants d'une pièce à l'autre.

Une pièce acceptable procure un gain de 4 euros et une pièce défectueuse une perte de 60 euros pour l'entreprise.

Soit  $Z$  la variable aléatoire qui, à la production journalière, associe le bénéfice de l'entreprise.

Déterminer l'espérance de  $Z$ , et l'interpréter.

## Utiliser la somme et la moyenne d'un échantillon

**93** 15 min Capacité 4, p. 405

### VRAI/FAUX

Une variable aléatoire  $X$  a pour espérance 10 et pour variance 4. On note  $S$  la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille 10 000 de  $X$ , et  $M$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 10 000 de  $X$ .

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- L'espérance de  $S$  est 100 000.
- La variance de  $S$  est 20 000.
- L'espérance de  $M$  est 10 000.
- L'écart-type de  $M$  est 200.

**94** 15 min Capacité 4, p. 405

Un magasin vend des articles de sport. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque jour ouvrable, associe le nombre d'articles vendus ce jour-là. On suppose que  $X$  a pour espérance 1 800 et pour écart-type 200.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 jours ouvrables, associe la moyenne des ventes journalières d'articles au cours des 100 jours.

On fait l'hypothèse que les ventes sont indépendantes d'un jour à l'autre.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de  $Y$ .

## Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**95** 10 min Capacité 3, p. 407

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu = 0,5$  et de variance  $V(X) = 0,125$ .

Justifier, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que  $P(|X - 0,5| \geq 1) \leq 0,125$ .

**96** 20 min Capacité 3, p. 407

On lance 4 000 fois un dé à quatre faces bien équilibré. Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de fois où on obtient le 1 sur la face inférieure du dé.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable  $X$ .

2. Minorer la probabilité que le nombre de fois où l'on obtient le 1 soit strictement compris entre 920 et 1 080.

**97** 20 min Capacité 5, p. 407

Dans une galerie marchande, une pharmacie dispose de deux accès, un par le parking, l'autre par la galerie. On note  $Z_1$  la variable aléatoire qui, à l'intervalle de temps 18 h-19 h, associe le nombre de clients qui rentrent dans la pharmacie par le parking, et  $Z_2$  la variable aléatoire qui, à ce même intervalle de temps, associe le nombre de clients qui rentrent par la galerie.  $Z_1$  a pour espérance 20 et pour écart-type 2 ;  $Z_2$  a pour espérance 15 et pour écart-type 1. On suppose  $Z_1$  et  $Z_2$  indépendantes.

- Que mesure la variable aléatoire  $Z = Z_1 + Z_2$  ?
- Déterminer l'espérance et la variance de  $Z$ .
- Déterminer un minorant de la probabilité que le nombre de clients entrés entre 18 h et 19 h soit strictement compris entre 30 et 40.

**98** 25 min Capacité 6, p. 407

Le nombre de buts marqués par match par l'attaquant vedette d'une équipe de football est donné par la variable aléatoire  $B$  qui suit la loi suivante.

|              |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| $b_i$        | 0   | 1   | 2   | 3   |
| $P(B = b_i)$ | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 |

- Calculer  $E(B)$  et  $V(B)$ .
- On note  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $B$ .
  - Écrire l'inégalité de concentration pour la variable  $M_n$ .
  - En déduire que  $P(1 < M_n < 1,6) \geq 1 - \frac{9}{n}$ .
  - Combien l'attaquant doit-il avoir joué de matchs pour qu'il ait marqué en moyenne plus d'un but par match, avec une probabilité d'au moins 0,90 ?



## Revoir des points essentiels

## PARCOURS 1 Utiliser les propriétés de l'espérance et de la variance

■ **Un exemple :** Une petite station de ski ne fonctionne que le week-end.

Le samedi, le nombre de forfaits vendus suit une loi de probabilité d'espérance 100 et d'écart-type 8. Le dimanche, le nombre de forfaits vendus suit une loi de probabilité d'espérance 250 et d'écart-type 15.

On suppose qu'il y a indépendance entre le nombre de forfaits vendus d'un jour à l'autre.

Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire  $N$  qui, à un week-end donné, associe le nombre de forfaits vendus sur le week-end.

| Ma réflexion          | → Ma démarche                                                                                                                                                   |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Que me demande-t-on ? | Je dois calculer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire $N$ .<br>► Exprimer $N$ en fonction de deux autres variables aléatoires.                  |
| Comment démarrer ?    | Je nomme ces variables aléatoires $X$ et $Y$ .<br>► Traduire l'énoncé en donnant $E(X)$ et $E(Y)$ , puis en calculant $V(X)$ et $V(Y)$ .                        |
| Comment continuer ?   | Je dois appliquer des formules du cours relatives à l'espérance et la variance d'une somme.<br>► Y a-t-il des conditions d'application ? Sont-elles vérifiées ? |
| Comment conclure ?    | J'écris ces formules et je remplace les valeurs déjà trouvées.<br>► Faire les calculs, en n'oubliant pas de calculer l'écart-type à partir de la variance.      |

99  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes d'espérances respectives 20 et 30, et d'écart-types respectifs 2 et 3.

On définit la variable aléatoire  $Z = 2X + Y$ .

Calculer l'espérance et l'écart-type de  $Z$ .

## PARCOURS 2 Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

■ **Un exemple :** Un boulanger fabrique des baguettes dont la masse (en grammes) définit une variable aléatoire  $X$  d'espérance 250 et d'écart-type 5.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que la masse d'une baguette soit strictement comprise entre 230 g et 270 g est d'au moins 0,94.

| Ma réflexion          | → Ma démarche                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Que me demande-t-on ? | Je dois minorer la probabilité d'un événement.<br>► Justifier que cet événement peut s'écrire $A = \{230 < X < 270\}$ .<br>Écrire alors l'inégalité que l'on doit démontrer.                                                                          |
| Comment démarrer ?    | Je cherche une autre écriture de l'événement $A$ pour pouvoir appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.<br>► Écrire l'événement $A$ en faisant apparaître des valeurs absolues et l'espérance de $X$ , puis donner l'événement contraire de $A$ . |
| Comment continuer ?   | Je peux écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.<br>► Montrer alors que $P(\bar{A}) < \frac{25}{20^2}$ .                                                                                                                                            |
| Comment conclure ?    | Je peux à présent déterminer un minorant de $P(A)$ .<br>► À l'aide de la formule reliant $P(A)$ et $P(\bar{A})$ , montrer que $P(A) > 0,94$ .                                                                                                         |

100 On définit la variable aléatoire  $X$  qui, à un platane adulte, associe sa hauteur en mètres. Cette variable aléatoire a pour espérance 40 et pour écart-type 7.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que la hauteur d'un platane adulte soit strictement comprise entre 30 et 50 mètres est supérieure ou égale à 0,51.



### PARCOURS 3 Établir et appliquer la relation $E(XY) = E(X)E(Y)$

#### 101 Chercher en autonomie

Relation  $E(XY) = E(X)E(Y)$

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur les univers  $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$  et  $\Omega' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ , et qui associent à chaque issue  $e_j$  (respectivement  $e'_j$ ) le réel  $x_i$  (respectivement  $y_j$ ).

On pose  $P(X = x_i) = p_i$  pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$  et  $P(Y = y_j) = q_j$  pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $m$ . On peut, comme pour la somme  $X + Y$ , définir la variable aléatoire produit  $XY$  : il s'agit de la variable aléatoire  $T$  qui, aux issues  $e_i$  et  $e'_j$  associe  $x_i \times y_j$ , où  $P(T = t_k)$  est la somme de toutes les probabilités  $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$  telles que  $x_i \times y_j = t_k$ .

On suppose que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires indépendantes et on se propose d'établir la relation :  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

1. Donner l'expression de  $E(X)$  et de  $E(Y)$ .

2. Montrer que :  $E(X)E(Y) = (x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) \times \sum_{j=1}^m y_j q_j$ .

3. En déduire que :  $E(X)E(Y) = \sum_{j=1}^m (x_1p_1y_jq_j) + \sum_{j=1}^m (x_2p_2y_jq_j) + \dots + \sum_{j=1}^m (x_np_ny_jq_j)$ .

4. Justifier que, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$  et pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $m$ , on a :  $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = p_i \times q_j$ .

5. En déduire la formule de l'énoncé.

6. **Application** : on lance deux dés équilibrés. La variable aléatoire  $T$  associe à cette épreuve le produit des nombres situés sur les faces supérieures des dés.

Calculer l'espérance de  $T$ .

#### 102 Application : calcul de $V(X + Y)$ pour des variables $X$ et $Y$ indépendantes

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. On note :  $E(X) = \mu$  et  $E(Y) = \mu'$ .

1. Justifier que :  $V(X + Y) = E((X - \mu)^2 + (Y - \mu')^2 + 2(X - \mu)(Y - \mu'))$ .

2. En déduire que :  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2E((X - \mu)(Y - \mu'))$ .

3. Exprimer  $E((X - \mu)(Y - \mu'))$  en fonction de  $E(XY)$ ,  $\mu$  et  $\mu'$ .

4. En déduire la formule donnant  $V(X + Y)$ .

### PARCOURS 4 Estimation

#### 103 Intervalle de confiance pour les gauchers

La proportion de gauchers en France est voisine de 13 %. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à une personne prise au hasard dans la population française, associe 1 si cette personne est gauchère, et 0 sinon. On note  $M$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 10 000 de la loi de  $X$ .

1. En appliquant l'inégalité de concentration relative à la variable  $M$ , montrer que, pour tout réel  $\delta > 0$  :

$$P(|M - 0,13| \geq \delta) \leq \frac{0,1131 \times 10^{-4}}{\delta^2}.$$

2. Déterminer la plus petite valeur de  $\delta$ , arrondie au millième, vérifiant cette inégalité.

3. En déduire un intervalle  $I$  centré en 0,13 tel que  $P(X \in I) \geq 0,95$ . On arrondira les bornes à 0,001 près. Cet intervalle fournit une estimation de la proportion de gauchers dans les échantillons de taille 10 000 : on dit que c'est un intervalle de confiance de cette proportion au coefficient de confiance 0,95 (ou au seuil de risque 5 %).

#### 104 Intervalle de confiance pour les œufs de poule

Dans un centre avicole, des études ont montré que la variable aléatoire qui, à un œuf de poule, associe sa masse en grammes, a pour espérance 55 et pour écart-type 2,7. On prélève un échantillon de 100 œufs de cette exploitation. On note  $M$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de 100 œufs.

1. Appliquer l'inégalité de concentration à la variable  $M$ .

2. En déduire un intervalle de confiance de la masse des œufs dans cet échantillon au coefficient de confiance 0,99.





## 105 CHERCHER RAISONNER Jeu de cartes

On dispose d'un paquet de 4 cartes,  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$ , que l'on distribue intégralement, les unes après les autres, à 4 joueurs  $J_1, J_2, J_3$  et  $J_4$ , de la façon suivante : la carte  $C_1$  est donnée au joueur  $J_1$ , puis la carte  $C_2$  est distribuée de manière équiprobable entre  $J_1$  et  $J_2$ , la distribution se poursuivant de telle façon que pour tout entier  $i$  compris entre 2 et 4, la carte  $C_i$  soit distribuée de manière équiprobable entre  $J_1, J_2, \dots, J_i$ .

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

b. Déterminer  $P(X=0)$  et  $P(X=3)$ .

2. Pour tout entier  $i$  compris entre 1 et 4, on note  $B_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur  $J_i$  n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et qui vaut 0 sinon.

a. Montrer que, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et 4 :

$$P(B_i=1) = \frac{i-1}{4}.$$

b. Exprimer la variable  $X$  en fonction des variables  $B_i$ .

c. En déduire l'espérance de  $X$ .

3. On note  $a = P(X=1)$  et  $b = P(X=2)$ .

a. Exprimer  $E(X)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

b. En déduire  $a$  et  $b$ , puis la loi de la variable  $X$ .

## 106 PYTHON Séquences de séries consécutives de « Pile » ou « Face »

Fichier Python  
Disponible sur  
lycee.editions-bordas.fr

On lance dix fois, de manière indépendante, une pièce de monnaie et on s'intéresse à la série de « Pile » et de « Face » obtenues. On appelle  $E$  l'événement : « apparition d'au moins trois « Pile » consécutifs ou d'au moins trois « Face » consécutifs en 10 lancers ». On répète  $N$  fois l'expérience aléatoire qui consiste à lancer 10 fois la pièce de monnaie et, pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $N$ , on désigne par  $X_k$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si, à la  $k$ -ième expérience, l'événement  $E$  est réalisé. Les variables  $X_i$  sont indépendantes et de même loi de probabilité, d'espérance  $m$ .

On pose :  $F_n = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ .

1. Décrire la loi suivie par chacune des variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

2. Préciser l'espérance et la variance de  $F_n$ .

3. On se propose de déterminer un entier naturel  $N$  tel que :

$$P(|F_N - m| < 0,1) \geq 0,9.$$

a. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :  $P(|F_N - m| \geq \delta) \leq \frac{m(1-m)}{N\delta^2}$ .

b. Justifier l'inégalité  $m(1-m) \leq \frac{1}{4}$  pour tout réel  $m$  de  $[0; 1]$ .

c. Déterminer  $N$ .

4. On se propose d'utiliser le résultat précédent pour déterminer une valeur approchée de  $m$  à l'aide d'un programme Python. On donne le script de la fonction `jeu` qui retourne 1 (*True*) si l'événement  $E$  est réalisé pour la liste de nombres de la liste  $L$ .

```
from random import*
def jeu():
 L=[randint(0,1)for k in range(10)]
 s=0
 for i in range(8):
 a=L[i+2]+L[i+1]+L[i]
 if a*(a-3)==0:
 s=s+1
 return(s>0)
```

a. Justifier la définition de la liste  $L$ .

b. Expliquer le rôle de la ligne 6.

c. Justifier le test fait à la ligne 7.

d. Modifier la fonction `jeu` afin de répéter cette expérience  $N$  fois.

e. Exécuter cette nouvelle fonction et en déduire une valeur approchée de l'espérance  $m$ .

## TRAVAIL EN GROUPE

## 107 Nombre moyen de points fixes d'une permutation

Soit  $n$  un entier naturel non nul, et  $P$  une permutation  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de l'ensemble  $E = \{1; 2; \dots; n\}$ , où  $n$  est un entier au moins égal à 2.

Pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , on dit que l'entier  $a_k$  est un point fixe de  $P$  si, et seulement si,  $a_k = k$ .

Faire un exposé sur les permutations d'un ensemble  $E$  : nombre de permutations ; exemples classiques ; nombre moyen de points fixes d'une permutation.

Pour cela, on utilisera la variable aléatoire  $X_k$  (où  $k$  est un entier tel que  $1 \leq k \leq n$ ) qui, à une permutation de  $E$ , associe 1 si  $k$  est un point fixe de cette permutation, et 0 sinon.

## Prise d'initiatives

108 1. Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels non nuls.

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments et soit  $F$  un ensemble à  $m$  éléments, tels que  $E$  et  $F$  sont disjoints.

Démontrer que, pour tout entier  $r$  tel que  $0 \leq r \leq n+m$  :

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{k=r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}.$$

2. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  suivent une loi binomiale, l'une de paramètres  $n$  et  $p$ , l'autre de paramètres  $m$  et  $p$ . On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes.

Montrer que la variable aléatoire  $X+Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $n+m$  et  $p$ .

109 Les variables aléatoires  $X_n$ , où  $n$  est un entier naturel non nul, suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , où  $p$  appartient à  $]0; 1[$ .

On suppose les variables  $X_i$  indépendantes.

On définit les variables aléatoires :

$$Y_n = \frac{1}{2} (X_n + X_{n+1}) \text{ et } T_n = \frac{1}{n} (Y_1 + \dots + Y_n).$$

Montrer que, pour tout réel  $a > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - p| \geq a) = 0.$$



## TP1 Calcul de la probabilité de $\{|S_n - np| \geq \sqrt{n}\}$ , où $S_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ , et comparaison avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

PYTHON

MODÉLISER

RAISONNER

### A Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On considère un entier naturel non nul  $n$  et un réel  $p$  de l'intervalle  $[0; 1]$ .

On suppose que  $S_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

1. Donner en fonction de  $n$  et  $p$  les expressions de  $E(S_n)$  et  $V(S_n)$ .

2. Soit  $\delta$  un réel positif.

Écrire la majoration de la probabilité  $P(|S_n - E(S_n)| \geq \delta)$  obtenue avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3. En déduire une majoration de la probabilité  $P(S_n - np \geq \sqrt{n})$ .

Fichier Python

Disponible en ligne sur  
lycee.editions-bordas.fr

### B Simulations

1. La fonction Python `epreuve` dont on donne le script ci-contre a pour argument un réel  $p$  de l'intervalle  $[0; 1]$ .

Cette fonction simule une variable aléatoire  $X$ .

Quelle est sa loi ?

2. Quelle est la loi de la variable aléatoire simulée par la fonction `var_binom`, qui a pour arguments un entier naturel non nul  $n$  et un nombre réel  $p$  et qui effectue  $n$  tirages de la variable aléatoire  $X$  ?

3. a. Compléter la fonction `simul10000` afin qu'elle retourne la fréquence de l'événement  $\{|X - np| \geq \sqrt{n}\}$  sur un échantillon de 10 000 tirages

b. Réaliser plusieurs appels de `simul10000(10,0.5)`.

Autour de quelle valeur, arrondie au centième, se situent les résultats retournés ?

c. Calculer le majorant trouvé à la question 3 de la partie A avec  $p = 0,5$ .

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est-elle vérifiée ? Que constate-on ?

```

1 from math import sqrt
2 from random import random
3
4 def epreuve(p):
5 if random() < p:
6 return 1
7 else:
8 return 0
9
10 def var_binom(n,p):
11 somme = 0
12 for k in range(n):
13 somme = somme + epreuve(p)
14 return somme
15
16 def simul10000(n,p):
17 dehors = 0
18 for k in range(10000):
19 if abs(var_binom(n,p)-n*p)>=...:
20 dehors = dehors + 1
21 return ...

```

Fichier Python

Disponible sur  
lycee.editions-bordas.fr

## TP2 Simulation d'une marche aléatoire

PYTHON

MODÉLISER

CHERCHER

Dans un jeu télévisé, il y a une cagnotte, initialisée à 0. Cette cagnotte évolue chaque jour à la fin de l'émission, en fonction de la réponse donnée par le candidat à une question bonus. S'il donne une mauvaise réponse, la cagnotte diminue de 1, et s'il donne une bonne réponse, elle augmente de 1.

On suppose que la bonne réponse est donnée chaque jour avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  et que les réponses sont indépendantes entre elles. On appelle  $R$  la variable aléatoire qui prend les valeurs  $-1$  et  $1$  avec chacune la probabilité  $\frac{1}{2}$ , et  $C_n$  la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $R$ .

1. Déterminer les valeurs extrêmes pouvant être prises par  $C_{50}$  et leurs probabilités.

2. a. Calculer  $E(R)$  et  $V(R)$ .

b. En déduire l'espérance et la variance de  $C_n$ , en fonction de  $n$ .

3. Si, le cinquantième jour, la cagnotte spéciale dépasse 20, un lot est partagé entre le gagnant et le public. Si elle est en dessous de  $-20$ , ce lot est partagé entre le perdant du jour et le public.

a. Montrer que la probabilité que le public touche la moitié du lot est égale à  $P(|C_{50} - E(C_{50})| \geq 20)$ .

b. Donner une majoration de cette probabilité à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

4. La fonction `marche` simule la variable aléatoire  $C_n$ .

a. Justifier le rôle de la variable `pos`.

b. Créer une fonction `simul`, qui appelle la fonction `marche`, et qui simule 10 000 fois l'évolution de la cagnotte sur 50 jours afin de retourner la fréquence de partage du lot avec le public.

c. Tester cette fonction et comparer le résultat avec la majoration obtenue à la question 3.b.

```

1 from random import randint
2
3 def marche(n):
4 pos = 0
5 for i in range(n):
6 if randint(0,1) == 1:
7 pos = pos + 1
8 else:
9 pos = pos - 1
10 return pos

```



### TP3 Simulation de $N$ échantillons de taille $n$ d'une variable aléatoire d'espérance $\mu$ et d'écart-type $\sigma$ d'une marche aléatoire

PYTHON

MODÉLISER

RAISONNER

Fichier Python

Disponible en ligne sur  
lycee.editions-bordas.fr

#### A Variable aléatoire de loi donnée

On représente une variable aléatoire  $X$  par deux listes : la liste `val` contient les valeurs prises par  $X$ , et la liste `proba` contient les probabilités de chacune de ces valeurs, dans le même ordre.

La fonction `simul_tirage` simule un tirage de la variable aléatoire donnée par les listes `val` et `proba` données en arguments.

1. Lors d'un appel `simul_tirage(val, proba)`, la valeur 0,4 est affectée à `t`. Que retourne alors cette fonction ?

2. Compléter la ligne 24 de la fonction `simul_ech` pour qu'elle renvoie la liste des fréquences de chacune des valeurs prises par  $X$  dans un échantillon de taille  $n$  de sa loi, c'est-à-dire pour que la variable `res[k]` contienne, ligne 24, la fréquence de `val[k]` dans un échantillon de taille  $n$ .

```
1 from random import random
2 from math import sqrt
3
4 val = [1, 2, 5, -3]
5 proba = [0.1, 0.5, 0.3, 0.1]
6
7 def simul_tirage(val, proba):
8 t = random()
9 s = proba[0]
10 k = 0
11 while t > s:
12 k = k + 1
13 s = s + proba[k]
14 return val[k]
15
16 def simul_ech(val, proba, n):
17 res = [0,0,0,0]
18 for j in range(n):
19 tirage = simul_tirage(val, proba)
20 for k in range(4):
21 if val[k] == tirage:
22 res[k] = res[k] + 1
23 for k in range(4):
24 res[k] = ...
25 return res
```

#### B Calcul de l'espérance et de l'écart-type

1. a. Quelle valeur relative aux listes `val` et `proba` est retournée par la fonction `esp_var` ?

b. Que représente ce nombre pour la variable  $X$  ?

2. Compléter la fonction `var_var` pour qu'elle retourne la variance de cette variable aléatoire  $X$ .

3. Quel appel permet d'obtenir la moyenne des valeurs prises par  $X$  dans un échantillon de taille 100, cet échantillon étant simulé par Python ?

```
27 def esp_var(val, proba):
28 s = 0
29 for k in range(4):
30 s = s + val[k]*proba[k]
31 return s
32
33 def var_var(val, proba):
34 s = 0
35 e = esp_var(val, proba)
36 for k in range(4):
37 ...
38 return s
```

#### C Répartition des distances à la moyenne

On veut dans cette partie étudier la proportion d'échantillons de taille 100 de la variable aléatoire  $X$  dont la loi est donnée par les listes définies lignes 4 et 5, et dont la moyenne est distante de l'espérance de  $X$  de moins de  $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$ ,

où  $\sigma$  est l'écart-type de  $X$ , pour  $k$  appartenant à  $\{1; 2; 3\}$ .  
1. Les lignes 45 et 46 permettent le calcul de la moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $X$ .

D'après la loi des grands nombres, de quoi cette moyenne doit-elle s'approcher ?

2. Compléter les lignes 49 et 51 de façon à ce qu'en sortie de la première boucle `for`, `res[1]` et `res[2]` contiennent le nombre d'échantillons dont la moyenne est distante de l'espérance, respectivement de moins de  $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$  et  $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ .

3. Quelles inégalités sont toujours vérifiées par les nombres `res[0]`, `res[1]` et `res[2]` ?

4. À quoi correspondent les nombres contenus dans la liste obtenue après l'appel `proportions(val, proba, 100, 1000)` ?

5. Observer ces proportions pour d'autres variables aléatoires prenant quatre valeurs en modifiant les listes `val` et `proba`.

```
40 def proportions(val, proba, n, N):
41 res = [0,0,0]
42 mu = esp_var(val, proba)
43 sigma = sqrt(var_var(val, proba))
44 for j in range(N):
45 ech = simul_ech(val, proba, n)
46 moy = esp_var(val, ech)
47 if abs(moy - mu) < sigma/sqrt(n):
48 res[0] = res[0] + 1
49 if ... :
50 res[1] = res[1] + 1
51 if ... :
52 res[2] = res[2] + 1
53 for k in range(3):
54 res[k] = res[k]/N
55 return res
```



## Question

*Comment les mathématiques permettent-elles de construire et d'interpréter des sondages ?*

## Pour se préparer

- ➔ Utiliser le dossier *Les clés du bac*, au début du manuel
- ➔ S'entraîner à l'expression orale en mathématiques : exercices 49, 107

## Enjeu de la question

Les sondages sont un outil visant à connaître et anticiper les décisions à partir d'échantillons réduits. Leur usage est déterminant dans des domaines allant de la politique à la consommation en passant par les questions de société. Ils sont justifiés par la loi des grands nombres.



## Plan possible

1. La loi des grands nombres
2. L'écart-type comme indicateur de dispersion
3. Intervalles de confiance
4. Le choix des échantillons
5. Conclusion (critique des sondages régulièrement publiés)

## Les mots-clés

- Échantillonnage
- Loi des grands nombres
- Intervalle de confiance
- Test d'hypothèse
- Probabilités conditionnelles

## Support de présentation possible

- **Échantillonnage** : un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire  $X$  est une liste de  $n$  variables aléatoires indépendantes et identiques suivant la loi de  $X$ .
- **La loi des grands nombres** : soit  $F_n$  la fréquence observée dans un échantillon de taille  $n$  d'un phénomène de probabilité  $p$ . Alors pour tout réel  $\delta$  strictement positif,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|F_n - p| \geq \delta) = 0$ .
- **L'écart-type comme indicateur de dispersion** : si l'écart-type des valeurs du phénomène observé est  $\sigma$ , alors  $P(|F_n - p| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{nt^2}$ .
- **Intervalles de confiance** : l'écart-type d'un phénomène suivant une loi binomiale est majoré indépendamment de son paramètre  $p$ , ce qui permet de majorer  $P(|p - f_n| \geq \delta)$  pour tout réel  $\delta$  positif lorsque l'on ne dispose que d'une fréquence observée  $f_n$ .

## Questions d'approfondissement possibles

Quel est l'ordre de grandeur habituel de la taille d'un échantillon dans un sondage ? Pourquoi ?

Proposer un programme Python simulant le tirage aléatoire d'un échantillon de 1 000 personnes selon un critère donné.

Expliquer ce que signifie : « Un intervalle de confiance au seuil de 5 % de la proportion des personnes votant pour le candidat A est [0,45 ; 0,49]. »

Donner un exemple d'une variable somme de deux variables aléatoires.

## Poursuite d'études et projet professionnel

- **Pourquoi étudier les variables aléatoires ?**  
De nombreux phénomènes biologiques ou sociétaux sont modélisés par des tirages aléatoires, soit parce qu'ils le sont, soit parce que leurs mécanismes sont inconnus ou trop complexes.
- **Dans quelles études peut-on approfondir ces notions ?**  
L'étude des probabilités et des statistiques est approfondie dans l'enseignement supérieur : classes préparatoires, licences scientifiques, écoles de commerce, études de santé.
- **Un exemple de métier ?**  
Le (la) **chargé(e) d'études marketing** analyse les attentes des clients et l'offre de la concurrence pour assurer au maximum le succès commercial d'un nouveau produit. Il (elle) s'appuie entre autres sur des enquêtes pour analyser la prise de décision du consommateur et mettre en place une stratégie commerciale.



## THÈMES

- Loi binomiale
- Somme de variables aléatoires
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

## ÉNONCÉ MODÉLISER CALCULER

Les vaches constituant le cheptel d'une grosse exploitation agricole sont de deux types différents : il y a 200 vaches de type A et 300 vaches de type B. La probabilité pour une vache du type A de produire du lait en hiver est égale à 0,8 et elle est de 0,7 pour une vache du type B. La production de lait en hiver est indépendante d'un animal à l'autre quel que soit son type.

À un hiver donné, la variable aléatoire  $N_A$  associe le nombre de vaches de type A du cheptel qui produisent du lait et la variable aléatoire  $N_B$  le nombre de vaches de type B produisant du lait pendant cet hiver. On suppose  $N_A$  et  $N_B$  indépendantes.

1. Que représente la variable aléatoire  $N = N_A + N_B$  ? Donner les lois de  $N_A$  et de  $N_B$ .
2. Calculer la probabilité de l'événement  $\{N = 500\}$  et en donner une valeur approchée. L'interpréter.
3. Quel est le nombre moyen de vaches du cheptel produisant du lait l'hiver considéré ?
4. Pour chaque vache de type A produisant du lait en hiver, il faut compter une dépense de 4 euros par jour pour des compléments alimentaires, et 3 euros pour une vache de type B. Pour le cheptel considéré, à un jour donné, la variable aléatoire  $D$  associe la dépense moyenne à prévoir en compléments alimentaires pour les vaches produisant du lait en hiver. Calculer l'espérance et la variance de  $D$ .
5. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que la dépense moyenne journalière soit strictement comprise entre 1 200 et 1 340 € est supérieure ou égale à 0,84.

COMPRENDRE L'ÉNONCÉ  
ET CHOISIR LES MÉTHODES

## SOLUTION COMMENTÉE

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Reconnaître des schémas de Bernoulli et vérifier les conditions d'application.</p> <p>Chapitre 11, capacité 3 p. 369</p>                                                                                                                                                                                    | <p>1. La variable aléatoire <math>N</math> représente le nombre total de vaches du cheptel qui produisent du lait en hiver. <math>N_A</math> suit la loi binomiale de paramètres <math>n = 200</math> et <math>p = 0,8</math>, car l'épreuve consistant à savoir si une vache du type A produit du lait en hiver se répète 200 fois avec la probabilité de succès <math>p = 0,8</math> de façon identique et indépendante. De même, <math>N_B</math> suit la loi binomiale de paramètres <math>n' = 300</math> et <math>p' = 0,7</math>.</p>                                                                                                                                                                                    |
| <p>2. On exprime l'événement <math>\{N_A + N_B = 500\}</math> à l'aide d'événements liés aux variables aléatoires <math>N_A</math> et <math>N_B</math>.</p> <p>Capacité 1, p. 403</p>                                                                                                                             | <p>2. L'événement <math>\{N = 500\}</math> s'écrit aussi <math>\{N_A = 200 \text{ et } N_B = 300\}</math>.<br/>Puisque <math>N_A</math> et <math>N_B</math> sont indépendantes, <math>P(N = 500) = P(N_A = 200) \times P(N_B = 300)</math>.<br/>Or, <math>P(N_A = 200) = 0,8^{200}</math> et <math>P(N_B = 300) = 0,7^{300}</math>, d'où<br/><math>P(N = 500) = 0,8^{200} \times 0,7^{300}</math>, et <math>P(N = 500) \approx 1,4 \times 10^{-66}</math>.<br/>C'est la probabilité que toutes les vaches du cheptel produisent du lait en hiver.</p>                                                                                                                                                                           |
| <p>3. Pour déterminer le nombre moyen de vaches, on calcule l'espérance de <math>N</math>.</p> <p>Capacité 2, p. 403</p>                                                                                                                                                                                          | <p>3. <math>E(N) = E(N_A + N_B) = E(N_A) + E(N_B)</math>.<br/>Or, <math>E(N_A) = np = 200 \times 0,8 = 160</math> et <math>E(N_B) = 300 \times 0,7 = 210</math>.<br/>L'espérance de <math>N</math> est donc égale à <math>160 + 210 = 370</math>.<br/>Le nombre moyen de vaches du cheptel produisant du lait en hiver est 370.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p>4. Utiliser la linéarité de l'espérance. Pour la variance, ne pas oublier que <math>V(aX) = a^2 V(X)</math>.</p> <p>Capacité 3, p. 405</p>                                                                                                                                                                     | <p>4. <math>D = 4N_A + 3N_B</math>,<br/>d'où <math>E(D) = E(4N_A + 3N_B) = 4E(N_A) + 3E(N_B) = 4 \times 160 + 3 \times 210 = 1\,270</math>.<br/><math>V(D) = V(4N_A + 3N_B) = V(4N_A) + V(3N_B)</math>, car <math>N_A</math> et <math>N_B</math> sont indépendantes, et<br/><math>V(D) = 4^2 V(N_A) + 3^2 V(N_B)</math>.<br/><math>V(N_A) = 200 \times 0,8 \times (1 - 0,8) = 32</math> et <math>V(N_B) = 300 \times 0,7 \times (1 - 0,7) = 63</math><br/>d'où : <math>V(D) = 16 \times 32 + 9 \times 63 = 759</math>.</p>                                                                                                                                                                                                      |
| <p>5. Écrire l'inégalité sous la forme <math> X - \mu  &lt; \delta</math> et appliquer l'inégalité du cours avec l'événement contraire <math> X - \mu  \geq \delta</math>.</p> <p><math> X - \mu  &lt; \delta</math> équivaut à <math>\mu - \delta &lt; X &lt; \mu + \delta</math>.</p> <p>Capacité 5, p. 407</p> | <p>5. On cherche à minorer la probabilité d'avoir <math>1\,200 &lt; D &lt; 1\,340</math>.<br/>On remarque que <math>1\,200 &lt; D &lt; 1\,340</math> équivaut à <math>-70 &lt; D - 1\,270 &lt; 70</math>, soit <math> D - 1\,270  &lt; 70</math>.<br/>On considère l'événement contraire de <math>E = \{ D - 1\,270  &lt; 70\}</math> : c'est l'événement <math>\bar{E} = \{ D - 1\,270  \geq 70\}</math>.<br/>L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit alors :<br/><math>P( D - 1\,270  \geq 70) \leq \frac{V(D)}{70^2}</math>. Or, <math>\frac{V(D)}{70^2} = \frac{759}{4900} \approx 0,155</math>.<br/>D'où : <math>P(\bar{E}) \leq 0,16</math> soit <math>1 - P(E) \leq 0,16</math> soit <math>P(E) \geq 0,84</math>.</p> |



**Sujet A** 40 min MODÉLISER CALCULER

**THÈMES** • Somme de variables aléatoires  
• Espérance de la somme

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 2. ► Capacité 3 p. 405

Question 3. ► Chapitre 11 Capacité 5 p. 370

Au rez-de-chaussée d'un immeuble de  $n$  étages, huit personnes entrent dans un ascenseur.

On suppose que chaque personne descend à un étage donné avec la probabilité  $\frac{1}{n}$  et que personne n'entre dans l'ascenseur aux étages.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à une montée de l'ascenseur, associe le nombre d'arrêts qu'il effectue aux étages.

Pour  $i$  entier compris entre 1 et  $n$ , on appelle  $X_i$  la variable aléatoire égale à 1 si l'arrêt à l'étage  $i$  a été demandé, et 0 sinon.

1. On suppose que  $n$  est égal à 4.

a. Justifier que  $P(X_1 = 0) = 0,75^8$ .

b. En déduire  $P(X_1 = 1)$ .

c. Déterminer  $P(X_2 = 0)$ , puis  $P(X_2 = 1)$ .

2. Dans cette question,  $n$  est un entier naturel non nul.

a. Déterminer  $P(X_i = 0)$  pour tout entier naturel  $i$  non nul.

b. Calculer  $E(X_i)$  en fonction de  $n$ .

c. Exprimer  $X$  en fonction des variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

d. En déduire que  $E(X) = n \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^8 \right)$ .

e. Déterminer le nombre minimum d'étages que doit avoir

cet immeuble de sorte que l'espérance du nombre d'arrêts soit inférieure à la moitié du nombre d'étages.

**Sujet B** 30 min

CALCULER RAISONNER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



**THÈMES** • Opérations sur les variables aléatoires  
• Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

• **CAPACITÉ MISE EN ŒUVRE**

Question 1. ► Capacité 2 p. 403

Un composant électronique appelé « générateur d'impulsions » possède les spécifications suivantes :

• durée de l'impulsion :  $10 \text{ ms} \pm 40 \% \text{ ms}$  ;

• intensité de l'impulsion :  $3 \text{ mA} \pm 0,3 \text{ mA}$ .

D'après ces spécifications, la variable aléatoire  $X$  donnant l'intensité en milliampères d'une impulsion a pour espérance 3 et écart-type 0,3.

1. On intègre ce composant à un montage qui double l'intensité puis lui ajoute 10 mA.

En notant  $Y$  la variable aléatoire donnant l'intensité en mA d'une impulsion en sortie de ce montage, déterminer son espérance et son écart-type.

2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un majorant de la probabilité  $P(|Y - 16| > 1,8)$ .

3. Le fabricant assure que son composant vérifie  $P(|X - 3| \leq 0,9) \geq 0,99$ . En déduire une majoration de la probabilité  $P(Y > 17,8)$ .

**Sujet C** 30 min

PYTHON MODÉLISER CHERCHER

**THÈMES** • Somme de variables aléatoires  
• Programmation en Python

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 1. ► Chapitre 11 Capacité 2 p. 367

Question 2. ► Capacité 3 p. 405

On fait tourner  $n$  fois une roulette à deux secteurs, l'un marqué 1 et l'autre 0. La probabilité d'obtenir le secteur 1 est notée  $p$ .

Dans la suite de 1 et de 0 obtenus, on s'intéresse aux « blocs » de 0 et 1. Par exemple, la suite 10010110101 contient 9 blocs : quatre blocs de 0 et cinq blocs de 1.

À chaque suite de  $n$  chiffres obtenus, la variable aléatoire  $S$  associe le nombre de blocs de la suite.

Par exemple, pour la suite définie plus haut,  $S$  prend la valeur  $4 + 5 = 9$ .

Pour tout entier  $i$  compris entre 2 et  $n$ , on appelle  $X_i$  la variable aléatoire qui, au  $i$ -ième tour de roulette, associe le numéro du secteur obtenu et  $Y_i$  la variable aléatoire telle que  $Y_i = 1$  si  $X_{i-1}$  est différent de  $X_i$  et 0 sinon.

1. a. Donner les valeurs de  $P(X_i = 0)$  et de  $P(X_i) = 1$ .

b. Justifier que :

$$P(Y_i = 1) = P(X_{i-1} = 0)P(X_i = 1) + P(X_{i-1} = 1)P(X_i = 0).$$

c. Déterminer  $P(Y_i = 1)$  en fonction de  $p$ .

2. a. Exprimer  $S$  en fonction de  $Y_2, Y_3, \dots, Y_n$  puis en déduire l'espérance de  $S$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

b. Quel nombre moyen de blocs obtient-on pour  $n = 1\,001$  et  $p = 0,5$  ?

3. On donne le script incomplet d'une fonction Python qui retourne le nombre de blocs dans le cas  $n = 1\,001$  et  $p = 0,5$  de la suite définie à la ligne 3.

```
1 from random import randint
2 def blocs01():
3 L=[...for k in range(1000)]
4 s=(L[1]!=L[0])
5 for i in range(1,1000):
6 s=s+...
7 return(1+s)
```

a. Recopier ce programme et compléter la ligne 3.

b. Quel est le rôle de la ligne 4 ?

c. Compléter la ligne 6 à l'aide d'un booléen.



Ces sujets permettent de travailler les capacités liées à ce chapitre et attendues au Bac.

**Sujet D** 25 min  CALCULER  RAISONNER

- THÈMES** • Opérations sur les variables aléatoires
- Loi binomiale
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 1. ► Capacité 2 p. 403

Question 2. ► Capacité 4 p. 405

Question 3. ► Capacité 5 p. 407

Lors d'un salon de l'artisanat, un artisan a un stand où il ne vend que deux produits, le produit A au prix unitaire de 8 euros, et le produit B au prix unitaire de 12 euros. On suppose dans la suite que les quantités achetées par les différents clients sont indépendantes, que le nombre de produits achetés par une personne s'arrêtant au stand est modélisé pour le produit A par une variable aléatoire  $X$  d'espérance 2 et de variance 2, et pour le produit B par une variable aléatoire  $Y$  d'espérance 1 et de variance 1.

1. Soit  $Z$  la variable aléatoire égale au montant en euros de l'achat d'une personne s'arrêtant au stand. Calculer  $E(Z)$  et  $V(Z)$ .
2. On a remarqué que 350 personnes s'arrêtaient au stand chaque jour. Soit  $C$  la variable aléatoire qui, à une journée donnée, associe le chiffre d'affaires de l'artisan.
  - a. Déterminer l'espérance et la variance de  $C$ .
  - b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un minorant de la probabilité que le chiffre d'affaires soit strictement compris entre 9 000 et 10 600 euros.

**Sujet E** 40 min  CHERCHER  RAISONNER

- THÈMES** • Somme de variables aléatoires
- Variable aléatoire somme d'un échantillon
  - Variable aléatoire moyenne d'un échantillon
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 1. ► Capacité 2 p. 403

Question 2. ► Capacité 1 p. 403

Question 3. ► Capacité 4 p. 405

Question 4. ► Capacité 4 p. 405

Question 5. ► Capacité 5 p. 407

**QCM** Choisir la ou les bonnes réponses.

1.  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de variances respectives 4 et 9. L'écart-type de la variable aléatoire  $Z = X + Y$  est égal à :
  - a. 13
  - b.  $\sqrt{13}$
  - c. 5
  - d.  $\sqrt{97}$
2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous.
 

|              |     |     |     |     |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$        | -2  | -1  | 2   | 5   |
| $P(X = x_i)$ | 0,2 | 0,5 | 0,2 | 0,1 |

 On suppose  $X_1$  et  $X_2$  indépendantes. Soit la variable aléatoire  $Y = X_1 + X_2$ . Alors  $P(Y = 4)$  est égal à :
  - a. 0,04
  - b. 0,09
  - c. 0,10
  - d. 0,14
3. Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 150 et

d'écart-type 20. On note  $S$  la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille 100 de  $X$ . On a :

- a.  $E(S) = 15\,000$
- b.  $E(S) = 150$
- c.  $V(S) = 40\,000$
- d.  $\sigma(S) = 20$

4. Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 100 et de variance 10. On note  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$ . La plus petite valeur de l'entier  $n$  telle que  $\sigma(M_n) < 0,3$  est :
  - a. 34
  - b. 111
  - c. 112
  - d. 1 112

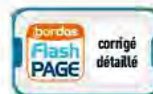
5. Soit  $V$  et  $n$  deux nombres entiers naturels non nuls, et  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  d'une variable aléatoire d'espérance 0 et de variance  $V$ . Pour quelles valeurs de  $V$  et  $n$  a-t-on  $P(|M_n| \geq 3) \geq \frac{1}{18}$  ?

- a. aucune
  - b.  $V = 2$  et  $n = 1$
  - c.  $V = 1$  et  $n = 2$
  - d.  $V = 18$  et  $n = 36$
6.  $X$  est une variable aléatoire d'espérance 0 et d'écart-type 1. Pour tout réel strictement positif  $a$ , on a :

- a.  $P(|X| < a) \leq \frac{1}{a^2}$
- b.  $P(|X| < a) \geq \frac{1}{a^2}$
- c.  $P(|X| < a) \leq \frac{a^2 - 1}{a^2}$
- d.  $P(|X| < a) \geq \frac{a^2 - 1}{a^2}$

**Sujet F** 30 min MODÉLISER  CALCULER

SOLUTION EN FIN DE MANUEL



- THÈMES** • Loi binomiale
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

• **CAPACITÉS MISES EN ŒUVRE**

Question 1. ► Chapitre 11 capacité 3 p. 369

Question 3. ► Capacité 6 p. 407

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue  $p$  est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de  $p$ .

On effectue un prélèvement de  $n$  pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de  $n$  tirages indépendants avec remise.

On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement.

1. Quelle est la loi de  $X_n$  ? Déterminer son espérance et sa variance.
2. a. Montrer que, si le réel  $p$  appartient à  $[0; 1]$ , alors :

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4}.$$

- b. Démontrer que, pour tout réel  $\delta > 0$ ,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

3. En déduire la plus petite valeur de  $n$  telle que  $\frac{X_n}{n}$  soit une valeur approchée de  $p$  à  $10^{-2}$  près avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.





## ALGORITHMES ET PROGRAMMATION ..... 430

## RAPPELS ..... 440

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| Fractions.....                 | 440 |
| Puissances.....                | 440 |
| Racines carrées.....           | 440 |
| Calcul littéral.....           | 441 |
| Résolution d'une équation..... | 441 |
| Inégalités et intervalles..... | 441 |
| Signe d'une expression.....    | 442 |
| Fonctions : généralités.....   | 442 |
| Fonctions de référence.....    | 443 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Information chiffrée.....                                                        | 444 |
| Statistiques.....                                                                | 444 |
| Calculs dans un repère.....                                                      | 445 |
| Vecteurs du plan.....                                                            | 445 |
| Équations de droites.....                                                        | 445 |
| Trigonométrie.....                                                               | 446 |
| Représentations graphiques<br>des fonctions sinus et cosinus dans un repère..... | 446 |
| Produit scalaire dans le plan.....                                               | 446 |
| Droites et cercles dans le plan.....                                             | 446 |
| Les solides usuels.....                                                          | 447 |

## VOCABULAIRE ENSEMBLISTE ET LOGIQUE ..... 448

## TABLEUR ..... 452

## LE LOGICIEL GEOGEBRA ..... 454

## LE LOGICIEL CABRI EXPRESS ..... 458

## LE LOGICIEL XCAS ..... 459

## CALCULATRICE CASIO ..... 460

## CALCULATRICE NUMWORKS ..... 462

## CALCULATRICE TEXAS ..... 464

## CORRIGÉS D'EXERCICES ET PISTES ..... 466

Accédez aux **corrigés rédigés et détaillés** des exercices *Pour travailler en autonomie* et de certains sujets de Bac avec l'**application** (voir rabat F) ou sur le site élève [lycee.editions-bordas.fr](http://lycee.editions-bordas.fr).



## INDEX ..... 479



# Algorithmes et langage Python

## 1. Variables et affectation

Pour conserver une valeur en mémoire, on utilise une **variable**. On peut se représenter une variable comme une « boîte », un emplacement de la mémoire de l'ordinateur...

Une variable est désignée par un **nom**. Elle contient une valeur.

Pour **affecter** (donner) une valeur à la variable nommée *X*, on utilise les instructions :

- «  $X \leftarrow \dots$  » en écriture algorithmique
- «  $X = \dots$  » en langage Python

La nouvelle valeur remplace la valeur précédente.

### EXEMPLE 1 Échange de valeurs

A et B sont deux variables qui ont déjà été **initialisées** (qui ont déjà une valeur).

L'enchaînement des trois instructions ci-contre permet d'échanger le contenu des variables

A et B à l'aide de la **variable intermédiaire** C.

| Algorithme       | Python             |
|------------------|--------------------|
| $C \leftarrow A$ | <code>C = A</code> |
| $A \leftarrow B$ | <code>A = B</code> |
| $B \leftarrow C$ | <code>B = C</code> |

## 2. Types de valeurs

### Valeurs numériques

On peut effectuer les calculs opératoires usuels sur les **entiers** (nombres entiers relatifs) et les **flottants** (nombres à virgule – attention, le séparateur décimal est le point « . », et non la virgule).

### Chaînes de caractères

Une **chaîne de caractères** est une suite ordonnée de caractères entourée de guillemets doubles ou simples.

### EXEMPLE 2 Manipuler une chaîne

La variable *C* prend pour valeur la chaîne "Année".  
Cette chaîne contient cinq caractères.  
Le premier caractère (celui d'indice 0) est "A".

```
>>> C = "Année"
>>> len(C)
5
>>> C[0]
'A'
```

```
>>> C[3]
'é'
>>> C+"2020"
'Année2020'
```

Le caractère d'indice 3 est "é".

La concaténation de *C* et "2020" donne la chaîne "Année2020".

## Booléens

Un **booléen** est une variable dont la valeur est soit vrai (*True* en Python), soit faux (*False* en Python).

**REMARQUE** Un test renvoie une valeur booléenne. Ainsi le test d'inégalité ( $6 > 4$ ) est un booléen de valeur *True* tandis que le test d'égalité ( $3 == 5$ ) est un booléen de valeur *False*.

## 3. Importer un module Python

Un module est une bibliothèque de fonctions et valeurs supplémentaires. L'instruction `from nom_module import *` permet d'importer (incorporer) au programme la **totalité** des fonctions et valeurs contenues dans le module nommé *nom\_module*. Pour importer une seule fonction ou constante, on utilise : `from nom_module import nom_fonction`.

### EXEMPLE 3 Deux modules utiles

- Le module **math** contient les fonctions et constantes mathématiques usuelles approchées comme  $\pi$ .
- Le module **random** contient les fonctions permettant de générer des valeurs entières aléatoires entre deux entiers ou des valeurs décimales entre 0 et 1.

```
>>> from math import *
>>> A = pi
>>> A
3.141592653589793
>>> from random import *
>>> randint(3,10)
9
>>> random()
0.0716415661175348
```



On peut simplifier l'écriture des programmes en utilisant des fonctions.

## 1. Exemples de fonctions

### EXEMPLE 1 Conversion d'une durée exprimée en heures et minutes

Pour convertir une durée exprimée en heures et minutes en une durée  $d$  exprimée en heures, on effectue le calcul suivant :  $d = h + \frac{m}{60}$  où  $h$  est le nombre d'heures et  $m$  le nombre de minutes.

Pour programmer ce calcul, on définit une fonction : on lui donne un nom, `convert`, et on dit qu'elle a pour arguments  $h$  et  $m$ . En langage Python, on définit cette fonction par la commande `def` suivi du nom de la fonction, puis de ses arguments  $h$  et  $m$ , suivi de deux points. Les autres instructions sont **indentées** par rapport à la première ligne.

Après le calcul de  $d$ , on renvoie le résultat par la commande `return`.

Pour convertir 2 heures et 18 minutes en heures, on saisit `convert(2,18)` dans la console. On trouve 2,3.

```
def convert(h,m):
 d=h+m/60
 return(d)
```

L'indentation.

### EXEMPLE 2 Calcul de la surface latérale et du volume d'un cube

La surface latérale d'un cube de côté  $c$  est :  $s = 6c^2$ . Le volume de ce cube est  $v = c^3$ .

Pour programmer le calcul de la surface latérale d'un cube et celui de son volume, on définit une fonction appelée `cube` qui a ici un argument  $c$ , et qui retourne la liste des valeurs des variables  $s$  et  $v$ , qui contiennent respectivement la surface latérale et le volume du cube.

Pour calculer la surface latérale d'un cube de côté 2 cm et son volume, on saisit `cube(2)` dans la console. On trouve (24,8). La surface latérale de ce cube est de 24 cm<sup>2</sup> et son volume est de 8 cm<sup>3</sup>.

```
def cube(c):
 s=6*c**2
 v=c**3
 return(s,v)
```

## 2. Définition – Programmation

Une **fonction** est un bloc d'instructions qui a reçu un nom et dont le fonctionnement dépend d'un certain nombre de paramètres (les **arguments** de la fonction).

La fonction renvoie un résultat (au moyen de la commande `return`) ; le programme s'arrête après `return`.

### Programmation d'une fonction en langage Python

• La programmation d'une fonction commence toujours par `def`, suivi du nom que l'on donne à la fonction, suivi des arguments de la fonction.

Cette ligne se termine par deux points ( : ).

Les deux points marquent le démarrage du bloc d'instructions définissant la fonction :

toutes ces instructions sont **indentées**, c'est-à-dire décalées vers la droite par rapport à la première ligne.

• Pour renvoyer la valeur de la variable  $d$ , on peut écrire `return(d)` ou `return d`.

• On peut utiliser une fonction dans la console en donnant des valeurs aux arguments (dans le bon ordre).

```
def nom_fonction(liste des arguments):
 bloc d'instructions
 return(résultat)
```

### Propriétés

• Une fonction ne renvoie qu'un seul résultat (cela peut être une liste de résultats).

• Une fonction peut n'avoir aucun argument.

• Une fonction peut être appelée dans un autre programme : il suffit pour cela de l'insérer dans une instruction en saisissant son nom et les valeurs des arguments.

### EXEMPLE 3 Conversion de la vitesse

La fonction `vitesse` ci-contre dont les arguments sont le nombre d'heures et le nombre de minutes que l'on a mis pour parcourir une certaine distance exprimée en heures, retourne la vitesse moyenne (en km · h<sup>-1</sup>) sur ce trajet.

La fonction `convert` appelée dans ce programme est celle de l'exemple 1.

```
def vitesse(heure,minute,distance):
 t=convert(heure,minute)
 v=distance/t
 return (v)
```



# Instruction conditionnelle (If)

## 1. Structure d'une instruction conditionnelle

### EXEMPLE Location d'un véhicule électrique

Une agence de location de véhicule propose différentes gammes dont des voitures électriques.

Parmi elles, le modèle Zéo proposé au tarif de 65,60 € la journée, plus un forfait kilométrique lié à l'usure de la batterie : 0,0175 € par kilomètre pour une distance effectuée de moins de 150 km, ou 0,015 € par kilomètre pour une distance supérieure à 150 km.

On veut créer un algorithme donnant le montant de la facture à payer pour la location d'une Zéo, en fonction du nombre  $x$  de kilomètres parcourus.

Pour cela, on doit introduire une **instruction conditionnelle** dans l'algorithme :

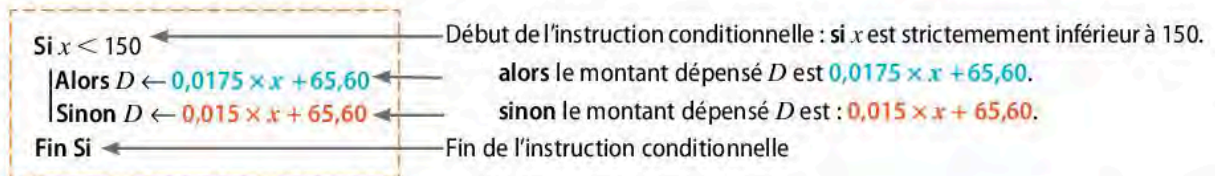
• Si le nombre de kilomètres parcourus  $x$  est strictement inférieur à 150, le montant dépensé est :

$x \times 0,0175 + 65,60$ , puisque le prix par kilomètre est alors 0,0175 €.

• Si le nombre de kilomètres parcourus  $x$  est supérieur ou égal à 150, le montant dépensé est :

$x \times 0,015 + 65,60$ , puisque le prix par kilomètre est alors 0,015 €.

On définit deux variables : l'une  $x$  représente le nombre kilomètres effectués, l'autre  $D$  le montant de la facture.



Si {condition C}  
 | **Alors** {instructions A}  
 | **Sinon** {instructions B}  
**Fin Si**

C'est la structure alternative « Si ... Alors ... Sinon ... » qui permet d'écrire l'**instruction conditionnelle** dans l'algorithme : un test est effectué sur une condition C, et le résultat du test décide de l'exécution de la phase de traitement.

Si la condition C est vérifiée, seules les instructions A sont exécutées.

Si la condition C n'est pas vérifiée, seules les instructions B sont exécutées.

### REMARQUE

On peut aussi utiliser la structure incomplète : « Si ... Alors ... » : dans ce cas, lorsque la condition C n'est pas vérifiée, l'exécution de l'algorithme continue après le **Fin Si**.

## 2. Programmation

### Programmation d'une instruction conditionnelle

Si {condition C}  
 | **Alors** {instructions A}  
 | **Sinon** {instructions B}  
**Fin Si**

| Python                                                                            | Remarques                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>if</b> {condition C}:<br>{instructions A}<br><b>else</b> :<br>{instructions B} | En langage Python, il n'y a pas d'instruction pour indiquer la fin de l'instruction conditionnelle : c'est l'indentation qui décale vers la droite les blocs d'instructions A et B. |

### Programme relatif à l'algorithme vu en exemple

```

1 def facture(x):
2 if x<150:
3 D=0.0175*x+65.6
4 else:
5 D=0.015*x+65.6
6 return D

```

• Dans le programme ci-contre, une première indentation indique les instructions faisant partie de la fonction **facture**.

• Dans le programme de cette fonction, une seconde indentation indique les instructions A et B de l'instruction conditionnelle.

• L'instruction **return D** permet de renvoyer le contenu de la variable D.

• Le « **else** » est aligné verticalement avec le « **if** » qui lui correspond.

• Le fait de taper les deux points « : » puis la touche « entrée » pour passer à la ligne provoque l'indentation automatique dans l'éditeur.



# Boucle bornée (For)

## 1. Structure de la boucle « Pour »

On peut répéter un bloc d'instructions un certain nombre de fois fixé au départ : on utilise alors la boucle « Pour ».

### EXEMPLE Nombre de visiteurs d'un site Web

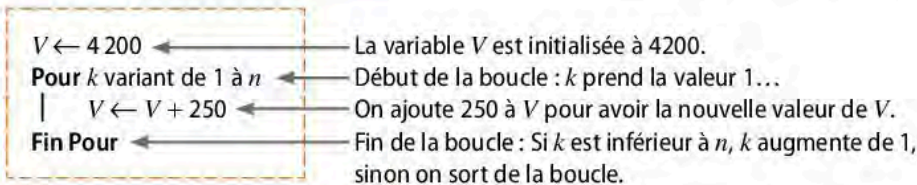
Salomé est administratrice d'un site Web dont la popularité est grandissante. Cette semaine, elle a dénombré 4 200 visiteurs sur ce site et le nombre de visiteurs augmente de 250 chaque semaine.

On souhaite élaborer un algorithme qui calcule le nombre de visiteurs de ce site dans un certain nombre de semaines.

On suppose que ce nombre de semaines est contenu dans une variable  $n$ .

Pour cela, on utilise une variable  $V$  que l'on initialise à 4 200, puis on répète  $n$  fois l'opération qui consiste à ajouter 250 à  $V$  : le nombre de répétitions (ou « itérations ») est connu au départ puisque c'est le nombre  $n$  de semaines.

On parle de « calcul itératif ».



Cas où  $n = 3$ .

|                                     | $k$ | $V$   |                                                                                            |
|-------------------------------------|-----|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| Avant le début de la boucle         |     | 4 200 | Au début, la variable $V$ est initialisée à 4 200.                                         |
| Fin de la 1 <sup>re</sup> itération | 1   | 4 450 | $k = 1$ et on ajoute 250 à $V$ donc $V = 4\,200 + 250 = 4\,450$ .                          |
| Fin de la 2 <sup>e</sup> itération  | 2   | 4 700 | $k = 2$ et on ajoute 250 à $V$ donc $V = 4\,450 + 250 = 4\,700$ .                          |
| Fin de la 3 <sup>e</sup> itération  | 3   | 4 950 | $k = 3$ et on ajoute 250 à $V$ donc $V = 4\,700 + 250 = 4\,950$ .<br>On sort de la boucle. |

La variable  $k$  contrôle le nombre de répétitions.

Dans l'exemple ci-dessus,  $k$  prend pour valeur initiale 1 et pour valeur finale  $n = 3$  en augmentant de 1 à chaque fois (cette augmentation constante est appelée « pas »).

## 2. Programmation

### Programmation de la boucle bornée

**Pour**  $k$  variant de  $d$  à  $n$   
     {instructions}  
**Fin Pour**

| Python                                                 | Remarques                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>for</b> $k$ in range( $d, n+1$ ):<br>{instructions} | L'instruction <code>for k in range(d, n+1)</code> fait parcourir à la variable $k$ tous les entiers de $d$ à $n$ .<br>Lorsque $d = 0$ , on peut remplacer <code>range(d, n+1)</code> par <code>range(n+1)</code> . |

En langage Python, les deux points « : » marquent le début d'un bloc d'instructions, ici de la boucle « for ».

Il n'y a pas d'instruction de fin de boucle « for » : c'est l'indentation (le décalage vers la droite) qui indique les instructions faisant partie de la boucle.

### Programme relatif à l'algorithme vu en exemple

On peut programmer cet algorithme en langage Python à l'aide d'une fonction :

```
1 def visiteurs(n):
2 V=4200
3 for k in range(1,n+1):
4 V=V+250
5 return(V)
```

- Dans ce programme, une première indentation indique les instructions faisant partie de la fonction visiteurs.
- Dans le programme de cette fonction, l'instruction `for k in range(1,n+1)` fait parcourir à la variable  $k$  tous les entiers de 1 à  $n$ .
- Une seconde indentation indique l'unique instruction faisant partie de la boucle « for ».

L'instruction `return(V)` permet de renvoyer le contenu de la variable  $V$  : ainsi lorsque l'on saisit `visiteurs(3)` dans la console la valeur 4 950 est renvoyée.



## Boucle non bornée (While)

### 1. Structure de la boucle « Tant que »

On peut répéter un bloc d'instructions tant qu'une condition reste vérifiée : on utilise la boucle « **Tant que** ».

#### EXEMPLE Rejets polluants d'un groupe industriel

En 2018, les rejets polluants d'un groupe industriel sont évalués à 5 000 tonnes. Le groupe est contraint de réduire ses rejets polluants de 8 % chaque année jusqu'à ce que ceux-ci ne dépassent plus 2 500 tonnes annuelles.

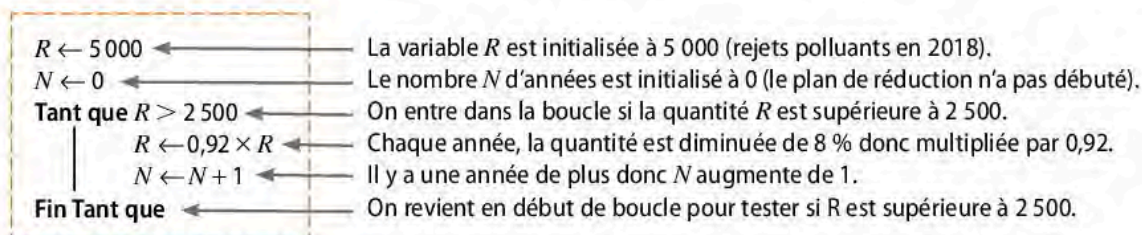
On suppose que le groupe respecte ce plan de réduction.

On souhaite élaborer un algorithme donnant le nombre d'années nécessaires à la réalisation de cet objectif.

On définit la variable  $R$  égale à la quantité de rejets polluants.

On doit répéter plusieurs fois l'instruction «  $R$  prend la valeur  $0,92 \times R$  » sans savoir à l'avance le nombre de répétitions. Pour cela, on teste si la variable  $R$  est supérieure à 2 500 en début de boucle et le traitement dans la boucle est réalisé tant que cette condition est vérifiée.

Pour compter le nombre d'années nécessaires, on introduit un « compteur »  $N$  initialisé à 0 et augmentant de 1 à chaque passage dans la boucle.



### Exécution pas à pas de l'algorithme

C'est la boucle « **Tant que ...** » qui permet de répéter ce calcul. En effet, elle est utilisée pour répéter un même bloc d'instructions jusqu'à valider une condition de sortie.

Le nombre d'itérations n'est en général pas connu à l'avance, on parle de **boucle non bornée**.

L'exécution pas à pas de cet algorithme est donnée ci-contre. C'est la structure itérative avec fin de boucle conditionnelle qui permet de résoudre le problème.

| Étapes                    | $R$   | $N$ | Condition $R > 2\,500$ |
|---------------------------|-------|-----|------------------------|
| Initialisation            | 5 000 | 0   | Vraie                  |
| 1 <sup>re</sup> itération | 4 600 | 1   | Vraie                  |
| 2 <sup>e</sup> itération  | 4 232 | 2   | Vraie                  |
| ...                       | ...   | ... | ...                    |
| 9 <sup>e</sup> itération  | 2 361 | 9   | Fausse                 |

### 2. Programmation

#### Programmation de la boucle non bornée

|                                                                                 | Python                                                      | Remarques                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre> <b>Tant que</b> {condition C}   {instructions} <b>Fin Tant que</b> </pre> | <pre> <b>while</b> {condition C}:     {instructions} </pre> | En langage Python, il n'y a pas d'instruction de fin de boucle « <b>while</b> » : c'est l'indentation (décalage à droite) qui indique les instructions à exécuter dans la boucle. |

#### Programme relatif à l'exemple précédent

```

1 def objectif():
2 R=5000
3 N=0
4 while R>2500:
5 R=0.92*R
6 N=N+1
7 return(N)

```

On peut programmer cet algorithme en langage Python à l'aide d'une fonction. Dans le programme ci-contre, une première indentation indique les instructions faisant partie de la fonction `objectif`. Une seconde indentation indique les instructions faisant partie de la boucle « **while** ».

L'instruction `return(N)` permet de renvoyer le contenu de la variable  $N$ .

En saisissant `objectif()` dans la console, la valeur 9 est renvoyée. Ainsi, l'objectif du groupe industriel sera atteint dans 9 ans.



En Mathématiques, les listes peuvent permettre de stocker les termes consécutifs d'une suite, les valeurs d'une variable aléatoire, les probabilités associées à ces valeurs, des coordonnées de points...

## 1. Exemples de listes

### EXEMPLE 1 Nombre de bactéries

Un scientifique souhaite étudier l'évolution du nombre de bactéries présentes dans une boîte de Pétri. On suppose qu'au début de l'expérience, il y a 100 bactéries et que chaque jour, ce nombre augmente d'abord de 5 %, puis augmente de 10 bactéries.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre de bactéries  $n$  jours après le début de l'expérience. Ainsi,  $u_0 = 100$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 1,05u_n + 10$ .

On souhaite élaborer un algorithme qui calcule le nombre de bactéries présentes chaque jour, depuis le début de l'expérience et les  $n$  jours suivants, où le nombre  $n$  est un entier naturel non nul. Pour cela, on utilise une liste  $L$  qui va contenir les termes  $u_0, u_1, \dots, u_n$ .

On suppose que  $n = 2$ . Ainsi,  $u_0 = 100$ ,  $u_1 = 115$  et  $u_2 = 130,75$ .

Donc à la fin de l'algorithme,  $L$  contient  $[100, 115, 130,75]$ .

```
u ← 100
L ← [u]
Pour k variant de 1 à n
 u ← 1,05u + 10
 L ← L + [u]
Fin Pour
```

### EXEMPLE 2 Tableau de valeurs d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; 10]$  par  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ .

On souhaite obtenir son tableau de valeurs avec  $x$  qui prend toutes les valeurs entières entre 1 et 10. On peut stocker les images dans une liste  $L$ . On élabore ainsi un algorithme qui calcule les images successives et qui les stocke dans la liste.

À la fin de l'algorithme,  $L$  contient  $[-1, -1, 1, 5, 11, 19, 29, 41, 55, 71]$ .

```
L ← []
Pour x variant de 1 à 10
 f ← x2 - 3x + 1
 L ← L + [f]
Fin Pour
```

## 2. Programmation

### Pour ajouter un élément à une liste

$L \leftarrow L + [u]$

| Python             | Remarques                                                                                          |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>L.append(u)</b> | L'instruction <code>L.append(u)</code> permet de rajouter l'élément $u$ à la fin de la liste $L$ . |

### Pour définir les éléments d'une liste à l'aide d'une fonction :

```
Pour x variant de 1 à 10
 f ← x2 - 3x + 1
 L ← L + [f]
Fin Pour
```

| Python                                   | Remarques                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>[x**2-3*x+1 for x in range(1,11)]</b> | L'instruction <code>L=[x**2-3*x+1 for x in range(1,11)]</code> permet de générer la liste des images par la fonction $f$ pour $x$ parcourant les entiers entre 1 et 10. |

### Programme relatif à l'algorithme de l'exemple 1

On peut programmer cet algorithme en langage Python à l'aide d'une fonction.

```
def bacteries(n):
 u=100
 L=[u]
 for k in range(1,n+1):
 u=1.05*u+10
 L.append(u)
 return(L)
```

Dans ce programme, on stocke  $u_0$  dans la liste  $L$ . Ensuite, dans la boucle « **for** », on calcule les termes successifs de la suite qu'on stocke au fur et à mesure dans la liste, à l'aide de l'instruction `L.append(u)`.

L'instruction `return(L)` permet de renvoyer le contenu de la liste  $L$  : ainsi, lorsque l'on saisit `bacteries(2)` dans la console, la liste  $[100, 115, 130,75]$  est renvoyée.

### Programme relatif à l'algorithme de l'exemple 2

On peut programmer cet algorithme en langage Python à l'aide d'une fonction.

```
def tableau():
 L=[x**2-3*x+1 for x in range(1,11)]
 return(L)
```

Dans ce programme, on génère les images des entiers entre 1 et 10 par la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ .

Elles sont stockées dans la liste  $L$ .

L'instruction `return(L)` permet de renvoyer le contenu de la liste  $L$  : ainsi, lorsque l'on saisit `tableau()` dans la console, la liste  $[-1, -1, 1, 5, 11, 19, 29, 41, 55, 71]$  est renvoyée.



## Programmation avec le langage Python

### Présentation

L'interface est composée de deux parties : l'éditeur et la console.

| Éditeur de programme                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Console d'exécution                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre> 1 L=[3] 2 for i in range(6): 3     L.append(2*L[i]+1) </pre> <ul style="list-style-type: none"> <li>On saisit le programme dans l'éditeur.</li> <li>On va à la ligne après chaque instruction.</li> <li>Un commentaire doit être précédé d'un dièse : #.</li> <li>Le programme exécuté est mis en mémoire dans la console.</li> </ul> | <pre> &gt;&gt;&gt; L [3, 7, 15, 31, 63, 127, 255] </pre> <ul style="list-style-type: none"> <li>Une instruction saisie dans la console est exécutée automatiquement.</li> <li>La console affiche le résultat du programme exécuté et/ou permet d'utiliser les fonctions définies dans ce programme.</li> </ul> |

### Affectation et affichage

|                                         |          |
|-----------------------------------------|----------|
| Affecter la valeur 3 à la variable A    | A = 3    |
| Affecter la valeur de B à la variable A | A = B    |
| Afficher la valeur de la variable A     | print(A) |

### Tests et conditions

|                                      |        |                                      |        |
|--------------------------------------|--------|--------------------------------------|--------|
| A est-il égal à B ?                  | A == B | A est-il différent de B ?            | A != B |
| A est-il strictement supérieur à B ? | A > B  | A est-il strictement inférieur à B ? | A < B  |
| A est-il supérieur ou égal à B ?     | A >= B | A est-il inférieur ou égal à B ?     | A <= B |

Ces tests renvoient un booléen, c'est-à-dire soit la valeur **True** (vrai), soit la valeur **False** (faux).

Ils peuvent être combinés à l'aide des opérateurs logiques « et » et « ou ».

|        |         |
|--------|---------|
| A et B | A and B |
| A ou B | A or B  |

### Instructions conditionnelles

L'indentation (le décalage vers la droite) générée par les deux points après le **if** et le **else** indique les instructions qui font partie de la structure conditionnelle. Les accolades ne sont pas nécessaires.

| Algorithme                                                                                                 | Python                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Si</b> {condition C}<br><b>Alors</b> {instructions A}<br><b>Sinon</b> {instructions B}<br><b>Fin Si</b> | <b>if</b> {condition C} :<br>{instructions A}<br><b>else</b> :<br>{instructions B} |

### Boucle de répétition

L'indentation générée par les deux points après le **for** indique les instructions qui font partie de la boucle. Le retour à la ligne en s'alignant sous **for** permet de sortir de la boucle.

| Algorithme                                                            | Python                                            |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>Pour</b> i variant de 1 à n<br>  {instructions}<br><b>Fin Pour</b> | <b>for</b> i in range(1, n+1) :<br>{instructions} |

|                                                                                                                            |                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| La variable i parcourt tous les entiers de 0 à n - 1                                                                       | <b>for</b> i in range(n) :       |
| La variable i parcourt tous les entiers de d à n - 1                                                                       | <b>for</b> i in range(d, n) :    |
| La variable i parcourt tous les entiers de d jusqu'à l'entier immédiatement inférieur ou égal à n - 1 avec un pas égal à p | <b>for</b> i in range(d, n, p) : |

### Boucle conditionnelle

Comme pour **if** et **for**, on utilise l'indentation générée par les deux points après le **while** pour indiquer les instructions qui font partie de la boucle. Les accolades ne sont pas nécessaires.

| Algorithme                                                               | Python                                         |
|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| <b>Tant que</b> {condition C}<br>  {instructions}<br><b>Fin Tant que</b> | <b>while</b> {condition C} :<br>{instructions} |



## Définir une fonction

Une fonction peut avoir un ou plusieurs paramètres, voire aucun paramètre.

Pour que cette fonction renvoie une valeur, on utilise l'instruction **return**.

Ci-contre, on peut aussi écrire **return(y)** au lieu de **return y**.

Une fois le code de la fonction exécuté, on peut appeler celle-ci dans la console.

```
def f(a, b, c, ...):
 y = ...
 return y
```

```
>>> f(12, 5, 3, ...)
```

## Opérations et fonctions prédéfinies

|                                           |             |                                               |                    |
|-------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------|--------------------|
| x à la puissance n                        | <b>x**n</b> | Valeur absolue de x                           | <b>abs(x)</b>      |
| Reste de la division de a par b           | <b>a%b</b>  | Arrondi de x avec n chiffres après la virgule | <b>round(x, n)</b> |
| Quotient entier de la division de a par b | <b>a//b</b> |                                               |                    |

## Le module math

| Importer toutes les fonctions du module math |                | from math import *       |               |
|----------------------------------------------|----------------|--------------------------|---------------|
| La constante $\pi$                           | <b>pi</b>      | La constante e           | <b>e</b>      |
| Racine carrée de x                           | <b>sqrt(x)</b> | Exponentielle de x       | <b>exp(x)</b> |
| Sinus de x                                   | <b>sin(x)</b>  | Logarithme neperien de x | <b>log(x)</b> |
| Cosinus de x                                 | <b>cos(x)</b>  | Partie entière de x      | <b>int(x)</b> |

## Le module random

| Importer toutes les fonctions du module random          |  | from random import * |  |
|---------------------------------------------------------|--|----------------------|--|
| Nombre décimal aléatoire compris entre 0 et 1           |  | <b>random()</b>      |  |
| Entier aléatoire compris entre a (inclus) et b (inclus) |  | <b>randint(a, b)</b> |  |
| Nombre décimal aléatoire compris entre a et b           |  | <b>uniform(a, b)</b> |  |

## Les listes

|                                                                                               |                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| Définir une liste L en extension                                                              | <b>L = [a, b, c, d, e, ...]</b>          |
| Liste des entiers compris entre a et b (a et b entiers)                                       | <b>L = list(range(a, b+1))</b>           |
| Définir en compréhension la liste formée des éléments f(x) pour x parcourant la liste L       | <b>L = [f(x) for x in L]</b>             |
| Définir la liste formée des éléments f(x) pour x parcourant la liste L et vérifiant le test T | <b>L = [f(x) for x in L if test T]</b>   |
| Définir la liste formée des éléments f(k) pour k entier variant de a à b                      | <b>L = [f(x) for k in range(a, b+1)]</b> |
| Définir la liste formée des éléments f(k) pour k entier variant de 0 à n - 1                  | <b>L = [f(x) for k in range(n)]</b>      |

## Opérations sur les listes

|                                                   |                 |                                                                      |                    |
|---------------------------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Valeur du k <sup>e</sup> élément de la liste L    | <b>L[k-1]</b>   | Concaténation de deux listes L et L'                                 | <b>L + L'</b>      |
| Longueur d'une liste L                            | <b>len(L)</b>   | Ajout de l'élément a en fin de la liste L                            | <b>L.append(a)</b> |
| Suppression de l'élément d'indice i de la liste L | <b>L.pop(i)</b> | Suppression de la première occurrence de l'élément c dans la liste L | <b>L.remove(c)</b> |

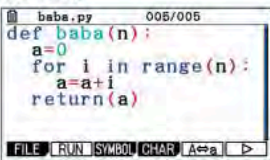
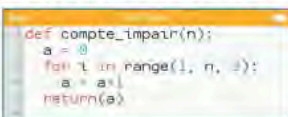
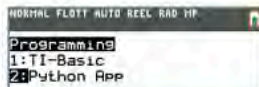
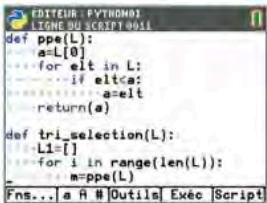
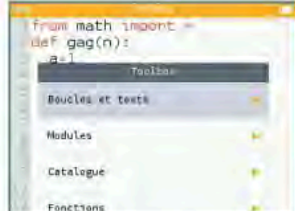
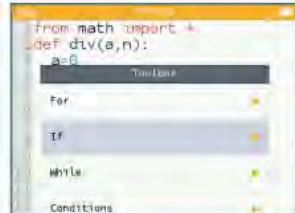
## Chaînes de caractères

Une chaîne de caractères est définie entre guillemets simples « ' » ou bien entre apostrophes « ' ».

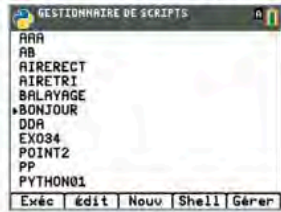
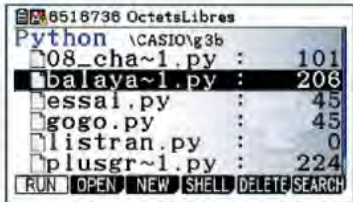
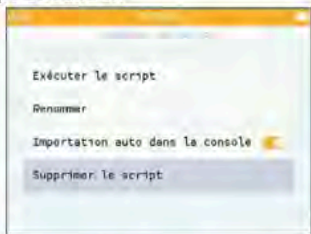
|                                                   |               |                                                             |                                       |
|---------------------------------------------------|---------------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| Valeur du k <sup>e</sup> caractère de la chaîne C | <b>C[k-1]</b> | Concaténation de deux chaînes de caractères "abcd" et "efg" | <b>"abcd" + "efg" donne "abcdefg"</b> |
| Longueur d'une chaîne de caractères C             | <b>len(C)</b> |                                                             |                                       |



## Programmation en Python sur les calculatrices

| CASIO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | NUMWORKS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | TEXAS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Pour créer un programme</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p>1. Sélectionner le menu Python à l'aide des flèches du curseur, puis valider avec <b>EXE</b>. Sélectionner <b>NEW</b> (F2).</p>  <p>2. On complète au-dessous de « Nom du script » en donnant un nom au programme, puis on valide avec <b>EXE</b>. On se trouve dans l'éditeur, prêt à saisir les instructions.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>1. Sélectionner l'icône Python à l'aide des flèches du curseur, puis valider avec <b>OK</b>.</p>  <p>2. Sélectionner <b>Ajouter un script</b> avec les flèches, puis <b>OK</b>.</p> <p>3. Donner un nom au programme (suivi de .py déjà noté), puis <b>OK</b>. On se trouve alors dans l'éditeur :</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p>1. Appuyer sur la touche <b>prgm</b>, puis sélectionner le sous-menu <b>2:Python App</b>.</p>  <p>Valider avec <b>entrer</b>.</p> <p>2. Sélectionner <b>Nouv</b> (touche <b>zoom</b>).</p>  <p>3. Donner un nom au programme, suivi de <b>OK</b> (touche <b>graph</b>). On se trouve alors dans l'éditeur.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Pour saisir un programme</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p>On peut écrire les instructions lettre à lettre ou les chercher dans <b>CATALOG</b> (SHIFT 4).</p> <p>Dans le catalogue, on trouve les instructions en tapant la première lettre de leur nom.</p> <p>On accède aux catégories par <b>CAT</b> :</p> <p>2: <b>Built-in</b> : on trouve def, return, for, if, while, and ...;</p> <p>3: <b>math</b> : bibliothèque math ;</p> <p>4: <b>random</b> : bibliothèque random.</p> <p>On sélectionne l'instruction, suivi de <b>EXE</b>, afin de l'insérer dans l'éditeur.</p> <p>On a accès à la barre d'outils suivante :</p>  <p>1. En sélectionnant <b>SYMBOL</b> (F3), on a accès aux symboles suivants.</p>  <p>2. Le menu <b>CHAR</b> (F4) donne accès aux lettres, aux chiffres ...</p> <p>3. Par appui sur <b>F6</b>, on accède aux onglets suivants :</p>  <p>4. En sélectionnant <b>COMMAND</b> (F1), on a accès aux instructions if, for et while.</p> <p>5. En sélectionnant <b>OPERAT</b> (F2), on a accès aux fonctionnalités :</p>  | <p>Utiliser les menus déroulants accessibles avec la touche <b>Toolbox</b>.</p>  <p>On passe d'un menu à l'autre avec les flèches du curseur.</p> <p>Pour ouvrir le menu, on le sélectionne et on valide par <b>OK</b>.</p> <p>1. <b>Le menu Boucles et tests</b></p> <p>Il comprend quatre sous-menus : <b>For</b>, <b>If</b>, <b>While</b> et <b>Conditions</b> (comme <math>x &lt; y</math>, <math>x = y</math> ...)</p>  <p>2. <b>Le menu Modules</b></p> <p>Par défaut, l'éditeur de programmes s'ouvre en appelant la bibliothèque <b>math</b> qui contient toutes les fonctions utiles au lycée. Il contient plusieurs modules (bibliothèques de fonctions) que l'on peut importer. Par exemple : <b>math</b>, <b>cmath</b> ou <b>random</b>.</p> | <p>Dans l'éditeur, on a accès à différents menus en bas de l'écran :</p> <p>1. <b>Menu Fns</b> (touche <b>f(x)</b>)</p> <p>On a ensuite accès à plusieurs onglets :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• l'onglet <b>Fonc</b> donne accès à <b>def</b> fonction() et <b>return</b> ;</li> <li>• l'onglet <b>Ctl</b> permet de sélectionner toutes les instructions <b>if</b>, <b>for</b>, <b>while</b> ;</li> <li>• l'onglet <b>Ops</b> comprend les tests (<math>x=y</math>, <math>x&gt;y</math> ...) ainsi que les connecteurs <b>or</b>, <b>and</b>.</li> <li>• l'onglet <b>List</b> permet d'accéder aux outils de gestion des listes : <b>append()</b>, <b>min()</b>, <b>max()</b>, <b>len()</b>...</li> <li>• l'onglet <b>modul</b> permet d'accéder aux modules <b>math</b> et <b>random</b> (par exemple pour importer ces modules).</li> </ul> <p>2. <b>Menu aA#</b> (touche <b>fenêtre</b>)</p> <p>On dispose des lettres de l'alphabet en minuscule (passage en majuscule avec le menu <b>a&lt;&gt;A</b>), de certains symboles (<b>#</b>, <b>«</b>, <b>...</b>), des connecteurs <b>and</b>, <b>or</b> et des booléens (<b>True</b>, <b>False</b>).</p> <p>On appuie sur <b>Sélect</b> (touche <b>trace</b>) pour insérer le caractère voulu.</p> |



| CASIO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | NUMWORKS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | TEXAS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Pour saisir un programme</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p>6. Les instructions relatives aux fonctions (def et return), et celles relatives aux importations de modules sont dans <b>CATALOG</b>.</p> <p>Pour importer le module <b>math</b>, choisir <b>CAT</b>, puis <b>3:math</b> suivi de <b>EXE</b> et "from math import *"</p> <p>Pour le module <b>random</b>, choisir <b>CAT</b>, puis <b>4:random</b> suivi de <b>EXE</b> et "from random import *"</p> <p>7. Pour enregistrer le programme Sélectionner <b>FILE</b> (F1), puis <b>SAVE</b>.</p> <p>La touche <b>EXIT</b> permet de sortir d'un menu.</p> | <p>La liste des fonctions d'un module s'obtient en sélectionnant le module.</p> <p>3. <b>Le menu Catalogue</b><br/>Il comprend des fonctions comme <b>min</b>, <b>max</b>, <b>sin</b>...</p> <p>4. <b>Le menu Fonctions</b><br/>Il comprend les instructions <b>def function(x):</b> et <b>return</b>.</p> <p>La touche <b>←</b> permet de revenir au menu précédent.</p>                                                                                                                                                                            | <p>3. <b>Menu Outils</b> (touche <b>zoom</b>)<br/>Il permet d'insérer une indentation, une ligne, de couper, copier ou coller une ligne.</p> <p>4. <b>Menu Exéc</b> (touche <b>trace</b>)<br/>Il permet l'exécution du programme.</p> <p>5. <b>Menu Script</b> (touche <b>graphe</b>)<br/>Il permet d'accéder à tous les programmes de la calculatrice.</p> <p>On sort d'un menu avec la commande <b>Echap</b> (touche <b>f(x)</b>).</p>                                                                     |
| <b>Pour exécuter un programme</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p>• Une fois le programme saisi, on sélectionne <b>RUN</b> (F1), puis on tape le nom de la fonction pour exécuter le programme dans la console.</p> <p>On peut aussi accéder directement à la console en sélectionnant le menu Python, puis l'onglet <b>SHELL</b> (F4).</p> <p>Il faut alors importer les programmes souhaités, puis utiliser la fonction voulue.</p> <pre>&gt;&gt;&gt;from baba import * &gt;&gt;&gt;baba(5)</pre>                                                                                                                       | <p>On se place dans la console.</p> <p>Pour cela :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– soit on revient à l'écran d'accueil de l'application Python accessible avec la touche <b>←</b>, puis on sélectionne <b>Console d'exécution</b>, puis <b>OK</b>.</li> <li>– soit on se place sur l'icône de réglages <b>⚙</b> à côté du nom du script, on valide avec <b>OK</b>, et on choisit <b>Exécuter le script</b>, suivi de <b>OK</b>. On peut appeler une fonction après &gt;&gt;&gt; (tous les scripts sont importés par défaut).</li> </ul> | <p>Dans le gestionnaire de scripts, sélectionner à l'aide des touches de défilement le programme voulu, puis sélectionner le menu <b>Exéc</b> (touche <b>f(x)</b>).</p>                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Pour supprimer ou renommer un programme</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p>1. <b>Supprimer un programme</b><br/>Sélectionner le programme, puis utiliser <b>DELETE</b> (F5).</p>  <p>2. <b>Renommer un programme</b><br/>Ouvrir le programme avec <b>OPEN</b> (F2). Choisir <b>FILE</b> (F1), puis <b>SAVE-AS</b> (F2). Entrer le nouveau nom dans « nom du script », puis supprimer l'ancien programme.</p>                                                                                                                                    | <p>1. <b>Supprimer un script</b><br/>Dans la liste des scripts, se positionner sur l'icône <b>⚙</b> à côté du nom du script, puis <b>OK</b>, puis <b>Supprimer le script</b> et valider.</p>  <p>2. <b>Renommer un script</b><br/>Dans la liste des scripts, se positionner sur l'icône de réglages <b>⚙</b>, puis <b>OK</b>, puis <b>Renommer</b> et valider.</p>                                                                                                | <p>1. <b>Supprimer un script</b><br/>Dans le gestionnaire de scripts, sélectionner le menu <b>Gérer</b> (touche <b>graphe</b>), puis choisir <b>2:Supprimer le script</b>, suivi de <b>entrer</b>, puis <b>OK</b> (touche <b>graph</b>).</p> <p>2. <b>Renommer un script</b><br/>Dans le gestionnaire de scripts, sélectionner le menu <b>Gérer</b> (touche <b>graphe</b>), puis choisir <b>3:Renommer le script</b>, suivi de <b>entrer</b>. Saisir le nouveau nom, et <b>OK</b> (touche <b>graph</b>).</p> |



## Fractions

• La fraction  $\frac{a}{b}$  existe à condition que  $a$  et  $b$  existent et que  $b$  soit différent de 0.

• On peut **simplifier** une fraction lorsqu'un même nombre est en facteur au numérateur et au dénominateur :  $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$ .

• Pour **additionner ou soustraire** des fractions, on commence par les réduire au même dénominateur.

• **Multiplication et division :**

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}; \quad a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$$

$$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

**Exemple 1.** Dans la fraction  $\frac{11}{x+2}$ , le dénominateur est égal à  $x+2$ . Cette fraction existe pour tous les réels  $x$  tels que  $x+2$  est différent de 0. Or,  $x+2=0$  équivaut à  $x=-2$ , donc la fraction existe pour tous les réels  $x$  différents de  $-2$ .

**Exemple 2.** La fraction  $\frac{5 \times 5 + 2}{5 \times 3}$  ne peut pas se simplifier par 5 car 5 n'est pas en facteur au numérateur. En effet  $5 \times 5 + 2$  n'est pas un produit. Cette fraction est égale à  $\frac{27}{15}$ . On peut maintenant simplifier cette fraction, puisque :  $\frac{27}{15} = \frac{3 \times 9}{3 \times 5} = \frac{9}{5}$ .

**Exemple 3.**  $3 + \frac{1}{x} = \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3x+1}{x}$  pour tout  $x$  non nul.

## Puissances

• Pour tout entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1 et tout réel  $a$ ,  $a^n$  est le produit de  $n$  facteurs égaux à  $a$  :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{(n \text{ facteurs})}$$

se lit «  $a$  exposant  $n$  »

•  $a^1 = a$ .

• Pour  $a \neq 0$ ,  $a^0 = 1$ .

• Pour  $a \neq 0$ ,  $a^{-n}$  est l'inverse de  $a^n$  :  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

• Pour tous réels  $a$  et  $b$  non nuls, et tous entiers relatifs  $n$  et  $p$  :

$$(1) a^n \times a^p = a^{n+p} \quad (2) \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$$(3) (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$(4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (5) (a^n)^p = a^{n \times p}$$

**Exemple 1. Puissances de 10**

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000;$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001.$$

**Exemple 2. Puissances de 1**

Quel que soit l'entier naturel  $n$ ,  $1^n = 1^{-n} = 1$ .

**Exemple 3. Calculs et simplifications**

$$x^2 \times x^3 = x^5; \quad (x^2)^3 = x^6;$$

$$(3x)^2 = 3^2 x^2 = 9x^2.$$

**Exemple 4. Importance des parenthèses**

$$-3^2 = -9 \text{ et } (-3)^2 = 3^2 = 9.$$

Il ne faut pas confondre  $-3^2$  et  $(-3)^2$ .

## Racines carrées

• Si  $a \geq 0$ ,  $\sqrt{a}$  est le nombre positif dont le carré est égal à  $a$  :  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

• Pour  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  :  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ .

• Pour  $a \geq 0$  et  $b > 0$ ,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

•  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

• Pour  $a$  et  $b$  strictement positifs :  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

•  $\sqrt{2} \approx 1,414$ ;  $\sqrt{3} \approx 1,732$ ;  $\sqrt{5} \approx 2,236$ .

**Calculs et simplifications d'écriture**

**Exemple 1.**  $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ ;  $\sqrt{100} = 10$ .

**Exemple 2.**  $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ .

**Exemple 3.**  $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ ;  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ .

Il ne faut pas confondre  $\sqrt{9+16}$  et  $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ .

**Exemple 4.**  $\frac{3+\sqrt{18}}{3} = \frac{3+3\sqrt{2}}{3} = \frac{3(1+\sqrt{2})}{3} = 1+\sqrt{2}$ .

**Exemple 5.**  $\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{1} = \sqrt{7}$ .



## Calcul littéral

- Une expression algébrique peut être écrite sous la forme d'une **somme** :  $a + b$ , d'un **produit** :  $a \times b$ , d'un **carré** :  $a^2$  ou d'un **quotient** :  $\frac{a}{b}$ .
- Certaines expressions algébriques peuvent être transformées en **développant**, en **factorisant**, ou en **réduisant au même dénominateur**.
- Pour **développer** et **factoriser**, on peut utiliser l'une des égalités suivantes où  $k, a$  et  $b$  sont des réels quelconques :

|                                                                         |                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| <p>On développe</p> $k(a + b) = ka + kb$ <p>← on factorise</p>          | <p>On développe</p> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ <p>← on factorise</p> |
| <p>On développe</p> $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ <p>← on factorise</p> | <p>On développe</p> $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ <p>← on factorise</p>  |

**Exemple 1.** L'expression  $5x^2 + 3$  est une somme de deux termes.

**Exemple 2.** L'expression  $7x^2 - 5x$  est une différence de deux termes. Dans chacun de ces deux termes, le facteur  $x$  apparaît ; c'est un facteur commun et on peut **factoriser par  $x$**  :

$$7x^2 - 5x = 7x \times x - 5 \times x = (7x - 5) \times x$$

**Exemple 3.** L'expression  $4x^2 - 9$  peut s'écrire  $(2x)^2 - 3^2$ , qui est de la forme  $a^2 - b^2$  avec  $a = 2x$  et  $b = 3$  ; on peut alors **factoriser** et on obtient  $(2x - 3)(2x + 3)$ .

**Exemple 4.** L'expression  $7 + \frac{1}{x+2}$  est une somme de deux termes dont l'un des termes est un quotient. Cette expression peut s'écrire sous la forme d'un quotient en **réduisant au même dénominateur :  $x + 2$**  ; on obtient, pour tout réel  $x$  différent de  $-2$  :

$$\frac{7(x+2)}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \frac{7x+14+1}{x+2} = \frac{7x+15}{x+2}$$

## Résolution d'une équation

- L'équation  $ax + b = 0$ , avec  $a$  un réel non nul, admet une unique solution : le réel  $-\frac{b}{a}$ .
- L'équation  $A(x) \times B(x) = 0$ , appelée **équation produit**, est équivalente à  $A(x) = 0$  ou  $B(x) = 0$ .
- L'équation  $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$  équivaut à  $A(x) = 0$  et  $B(x) \neq 0$ .
- L'équation  $x^2 = a$ , avec  $a$  réel strictement positif, admet deux solutions :  $-\sqrt{a}$  et  $\sqrt{a}$ .
- L'équation  $x^2 = a$ , avec  $a$  réel strictement négatif, n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.** L'équation  $(3x - 4)(x^2 + 5) = 0$  est équivalente à  $3x - 4 = 0$  ou  $x^2 + 5 = 0$ . Or, il n'existe aucun réel  $x$  tel que  $x^2 + 5$  soit égal à 0, donc l'équation donnée admet une unique solution :  $\frac{4}{3}$ .

**Exemple 2.** L'équation  $x^2 - 3x = 0$  est équivalente à  $x(x - 3) = 0$ , soit à  $x = 0$  ou  $x = 3$ . L'équation donnée admet deux solutions : 0 et 3.

**Exemple 3.** L'équation  $x^2 - 7 = 0$  équivaut à  $x^2 = 7$ , elle admet deux solutions  $-\sqrt{7}$  et  $\sqrt{7}$ .

## Inégalités et intervalles

### Règles sur les inégalités

- Pour tout réel  $c$ ,  $a < b$  équivaut à  $a + c < b + c$ .
- Pour tout réel  $c$  strictement positif,  $a < b$  équivaut à  $ac < bc$ .
- Pour tout réel  $c$  **strictement négatif**,  $a < b$  équivaut à  $ac > bc$ .

### Les différents intervalles

- L'intervalle  $[a ; b]$  est l'ensemble des réels  $x$  tels que :  
$$a \leq x \leq b.$$
- L'intervalle  $]a ; b[$  est l'ensemble des réels  $x$  tels que :  
$$a < x < b.$$
- L'intervalle  $[a ; +\infty[$  est l'ensemble des réels  $x$  tels que :  
$$x \geq a.$$
- L'intervalle  $]-\infty ; a[$  est l'ensemble des réels  $x$  tels que :  
$$x < a.$$

**Exemple 1.**  $a < b$  équivaut à  $a - 2 < b - 2$  car on a ajouté le même nombre  $-2$  aux deux membres de l'inégalité.

**Exemple 2.**  $a < b$  équivaut à  $-6a > -6b$  car **lorsqu'on multiplie** les deux membres de l'inégalité par le **nombre négatif  $-6$** , on **change le sens de l'inégalité**.

**Exemple 3.**  $4x < 8$  équivaut à  $x < 2$ , car on a divisé les deux membres de l'inégalité par un nombre positif, 4. L'ensemble des réels  $x$  tels que  $4x < 8$  est donc l'intervalle  $]-\infty ; 2[$ .

**Exemple 4.**  $-8x \leq 16$  équivaut à  $x \geq -2$  car **lorsqu'on divise** les deux membres de l'inégalité par le **nombre négatif  $-8$** , on **change le sens de l'inégalité**. L'ensemble des réels  $x$  tels que  $-8x \leq 16$  est donc l'intervalle  $[-2 ; +\infty[$ .



## Signe d'une expression

Pour trouver le **signe** d'une expression, on commence par **reconnaître la forme de cette expression**, puis on applique la règle adaptée après transformation de la forme initiale si besoin.

1. Si une expression se présente sous la forme d'une **somme de termes tous positifs (respectivement tous négatifs)**, alors cette somme est positive (respectivement négative).

2. Si une expression est de la forme  $ax + b$ , on recherche la valeur  $x_0$  qui annule  $ax + b$ , puis on observe le signe du coefficient  $a$ .

Si  $a < 0$

| $x$      | $-\infty$ | $x_0$       | $+\infty$ |
|----------|-----------|-------------|-----------|
| $ax + b$ |           | $+$ $0$ $-$ |           |

Si  $a > 0$

| $x$      | $-\infty$ | $x_0$       | $+\infty$ |
|----------|-----------|-------------|-----------|
| $ax + b$ |           | $-$ $0$ $+$ |           |

3. Si une expression est un **produit**, on recherche le signe de chacun des facteurs de ce produit et on applique la règle des signes d'un produit.

4. Si une expression est un **quotient**, on commence par rechercher les valeurs interdites, c'est-à-dire les valeurs qui annulent le dénominateur, puis on détermine le signe du numérateur et celui du dénominateur. Dans le tableau, on place une double barre verticale pour indiquer que l'expression n'existe pas.

**Exemple 1.**  $x^2 + 13$  est une somme de deux termes positifs, donc  $x^2 + 13$  est positif pour tout réel  $x$ .

**Exemple 2.**  $-4x + 8$  est de la forme  $ax + b$  avec  $a = -4$  et  $b = 8$ ;  $-4x + 8$  s'annule pour  $x = 2$ .

Puisque  $a < 0$ , on obtient le tableau de signes :

| $x$       | $-\infty$ | 2           | $+\infty$ |
|-----------|-----------|-------------|-----------|
| $-4x + 8$ |           | $+$ $0$ $-$ |           |

**Exemple 3.**  $-4x^2 + 8x$  se factorise sous la forme  $x(-4x + 8)$ ; on construit le tableau de signes donnant à la fois le signe de  $x$  et le signe de  $-4x + 8$ . On en déduit le signe du produit  $x(-4x + 8)$ .

| $x$          | $-\infty$ | 0                   | 2 | $+\infty$ |
|--------------|-----------|---------------------|---|-----------|
| $x$          |           | $-$ $0$ $+$         |   |           |
| $-4x + 8$    |           | $+$ $+$ $0$ $-$     |   |           |
| $x(-4x + 8)$ |           | $-$ $0$ $+$ $0$ $-$ |   |           |

**Exemple 4.**  $\frac{x}{-4x + 8}$  a le même tableau de signes que  $x(-4x + 8)$  mais on indique par une double barre verticale que l'expression n'existe pas pour  $x = 2$ .

| $x$                 | $-\infty$ | 0           | 2 | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|-------------|---|-----------|
| $\frac{x}{-4x + 8}$ |           | $-$ $0$ $+$ |   | $-$       |

## Fonctions : généralités

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$  et  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan.

• La **représentation graphique**  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x; f(x))$ , où  $x$  appartient à  $D$ . L'équation de  $\mathcal{C}_f$  est  $y = f(x)$ .

### Résolutions graphiques

• Les solutions de l'équation  $f(x) = k$  sont les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  avec la droite d'équation  $y = k$ .  
 • Les solutions de l'inéquation  $f(x) < k$  sont les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés en-dessous de la droite d'équation  $y = k$ .

### Sens de variation

•  $f$  est **croissante** sur l'intervalle  $I$  lorsque, pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a \leq b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$ .  
 •  $f$  est **décroissante** sur l'intervalle  $I$  lorsque, pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a \leq b$ , alors  $f(a) \geq f(b)$ .

### Fonction affine

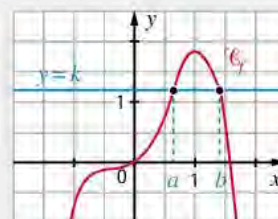
• Une fonction affine est définie sur  $\mathbb{R}$  par une expression de la forme  $f(x) = ax + b$ .  
 • Sa représentation graphique est une droite.  
 • Si  $a > 0$ , alors la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .  
 • Si  $a < 0$ , alors la fonction  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .  
 • Si  $a = 0$ , alors la fonction  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -4x + 8$ .

- L'image de  $-3$  par  $f$  est  $f(-3)$ ; en remplaçant  $x$  par  $-3$  dans l'expression  $f(x)$ , on obtient  $f(-3) = 20$ .
- Puisque  $f(-3) = 20$ , le point de coordonnées  $(-3; 20)$  appartient à la représentation graphique de  $f$ .
- Il existe un seul réel  $x$  tel que  $f(x) = -12$  puisque l'équation  $-4x + 8 = -12$  admet une seule solution  $5$ ;  $5$  est l'**antécédent** de  $-12$  par la fonction  $f$ .
- Le point de coordonnées  $(x; 8)$  appartient à la représentation graphique de  $f$  si, et seulement si, ses coordonnées vérifient  $f(x) = 8$ ; ceci équivaut à :  $8 = -4x + 8$  soit à  $0 = -4x$  et donc à  $x = 0$ .
- Cette fonction  $f$  est une fonction affine; sa représentation graphique est la droite d'équation  $y = -4x + 8$ .
- Cette fonction est décroissante sur  $\mathbb{R}$  puisque  $-4$  est négatif.

**Exemple 2.** L'équation  $f(x) = k$  admet deux solutions  $a$  et  $b$ ; ces solutions sont  $a \approx 0,6$  et  $b \approx 1,4$ .

Par lecture graphique, cette fonction  $f$  est croissante sur  $[-1; 1]$  et décroissante sur  $[1; 1,8]$ .





## Fonctions de référence

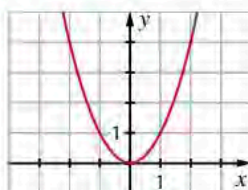
Les fonctions de référence connues en classe de seconde et de première sont les fonctions affines, les fonctions rappelées ci-dessous et la fonction exponentielle (voir rabat B).

### Fonction carré

- La fonction carré est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .
- Sens de variation** : la fonction carré est décroissante sur  $]-\infty ; 0]$  et croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .
- Tableau de variation**

|       |           |                       |           |
|-------|-----------|-----------------------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $0$                   | $+\infty$ |
| $x^2$ |           | $\searrow 0 \nearrow$ |           |

- Sa **représentation graphique** est une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et admettant comme sommet l'origine du repère. La fonction carré est une fonction paire.

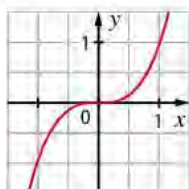


### Fonction cube

- La fonction cube est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .
- Sens de variation** : la fonction cube est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Tableau de variation**

|       |           |            |
|-------|-----------|------------|
| $x$   | $-\infty$ | $+\infty$  |
| $x^3$ |           | $\nearrow$ |

- Sa **représentation graphique** est symétrique par rapport à l'origine du repère.



- La fonction cube est une fonction impaire.

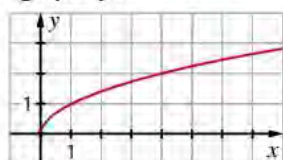
### Fonction racine carrée

- La fonction racine carrée est la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .
- Sens de variation** : cette fonction est croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

- Tableau de variation**

|            |     |            |
|------------|-----|------------|
| $x$        | $0$ | $+\infty$  |
| $\sqrt{x}$ | $0$ | $\nearrow$ |

- Représentation graphique**



### Fonctions polynômes du second degré

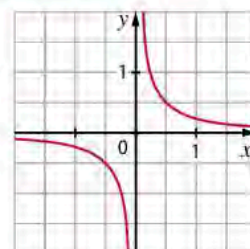
- Les fonctions polynômes du second degré sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a$  non nul.
- Discriminant** :  $\Delta = b^2 - 4ac$ .
- Sens de variation**
  - Si  $a > 0$ , la fonction  $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$ , puis croissante sur  $[-\frac{b}{2a} ; +\infty[$ .
  - Si  $a < 0$ , la fonction  $f$  est croissante sur  $]-\infty ; -\frac{b}{2a}]$ , puis décroissante sur  $[-\frac{b}{2a} ; +\infty[$ .
- La **représentation graphique** est une parabole « tournée vers le haut » si  $a > 0$  et « tournée vers le bas » si  $a < 0$ . Le sommet de cette parabole est le point d'abscisse  $-\frac{b}{2a}$ .

### Fonction inverse

- La fonction inverse est la fonction définie sur  $]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .
- Sens de variation** : la fonction inverse est décroissante sur  $]-\infty ; 0[$  et décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ .
- Tableau de variation**

|               |           |                           |           |
|---------------|-----------|---------------------------|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $0$                       | $+\infty$ |
| $\frac{1}{x}$ |           | $\searrow \quad \nearrow$ |           |

- Sa **représentation graphique** est une hyperbole symétrique par rapport à l'origine du repère. La fonction inverse est une fonction impaire.

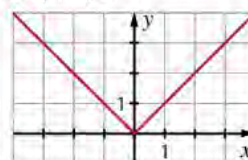


### Fonction valeur absolue

- La fonction valeur absolue est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $|x| = x$  si  $x$  est positif ;  $|x| = -x$  si  $x$  est négatif.
- Sens de variation** : cette fonction est décroissante sur  $]-\infty ; 0]$  et croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .
- Tableau de variation**

|       |           |                       |           |
|-------|-----------|-----------------------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $0$                   | $+\infty$ |
| $ x $ |           | $\searrow 0 \nearrow$ |           |

- Représentation graphique**



- Pour tout réel  $a$  et tout réel  $r$  strictement positif :  $|x - a| \leq r$  est équivalent à  $a - r \leq x \leq a + r$ .



## Information chiffrée

• **Écrire un nombre sous la forme d'un pourcentage**, c'est l'écrire sous la forme d'une fraction de dénominateur 100.

• **Calculer  $p\%$  d'un nombre  $N$** , c'est multiplier ce nombre  $N$  par  $\frac{p}{100}$ .

• Une quantité évolue d'une valeur initiale  $Q_1$  à une valeur finale  $Q_2$ .

Le **taux d'évolution** de  $Q_1$  à  $Q_2$  est  $t = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$ .

Le **coefficient multiplicateur** de cette évolution est le nombre  $c = \frac{Q_2}{Q_1}$ . On a  $c = 1 + t$  et  $t = c - 1$ .

• **Augmenter de  $p\%$  une quantité**, c'est multiplier cette quantité par le nombre  $1 + \frac{p}{100}$ .

• **Diminuer de  $p\%$  une quantité**, c'est multiplier cette quantité par le nombre  $1 - \frac{p}{100}$ .

• Une quantité  $Q$  subit deux évolutions successives.

Le **coefficient multiplicateur global** est  $c = c_1 \times c_2$ .

Évolution de taux  $t_1$  Évolution de taux  $t_2$



Évolution de taux  $t$

• Une quantité  $Q_1$  a subi une évolution de taux  $t$ .

Le taux d'évolution  $t'$  de

l'évolution réciproque est tel que  $(1 + t) \times (1 + t') = 1$ .

Le **coefficient multiplicateur** de l'évolution réciproque est  $c' = \frac{1}{c}$ .

Évolution de taux  $t$



Évolution de taux  $t'$

**Exemple 1.** Dans un club sportif de 240 adhérents, 30 sont gauchers. La proportion de gauchers est égale à  $\frac{30}{240}$ .

$$\text{Or, } \frac{30}{240} = 0,125 = \frac{12,5}{100}.$$

Il y a donc 12,5 % de gauchers dans ce club de sports.

**Exemple 2.** Dans ce même club, 62,5 % des adhérents sont des hommes.

Puisque  $62,5\% \times 240 = \frac{62,5}{100} \times 240 = 150$ , ce club est formé de 150 hommes et de 90 femmes.

**Exemple 3.** Un vélo est normalement vendu 112 €. Durant les soldes, son prix de vente est 84 €.

Le taux d'évolution est donné par :

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{84 - 112}{112} = -0,25 = -25\%.$$

Le prix de ce vélo a ainsi été diminué de 25 %.

**Exemple 4.** 150 clients entrent dans un cinéma un vendredi.

La fréquentation augmente de 20 % le samedi puis diminue de 15 % le dimanche. Les coefficients multiplicateurs associés à ces évolutions sont 1,2 et 0,85 ; donc le coefficient multiplicateur global est  $1,2 \times 0,85 = 1,02$ . Or,  $1,02 - 1 = 0,02 = 2\%$ , donc le nombre de clients a augmenté de 2 % entre le vendredi et le dimanche.

**Exemple 5.** Le nombre d'éléphants d'une réserve a augmenté de 12 % pour arriver à 420 individus.

Augmenter une quantité de 12 % signifie la multiplier par 1,12. Le coefficient

multiplicateur de l'évolution réciproque est  $\frac{1}{1,12}$  donc le nombre initial d'éléphants est égal à  $420 \times \frac{1}{1,12} = 375$ .

## Statistiques

On considère la série statistique donnée par le tableau ci-contre.

• On note  $N$  l'effectif total :  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ .

• La **moyenne pondérée** de cette série est le nombre, noté  $\bar{x}$ , défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots + n_p \times x_p}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i \times x_i.$$

• La **variance** de cette série statistique est le nombre positif, noté  $V$ , défini par :

$$V = \frac{1}{N} \left( n_1 \times (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 \times (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p \times (x_p - \bar{x})^2 \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i \times (x_i - \bar{x})^2$$

• L'**écart-type** de cette série statistique est le réel positif, noté  $\sigma$ , défini par  $\sigma = \sqrt{V}$ .

• La variance et l'écart-type permettent de mesurer la **dispersion** des valeurs autour de la moyenne.

• On considère une série statistique dont les valeurs sont **ordonnées par ordre croissant**.

La **médiane** partage la série en deux parties de même effectif.

Le **premier quartile**, noté  $Q_1$ , est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des valeurs soient inférieures ou égales à ce nombre  $Q_1$ .

Le **troisième quartile**, noté  $Q_3$ , est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des valeurs soient inférieures ou égales à ce nombre  $Q_3$ .

| Valeurs  | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_p$ |
|----------|-------|-------|-----|-------|
| Effectif | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_p$ |



## Calculs dans un repère

• Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. Le milieu de  $[AB]$  a pour coordonnées :

$$\left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

• Si le repère est orthonormé, alors la distance  $AB$  est égale à :

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

**Exemple 1.** Soit les points  $A(3; 2)$  et  $B(7; 4)$ .

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5 \text{ et } \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Donc le milieu de  $[AB]$  a pour coordonnées  $(5; 3)$ .

**Exemple 2.** Si le repère est orthonormé :

$$AB = \sqrt{(7 - 3)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$$

## Vecteurs du plan

•  $\vec{AB} = \vec{DC}$  si, et seulement si,  $ABCD$  est un parallélogramme (éventuellement aplati).

### Relation de Chasles

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points, on a :  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

• Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

•  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si, et seulement si,  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.

•  $A, B$  et  $C$  sont alignés si, et seulement si,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.

### Dans un repère

Le vecteur  $\vec{AB}$  a pour coordonnées  $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ .

Soit  $\vec{u}(a; b)$ ,  $\vec{v}(c; d)$  et  $k$  un nombre réel.

•  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $(a + c; b + d)$ .

•  $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $(ka; kb)$ .

•  $\vec{u} = \vec{v}$  si, et seulement si,  $(a; b) = (c; d)$ .

•  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si, et seulement si,  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  avec  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$ .

**Exemple 1.** Soit les points  $A(3; 2)$ ,  $B(7; 4)$ ,  $C(8; 3)$  et  $D(4; 1)$ .

Le vecteur  $\vec{AB}$  a pour coordonnées  $(7 - 3; 4 - 2)$  soit  $\vec{AB}(4; 2)$ . De même  $\vec{DC}(8 - 4; 3 - 1)$  d'où  $\vec{DC}(4; 2)$ .

Puisque leurs coordonnées sont égales, les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{DC}$  sont égaux. Comme  $\vec{AB} = \vec{DC}$  alors  $ABCD$  est un parallélogramme.

**Exemple 2** Soit  $\vec{u}(2; -3)$ ; alors le vecteur  $5\vec{u}$  a pour coordonnées  $(5 \times 2; 5 \times (-3))$ , soit  $5\vec{u}(10; -15)$ .

**Exemple 3** Les vecteurs  $\vec{u}(2; -3)$  et  $\vec{v}(-1; 1,5)$  sont colinéaires car  $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ .

**Exemple 4** Soit  $A(3; 2)$ ,  $B(7; 4)$  et  $E(1; 7)$ .

$\vec{AB}(4; 2)$  } donc  $\det(\vec{AB}, \vec{AE}) = 4 \times 5 - 2 \times (-2) = 20 + 4 = 24$ .  
 $\vec{AE}(-2; 5)$

Comme  $24 \neq 0$ , les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AE}$  ne sont pas colinéaires donc les points  $A, B$  et  $E$  ne sont pas alignés.

## Équations de droites

• Dans le plan muni d'un repère, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme  $y = mx + p$ , appelée **équation réduite**.

$m$  est le **coefficient directeur** ou **pente** de la droite,  $p$  est l'**ordonnée à l'origine**.

• Les droites parallèles à l'axe des ordonnées ont une équation de la forme  $x = c$ .

• Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan avec  $x_A \neq x_B$ .

Le coefficient directeur de la droite  $(AB)$  est :  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .

• Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont **parallèles** entre elles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

• Toute droite admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ , appelée **équation cartésienne**.

Un **vecteur directeur** est le vecteur de coordonnées  $(-b; a)$ .

• Soit  $d$  la droite passant par un point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . Un point  $M$  appartient à  $d$  si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.

Ceci qui équivaut à  $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$ .

**Exemple 1.** Soit les points  $A(2; -1)$  et  $B(3; 4)$

La pente de la droite  $(AB)$  est  $m = \frac{4 - (-1)}{3 - 2} = 5$ , donc une

équation de  $(AB)$  est de la forme  $y = 5x + p$ .

Le point  $A(2; -1)$  appartient à la droite  $(AB)$ , donc ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite :

$$-1 = 5 \times 2 + p, \text{ soit } p = -1 - 10, \text{ soit } p = -11.$$

La droite  $(AB)$  a pour équation :  $y = 5x - 11$ .

**Exemple 2.** Toute droite parallèle à la droite  $(AB)$  précédente a un coefficient directeur égal à 5.

**Exemple 3.**  $3x + 2y - 1 = 0$  est une équation cartésienne d'une droite ; un vecteur directeur est le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(-2; 3)$ .

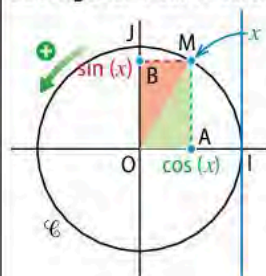
**Exemple 4.**  $M(x; y)$  appartient à la droite  $(AB)$  si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires, ce qui équivaut à  $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$ .

Or,  $\vec{AM}(x - 2; y + 1)$  et  $\vec{AB}(1; 5)$  donc une équation de la droite  $(AB)$  est  $5(x - 2) - 1(y + 1) = 0$  soit  $5x - y - 11 = 0$ .



## Trigonométrie

• Le **radian** est la mesure de l'angle  $\widehat{IOM}$  interceptant un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.



• Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel  $x$ , on appelle **cosinus** du réel  $x$ , l'abscisse du point M, et **sinus** du réel  $x$ , l'ordonnée de M.

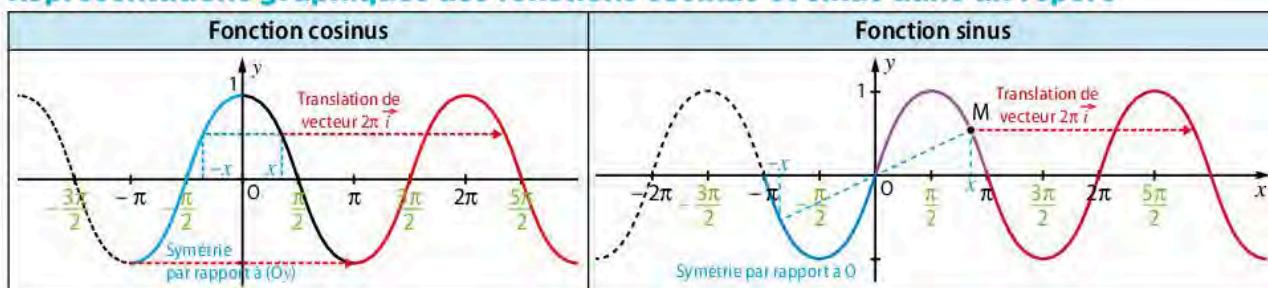
• Pour tout réel  $x$ ,  
 $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$   
 $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

### Cosinus et sinus d'angles remarquables

| $x$ en degrés  | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      |
|----------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $x$ en radians | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\cos(x)$      | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\sin(x)$      | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |

• Pour tout réel  $x$ ,  
 $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$   
 $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$  et  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ .

## Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus dans un repère



## Produit scalaire dans le plan

• Soit  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$  des vecteurs non nuls.

Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par :

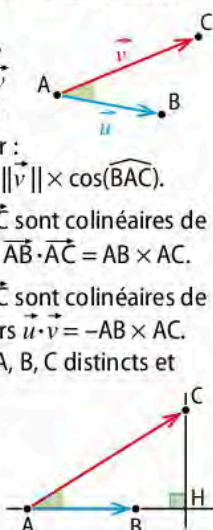
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC}).$$

• Lorsque  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires de même sens, alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC$ .

• Lorsque  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires de sens contraire, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AC$ .

• Soit trois points A, B, C distincts et H le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$



### Propriétés

Pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et tout réel  $k$  :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

### Expression analytique dans un repère orthonormé

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de coordonnées respectives  $(x; y)$  et  $(x'; y')$  dans une base orthonormée. On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , sont **orthogonaux** si, et seulement si,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

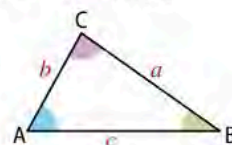
• Deux droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires** si, et seulement si,  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ .

• Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

### Formule d'Al Kashi

Pour tout triangle ABC,  
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$ .

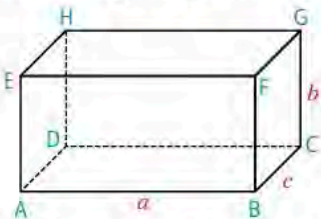
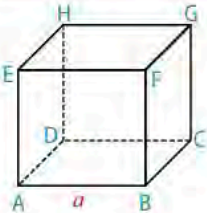


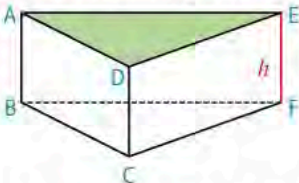
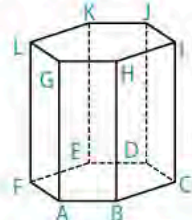
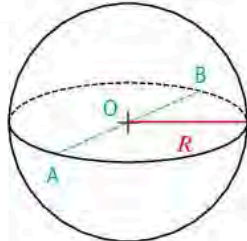
## Droites et cercles dans le plan

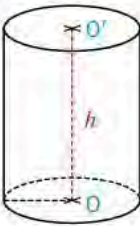
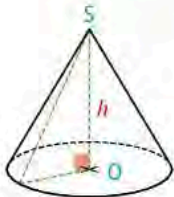
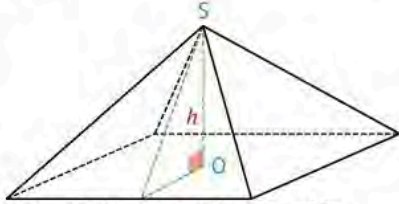
| Droites et vecteurs normaux                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Cercles                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Un <b>vecteur normal</b> à une droite <math>d</math> est un vecteur orthogonal à un vecteur directeur de <math>d</math> donc à tout vecteur directeur de <math>d</math>.</li> <li>• La <b>droite</b> passant par A et de vecteur normal <math>\vec{n}</math> est l'ensemble des points M tels que <math>\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0</math>.</li> <li>• Une droite d'équation cartésienne <math>ax + by + c = 0</math> a pour vecteur normal le vecteur <math>\vec{n}</math> de coordonnées <math>(a; b)</math>.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Le <b>cercle</b> de centre A et de rayon <math>r</math> est l'ensemble des points M tels que <math>AM = r</math>.</li> <li>• Une équation du cercle de centre A(<math>x_A; y_A</math>) et de rayon <math>r</math> est : <math>(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2</math>.</li> <li>• Le <b>cercle de diamètre</b> [AB] est l'ensemble des points M tels que <math>\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0</math>.</li> </ul> |



## Les solides usuels

| Pavé droit ou parallélépipède rectangle                                                                                                                                                                                                                                                     | Cube                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Un <b>pavé droit</b> a 6 faces rectangulaires, 8 sommets et 12 arêtes.</p>  <p>A est un sommet, [CG] est une arête, ABCD est une face.</p> <p><b>Volume :</b> <math>V = a \times b \times c</math>.</p> | <p>Un <b>cube</b> est un pavé droit particulier : toutes les faces sont des carrés, toutes les arêtes ont la même longueur.</p>  <p><b>Volume :</b> <math>V = a^3</math>.</p> |

| Prisme droit                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Sphère                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Un <b>prisme droit</b> a deux bases qui sont des polygones superposables situés dans des plans parallèles. Les autres faces sont des rectangles.</p> <div> <div> <p>Prisme droit à base triangulaire</p>  <p>Les bases sont ADE et BCF.</p> </div> <div> <p>Prisme droit à base hexagonale</p>  <p>Les bases sont ABCDEF et GHIJKL.</p> </div> </div> <p><b>Volume :</b> <math>V = (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}</math>.</p> | <p>La <b>sphère</b> de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que <math>OM = R</math>.</p>  <p><b>Volume :</b> <math>V = \frac{4}{3} \pi R^3</math>.</p> |

| Cylindre de révolution                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Cône de révolution                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Pyramide                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Un <b>cylindre de révolution</b> est un solide délimité par deux disques superposables et parallèles, appelés les bases, et un rectangle « enroulé » autour de ses bases. <math>h = OO'</math> est la hauteur du cylindre.</p>  <p><b>Volume :</b><br/> <math>V = (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}</math><br/> <math>V = \pi R^2 h</math><br/> R est le rayon de la base<br/> h est la hauteur du cylindre.</p> | <p>La base du cône est le disque de centre O. <math>h = SO</math> est la hauteur du cône.</p>  <p><b>Volume :</b> <math>V = \frac{1}{3} (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}</math><br/> <b>Volume Cône :</b> <math>V = \frac{1}{3} \pi R^2 h</math><br/> R est le rayon de la base<br/> h est la hauteur du cône.</p> | <p>Une <b>pyramide</b> a pour base un polygone et pour faces latérales des triangles qui ont un sommet commun, le sommet S de la pyramide. <math>h = SO</math> est la hauteur de la pyramide.</p>  <p><b>Volume :</b> <math>V = \frac{1}{3} (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}</math></p> |

Changements d'unités :  $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$  ;  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litre} = 100 \text{ cl}$ .



## Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés **éléments**.

Lorsque  $a$  est un élément de  $A$ , on dit que  $a$  **appartient** à  $A$  et on note  $a \in A$ .

L'ensemble vide ne comporte aucun élément. On le note  $\emptyset$ .

### EXEMPLES

- L'ensemble des réels strictement positifs est l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
- L'ensemble des réels négatifs ou nuls est l'intervalle  $]-\infty ; 0]$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles.

- $A$  est **inclus** dans  $B$  lorsque tous les éléments de  $A$  appartiennent à  $B$ . On note  $A \subset B$ .
- L'**intersection** de  $A$  et de  $B$  est l'ensemble, noté  $A \cap B$ , des éléments communs à  $A$  et à  $B$ .
- La **réunion** de  $A$  et de  $B$  est l'ensemble, noté  $A \cup B$ , des éléments qui appartiennent à  $A$ , à  $B$  ou aux deux à la fois.
- Lorsque  $A$  est inclus dans  $B$ , le **complémentaire** de  $A$  dans  $B$  est l'ensemble, noté  $\bar{A}$ , des éléments de  $B$  qui n'appartiennent pas à  $A$ . On le note aussi  $B \setminus A$ .
- Un **couple** de deux éléments  $a$  et  $b$  de  $A$  est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier. On le note :  $(a ; b)$ .
- Le produit cartésien de  $A$  et  $B$ , noté  $A \times B$ , est l'ensemble des couples  $(a, b)$ , où  $a$  appartient à  $A$  et  $b$  appartient à  $B$ .

### EXEMPLES

- Tous les entiers naturels sont des nombres réels :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ .
- On note  $E$  l'ensemble des élèves d'un lycée,  $A$  l'ensemble des élèves bruns et  $B$  l'ensemble des élèves qui ont les yeux verts.
  - L'ensemble  $A \cap B$  est l'ensemble des élèves bruns aux yeux verts.
  - L'ensemble  $A \cup B$  contient les élèves bruns, les élèves qui ont les yeux verts et les élèves bruns aux yeux verts.
  - Dans  $E$ , l'ensemble  $\bar{A}$  est l'ensemble des élèves qui ne sont pas bruns.
- Le couple  $(1 ; 2)$  est différent du couple  $(2 ; 1)$ .
- $\mathbb{R} \times \{0\}$  est l'ensemble des couples de réels de la forme  $(x ; 0)$ .
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , noté aussi  $\mathbb{R}^2$ , est l'ensemble des couples de nombres réels.

## Connecteurs logiques – Quantificateurs

Soit  $P$  et  $Q$  deux propositions.

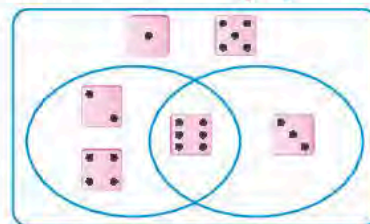
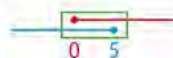
- La proposition  $(P \text{ et } Q)$  est vraie quand les propositions  $P$  et  $Q$  sont vraies toutes les deux.
- La proposition  $(P \text{ ou } Q)$  est vraie quand l'une au moins des propositions  $P$  et  $Q$  est vraie.

### EXEMPLES

- Soit  $x$  un réel. «  $x$  est positif **ET** inférieur ou égal à 5 » signifie que «  $x$  est à la fois positif et inférieur ou égal à 5 », c'est-à-dire qu'il est compris entre 0 et 5.

Les réels positifs et inférieurs ou égaux à 5 appartiennent à l'intersection des intervalles  $[0 ; +\infty[$  et  $]-\infty ; 5]$ .

- Un joueur lance un dé à six faces. Il gagne lorsqu'il obtient « un nombre pair **OU** un multiple de 3 ». Cela signifie que le joueur gagne lorsqu'il obtient « soit un nombre pair, soit un multiple de 3, **soit** un nombre pair multiple de 3 ». Le joueur gagne lorsqu'il obtient « 2 », « 4 », « 6 » ou « 3 ». Il s'agit des nombres appartenant à la réunion des ensembles  $\{2 ; 4 ; 6\}$  et  $\{3 ; 6\}$ , soit  $\{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$ .



Les expressions « **Quel que soit** » ou « **Il existe** » sont des quantificateurs : ils permettent de préciser quels sont les objets que l'on considère dans un énoncé.

« **Quel que soit** » signifie « **Pour tout** », « **Pour n'importe quel** », « **Tous les** ».

« **Il existe** » signifie « **il existe au moins** ».

### EXEMPLES

- « **Quel que soit** le réel  $x$ ,  $x^2 \geq 0$  » signifie que **tous** les réels ont un carré positif. On écrit aussi : « **Pour tout** réel  $x$ ,  $x^2 \geq 0$  ». « **Quel que soit** le réel  $x$ ,  $x^2 \geq 0$  » est une proposition **universelle**.
- « **Il existe** un nombre entier supérieur à 2 » signifie qu'il **existe au moins** un nombre entier supérieur à 2. « **Il existe** un nombre entier supérieur à 2 » est une proposition **existentielle**.



## Négation d'une proposition

Une proposition **P** peut être *vraie* ou *fausse*. La **négation** d'une proposition **P** est une proposition (notée **non P**) *fausse* lorsque **P** est *vraie*, et *vraie* lorsque **P** est *fausse*.

### EXEMPLE

- La **négation** de la proposition : « **15 est divisible par 3** » est : « **15 n'est pas divisible par 3** ».
- La proposition « 15 est divisible par 3 » est *vraie*. Sa négation est *fausse*.

**Négation d'une proposition contenant les connecteurs « et », « ou ».**

Soit la proposition « **cet élève est brun et a les yeux verts** ».

Bob, ci-contre, est brun et a les yeux verts.

Pour Ali, Yann et Paco, il est faux de dire qu'ils sont bruns et ont les yeux verts :

Ali est brun mais n'a pas les yeux verts, Yann a les yeux verts mais n'est pas brun et Paco n'est pas brun et n'a pas les yeux verts.



Bob



Ali



Yann



Paco

La négation de la proposition : « **cet élève est brun et a des yeux verts** »  
est : « **cet élève n'est pas brun ou n'a pas les yeux verts** ».

La négation de la proposition (P et Q) est (non P ou non Q).

La négation de la proposition (P ou Q) est (non P et non Q).

**Négation d'un énoncé contenant les quantificateurs « quel que soit », « il existe ».**

Un sac contient des jetons. La proposition : « **Quel que soit** le jeton du sac, ce jeton est rouge » signifie que tous les jetons du sac sont rouges.

La négation de la proposition : « **Quel que soit le jeton du sac, ce jeton est rouge** »  
est : « **Il existe un jeton du sac qui n'est pas rouge** ».

Quand on écrit la négation d'un énoncé comportant des quantificateurs, on remplace l'expression « Quel que soit » par « Il existe » et on remplace l'expression « Il existe » par « Quel que soit ».

## Implication – Réciproque – Équivalence

### Implication

Une **implication** est une proposition de la forme « si **P**, alors **Q** ».

Une implication « si **P**, alors **Q** » est *vraie* lorsque l'hypothèse « **P** est *vraie* » entraîne la conclusion « **Q** est *vraie* ».

### EXEMPLES

- « Si **une personne est française**, alors **cette personne est européenne** » est une implication.

**P**

**Q**

Cette implication est *vraie*.

En effet, si l'on sait qu'une personne est française, on peut en déduire qu'elle est européenne.

- L'implication : « **Si une personne est européenne, alors cette personne est française** » est *fausse*.

En effet, le fait qu'une personne soit européenne n'entraîne pas obligatoirement qu'elle soit française.

Prenons le cas d'une personne espagnole : cette personne est européenne mais n'est pas française.



On peut montrer que l'implication « si **P**, alors **Q** » est *fausse*, en cherchant un cas pour lequel la proposition **P** est *vraie* et la proposition **Q** est *fausse*.

### VOCABULAIRE

On considère les propositions **P** et **Q** du premier exemple. Il suffit de savoir qu'une personne est française pour pouvoir dire qu'elle est européenne : on dit que **P** est une **condition suffisante** pour **Q**.

Une personne ne peut pas être française, si elle n'est pas européenne : **il faut** qu'une personne soit européenne pour qu'elle puisse être française. On dit que **Q** est une **condition nécessaire** pour **P**.



## Réciproque

La **réciproque** de l'implication « si **P**, alors **Q** » est l'implication « si **Q**, alors **P** ».  
La réciproque d'une implication *vraie* peut être *vraie* ou *fausse*.

### EXEMPLE

« Si une personne est française, alors cette personne est européenne » est une implication.

La réciproque de « Si une personne est française, alors cette personne est européenne »  
est : « Si cette personne est européenne, alors une personne est française »

Ici, la première proposition est *vraie*, sa réciproque est *fausse*.

## Équivalence

Lorsque les propositions « si **P**, alors **Q** » et « si **Q**, alors **P** » sont toutes les deux *vraies*, on dit que les propositions **P** et **Q** sont **équivalentes**.

### EXEMPLES

- Les propositions **P** et **Q** de l'exemple précédent ne sont pas équivalentes.
- Soit  $x$  un réel. L'implication : « Si  $4x = 12$ , alors  $x = 3$  » et sa réciproque : « Si  $x = 3$ , alors  $4x = 12$  » sont vraies. Les propositions «  $4x = 12$  » et «  $x = 3$  » sont donc équivalentes.
- On peut écrire «  $4x = 12$  si, et seulement si,  $x = 3$  » ou «  $4x = 12$  équivaut à  $x = 3$  » ou «  $4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$  ».

## Contraposée

• La **contraposée** de l'implication « si **P**, alors **Q** » est l'implication « si **non Q**, alors **non P** ».  
Si une implication est *vraie*, sa contraposée est *vraie* ; si une implication est *fausse*, sa contraposée est *fausse*.

### EXEMPLES

- La contraposée de « Si une personne est française, alors cette personne est européenne »  
est : « Si une personne n'est pas européenne, alors cette personne n'est pas française ».

La première implication étant *vraie*, sa contraposée est également *vraie*.

- Soit  $x$  un réel. La contraposée de « Si  $x^3 = 0,5$ , alors  $x < 1$  » est : « Si  $x \geq 1$ , alors  $x^3 \neq 0,5$ . »  
La contraposée est *vraie*. En effet, si  $x \geq 1$  alors  $x^3 \geq 1$ , la fonction cube est croissante sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $x^3$  est différent de 0,5.  
Puisque la contraposée est *vraie*, l'implication « si  $x < 1$  alors  $x^3 = 0,5$  » est *vraie*.

## Raisonnements

### Raisonnement à l'aide d'un exemple ou d'un contre-exemple

#### 1. Utilisation d'un exemple

Un **exemple** permet de montrer qu'une proposition existentielle est *vraie*.

### EXEMPLE

On considère la proposition **P** : « Il existe un nombre réel positif plus grand que son carré. »

Pour montrer que **P est vraie**, il suffit de trouver un **exemple**.

$0,5^2 = 0,25$  : ainsi, le réel 0,5 est plus grand que son carré 0,25.

Il existe bien (au moins) un nombre réel positif plus grand que son carré : la proposition **P** est *vraie*.



## 2. Utilisation d'un contre-exemple

Un **contre-exemple** est un exemple qui met en défaut une proposition universelle : il permet de montrer qu'une proposition n'est pas toujours vraie.

### EXEMPLE

On considère la proposition **P** : « Quel que soit l'entier naturel  $n$ ,  $n^2 + 4$  est pair. »

Pour montrer que **P est fausse**, il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire un entier naturel  $n$  tel que  $n^2 + 4$  n'est pas pair.

Pour  $n = 1$ , on a  $n^2 + 4 = 5$ , et 5 est impair.

Il existe bien un entier naturel  $n$  tel que  $n^2 + 4$  n'est pas pair : la proposition **P** est *fausse*.

### REMARQUES

(1) On a montré que la proposition **P** est *fausse* en montrant que sa négation est *vraie*.

(2) Un exemple ne permet pas de montrer qu'une proposition universelle est vraie.

## Raisonnement à l'aide de la contraposée

Lorsqu'on sait qu'une implication : « Si **P**, alors **Q** » est *vraie*, on peut utiliser sa contraposée : « Si *non* **Q**, alors *non* **P** », qui est également *vraie*.

### EXEMPLE

Pour montrer que : « Si  $n$  est un entier tel que  $n^2$  est pair, alors  $n$  est pair », on utilise la contraposée de l'implication *vraie* : « Si  $n$  est un entier impair, alors  $n^2$  est impair ».

En effet, si  $n$  est un entier impair, il s'écrit  $n = 2k + 1$ , avec  $k$  entier. Alors :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2K + 1, \text{ avec } K \text{ entier, ce qui prouve que } n^2 \text{ est impair.}$$

## Raisonnement par l'absurde

Montrer qu'une proposition **P** est *vraie* en **raisonnant par l'absurde** consiste à supposer que **P** est *fausse* et à montrer qu'avec cette hypothèse, on aboutit à une contradiction.

### EXEMPLE

Quand on tape  $\sqrt{2}$  sur une calculatrice, on obtient : 1,414213562.

On veut montrer la proposition **P** : «  $\sqrt{2} \neq 1,414213562$  ».

On raisonne par l'absurde en supposant que  $\sqrt{2}$  est égal à 1,414213562.

Alors on devrait avoir  $(\sqrt{2})^2 = (1,414213562)^2$ . Or,  $(\sqrt{2})^2 = 2$  et  $(1,414213562)^2$  est un nombre décimal se terminant par 4 (puisque  $2^2 = 4$ ) : on aboutit à une contradiction. Donc  $\sqrt{2}$  n'est pas égal à 1,414213562.

|                       |
|-----------------------|
| $\sqrt{2}$            |
| .....1.414213562..... |

## Raisonnement par disjonction des cas

Montrer qu'une proposition est *vraie* en **raisonnant par disjonction des cas** consiste à montrer qu'elle est *vraie* dans un nombre fini de cas, ces cas recouvrant tous les cas possibles.

### EXEMPLE

On veut déterminer tous les couples  $(x ; y)$  d'entiers naturels tels que  $x^2 + y^2 = 1$ .

On opère par disjonction des cas selon les valeurs de  $x$ . Puisque tout entier naturel est, soit égal à 0, soit égal à 1, soit supérieur ou égal à 2, on considère trois cas :

- Si  $x = 0$ , alors  $x^2 + y^2 = y^2$ . Or,  $x^2 + y^2 = 1$  équivaut à  $y^2 = 1$ , soit  $y = 1$ , car  $y$  est un entier naturel. Donc le couple  $(0 ; 1)$  est solution.

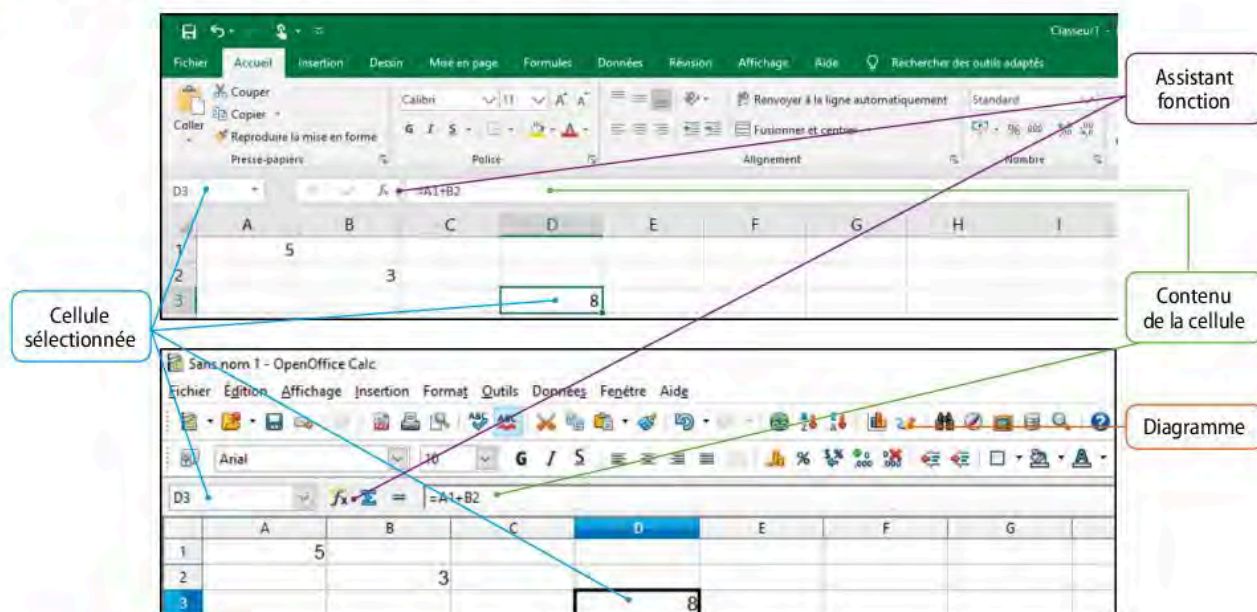
- Si  $x = 1$ , alors  $x^2 + y^2 = 1 + y^2$ . Or,  $x^2 + y^2 = 1$  équivaut à  $1 + y^2 = 1$ , soit  $y^2 = 0$ , soit  $y = 0$ . Ainsi le couple  $(1 ; 0)$  est solution.

- Si  $x \geq 2$ , alors  $x^2 \geq 4$ , et  $x^2 + y^2 \geq 4 + y^2 \geq 4$ , et donc  $x^2 + y^2$  ne peut être égal à 1. Il n'y a pas de couple  $(x ; y)$  solution dans ce cas.

On a examiné tous les cas possibles, donc les couples solutions sont  $(1 ; 0)$  et  $(0 ; 1)$ .



Cet aide-mémoire pour l'utilisation d'un tableur fait référence à deux tableurs d'usage courant : le tableur **Excel de Microsoft** et le tableur de la suite **OpenOffice**.



## Outils et menus les plus utilisés

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |            |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|------------|
| Pointeur                          | <p>Actionné par la souris, il peut prendre plusieurs aspects :</p> <ul style="list-style-type: none"><li>– flèche  (permet de déplacer le contenu d'une cellule vers une autre cellule) ;</li><li>– croix noire  (permet de faire glisser une formule).</li></ul> <p>Pour sélectionner : Croix blanche  sur Excel, Flèche  sur OpenOffice.</p> |        |        |            |
| Repérage d'une cellule            | <b>D3</b> : lettre de la colonne et numéro de la ligne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |        |        |            |
| Écrire dans une cellule           | <ul style="list-style-type: none"><li>• Placer le pointeur dans la cellule. On peut écrire :<ul style="list-style-type: none"><li>– un texte, des mots, un calcul ;</li><li>– un calcul, précédé du signe = ;</li><li>– une formule de calcul, sans oublier le signe =.</li></ul></li><li>• Valider avec la touche <b>Entrée</b> du clavier ou passer à une autre cellule avec les flèches du clavier.</li><li>• Après validation, le résultat du calcul apparaît dans la cellule que l'on quitte.</li></ul> <table border="1" data-bbox="973 1300 1127 1404"><tr><td>Indice</td></tr><tr><td>=56+43</td></tr><tr><td>=4*A1+B3^2</td></tr></table>                                         | Indice | =56+43 | =4*A1+B3^2 |
| Indice                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |            |
| =56+43                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |            |
| =4*A1+B3^2                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |            |
| Sélectionner                      | <ul style="list-style-type: none"><li>• Pour sélectionner une cellule, cliquer sur la cellule.</li><li>• Pour sélectionner plusieurs cellules, les mettre en surbrillance en déplaçant la souris, bouton gauche appuyé, de la première à la dernière cellule.</li><li>• Pour sélectionner des cellules non contiguës, sélectionner la première zone, appuyer sur la touche <b>Ctrl</b>, puis se déplacer avec la souris jusqu'aux cellules suivantes et les sélectionner.</li></ul>                                                                                                                                                                                                        |        |        |            |
| Effacer une cellule ou une zone   | Sélectionner la cellule ou la zone de cellules (celle-ci se met en surbrillance), et cliquer sur la touche <b>Suppr</b> du clavier.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |        |        |            |
| Modifier le contenu d'une cellule | Pour changer tout le contenu de la cellule, cliquer dessus, puis taper le nouveau contenu.<br>Pour modifier le contenu, cliquer deux fois sur la cellule, puis faire les corrections nécessaires.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |        |        |            |
| Trier des données                 | Pour classer des données d'une zone, on la sélectionne. Dans le menu <b>Données</b> <b>Trier</b> (ou <b>Trier et filtrer</b> pour Excel 2007), on choisit la colonne dont on veut ranger les éléments, puis on sélectionne l'ordre croissant ou décroissant.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |        |        |            |



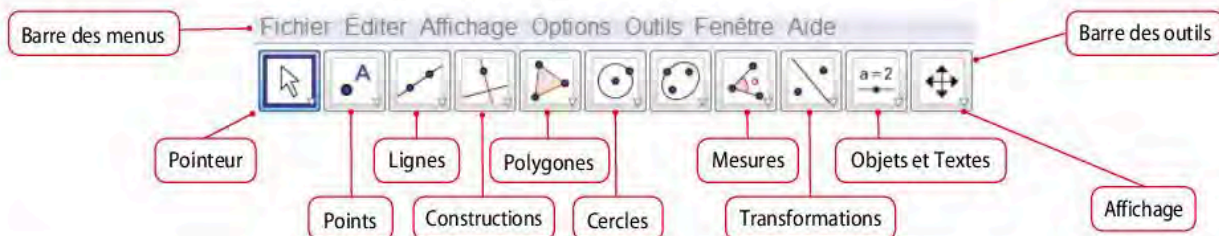
## Calculer avec un tableur

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Opérations élémentaires             | Les signes sont tapés au clavier : <b>+</b> , <b>-</b> , <b>*</b> (multiplié), <b>/</b> (divisé), <b>^</b> (exposant).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Choisir des cellules pour un calcul | Pour choisir les cellules sur lesquelles porte une fonction, on peut désigner :<br>– une zone de cellules consécutives, par exemple <b>B1:B12</b> ;<br>– des cellules non consécutives, par exemple <b>B4:B6;B9</b> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Choisir un nombre de décimales      | Pour choisir un nombre donné de décimales pour le résultat :<br>– <b>Excel</b> : Cliquer sur  ou  – <b>OpenOffice</b> : Cliquer sur l'une des icônes  ou                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Fonctions                           | On a accès aux fonctions en cliquant sur l'assistant fonction (icône  ou  ). En particulier, <b>SOMME()</b> , <b>MAX()</b> et <b>MIN()</b> donnent respectivement la somme, le plus grand élément et le plus petit élément des nombres figurant dans la zone de cellules indiquée entre parenthèses.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Fonctions logiques                  | <b>SI(C;a;b)</b> : C étant une condition portant sur la comparaison de deux nombres, si C est vraie, alors a s'affiche, sinon b s'affiche.<br><b>NB.SI(zone;critère)</b> : nombre de cellules d'une zone vérifiant un critère donné.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Fonctions liées aux statistiques    | <b>MOYENNE(Zone)</b> : calcule la moyenne des valeurs d'une zone de cellules.<br><b>MEDIANE(Zone)</b> : calcule la médiane des valeurs d'une zone de cellules.<br><b>QUARTILE(Zone;1)</b> : calcule le premier quartile des valeurs d'une zone.<br><b>QUARTILE(Zone;3)</b> : calcule le troisième quartile des valeurs d'une zone.<br><b>ALEA()</b> : nombre aléatoire de l'intervalle [0 ; 1[.<br><b>ALEA.ENTRE.BORNES(a;b)</b> : nombre aléatoire entier compris entre a et b.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Recopier                            | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>La poignée de recopie</b> : pour recopier une formule de façon incrémentée, on place le pointeur sur le coin inférieur droit de la cellule (une croix noire apparaît), puis on tire vers le bas (ou à droite) jusqu'à la fin de la zone de recopie en maintenant le bouton gauche de la souris enfoncé.</li> <li>• Créer une suite de nombres, à partir d'un nombre d'une cellule sélectionnée : <ul style="list-style-type: none"> <li>– <b>Excel</b> :  ou <b>Edition Remplir</b> ou <b>Edition Remplissage</b>, puis <b>Série</b>. On complète selon la suite voulue.</li> <li>– <b>OpenOffice</b> : sélectionner la zone où on crée la suite de nombres, choisir <b>Edition Remplir Série</b> et compléter.</li> </ul> </li> </ul> |

## Autres outils du tableur

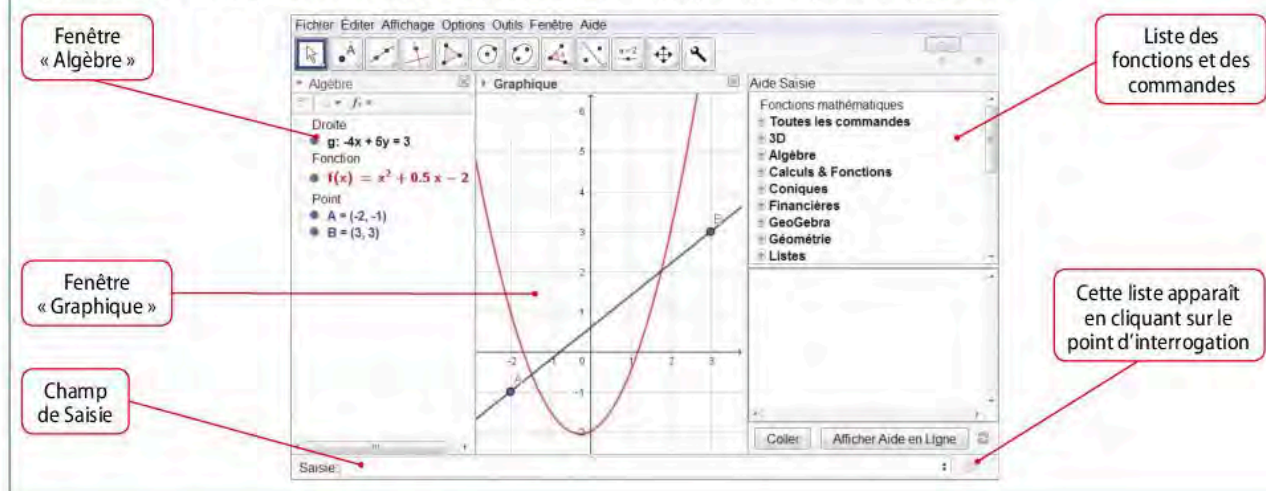
|                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Assistant graphique | On sélectionne la (ou les) séries de données que l'on veut représenter.<br>– <b>Excel</b> : dans le menu <b>Insertion Graphiques</b> , on choisit le type de graphique pour construire des diagrammes statistiques.<br>Pour représenter une fonction, choisir le type <b>Nuage de points</b> , puis <b>reliés par une courbe lissée</b> .<br>– <b>OpenOffice</b> : on clique sur <b>Diagramme</b>  ou <b>Insertion Diagramme</b> pour construire des diagrammes statistiques.<br>Pour représenter une fonction, choisir <b>XY Points et lignes</b> , avec <b>ligne lisse</b> .                                                                                                                                                                                                                                 |
| Référence absolue   | Une référence de cellule de la forme <b>A1, B6, C3, D12, ...</b> est une <b>référence relative</b> : lorsqu'on la recopie, cette référence change.<br>• Quand on recopie vers le bas une formule contenant la référence <b>A1</b> , celle-ci se recopie en <b>A2, A3, ...</b> . Pour fixer le numéro de ligne <b>1</b> de la référence <b>A1</b> , on écrit <b>A\$1</b> : <b>A\$1 est une référence absolue pour le numéro de ligne</b> .<br>• Quand on recopie vers la droite une formule contenant la référence <b>A1</b> , celle-ci se recopie en <b>B1, C1, ...</b> . Pour fixer le numéro de colonne <b>A</b> de la référence <b>A1</b> , on écrit <b>\$A1</b> : <b>\$A1 est une référence absolue pour le numéro de colonne</b> .<br>Quand on veut fixer le numéro de ligne et le numéro de colonne de la référence <b>A1</b> , on écrit <b>\$A\$1</b> : c'est une <b>référence absolue</b> . |





## Présentation

En plus de la barre des menus et de la barre des outils, l'écran est partagé en plusieurs parties :



## Menu déroulant de chaque icône

En cliquant sur le petit triangle blanc situé en bas à droite d'une icône, on obtient le menu déroulant de cette icône. Les différents outils contenus dans cette icône apparaissent.



## Utiliser les aides du logiciel

En approchant la souris de l'icône d'un outil, une bulle d'aide indique comment utiliser l'outil.

L'aide de l'outil « **Parallèle** » indique qu'à partir d'un **clic gauche** sur un point (ou sur l'écran) suivi d'un clic sur une droite, la droite parallèle à la droite cliquée et passant par le point cliqué se construit.



## Activer ou désactiver un outil

- Pour **activer** un outil, on fait afficher le menu déroulant puis, en maintenant le bouton de la souris enfoncé, on sélectionne l'outil souhaité.
- Pour **désactiver** un outil, il suffit d'activer l'outil . Dans la figure ci-dessus, l'outil Point est sélectionné. En cliquant n'importe où dans la page blanche, on construit un point auquel le logiciel donne immédiatement un nom ; en faisant un clic droit sur ce point, on fait afficher le **menu contextuel** et on peut alors renommer le point, modifier ses propriétés...



## Le menu contextuel

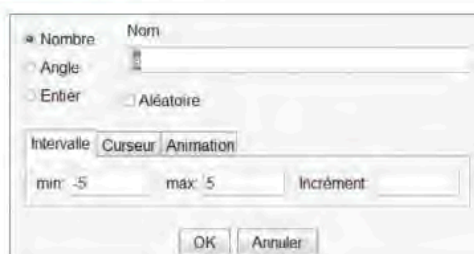
Tous les objets créés possèdent un menu contextuel : on l'ouvre par un **clik droit** sur l'objet, soit dans la fenêtre graphique, soit dans la fenêtre algèbre.

- On peut **afficher ou masquer** l'objet.
- On peut **afficher ou masquer** son nom.
- On peut activer la **trace** de l'objet : il laisse une trace en se déplaçant.
- On peut **supprimer** l'objet avec **Effacer**.
- On peut modifier la taille, la couleur, etc. de l'objet avec **Propriétés**.



## Construire un curseur

- Le curseur permet de faire varier un nombre décimal, un angle ou un entier.
- Pour créer un curseur, sélectionner l'outil curseur  de la barre des outils, puis cliquer sur le graphique.
- Dans la fenêtre qui s'ouvre, on peut définir les paramètres de ce curseur. L'incrément est le pas selon lequel augmente la variable de min à max.



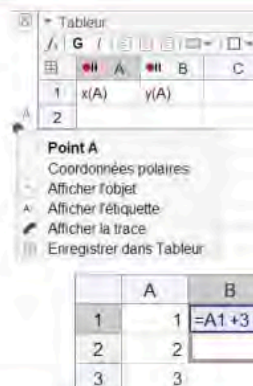
## Utilisation du tableur de GeoGebra

- Le menu **Affichage** permet d'ajouter des fenêtres à la page principale.

Sélectionner  Tableur dans ce menu pour afficher le tableur.

- Quand le tableur est affiché, le menu contextuel des points propose  Enregistrer dans Tableur. Si le point A est mobile et « enregistré dans le tableur », ses abscisses x(A) et ses ordonnées y(A) successives sont enregistrées et elles apparaissent dans les colonnes A et B du tableau.

- Comme dans un tableur « classique », on peut effectuer des calculs faisant appel aux résultats reportés dans d'autres cellules et recopier la formule vers le bas ou vers la droite.

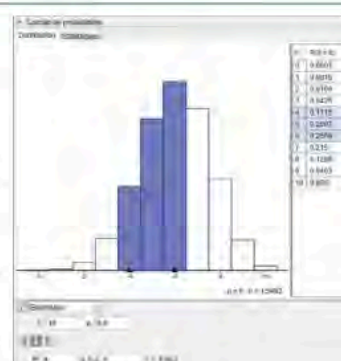


## Utiliser la fenêtre Calculs de probabilités

- Pour calculer une probabilité liée à la loi binomiale, on ouvre

le menu **Affichage**, puis la fenêtre  Calculs de probabilités.

- Pour calculer la probabilité  $P(3 \leq X \leq 9)$ , où  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = 0,4$ , on choisit l'onglet **Distribution**, puis **Binomiale** dans le menu déroulant et on saisit les valeurs de  $n$  et  $p$ , puis les bornes de l'intervalle  $[3 ; 9]$ .
- Pour calculer la probabilité  $P(3 \leq X)$ , on peut utiliser l'égalité :  $P(3 \leq X) = P(3 \leq X \leq 20)$  ou utiliser le bouton  puis compléter la borne inférieure de l'intervalle  $[3 ; 20]$ .
- De même pour le calcul de  $P(X \leq 9)$ , on peut utiliser l'égalité  $P(X \leq 9) = P(0 \leq X \leq 9)$  ou utiliser le bouton  puis compléter la fenêtre par la borne supérieure de l'intervalle  $[0 ; 9]$ .





## Calcul formel avec GeoGebra

- On ajoute une fenêtre de calcul formel en sélectionnant  Calcul formel dans le menu **Affichage**.

De nouvelles icônes apparaissent         .

- Soit on écrit la commande désirée (capture d'écran ci-contre) dans la ligne de saisie numérotée, soit on saisit une expression puis on clique sur l'icône de la commande à réaliser sur cette expression.

- Entrer  $(x-1)(x+2)$  puis cliquer sur  pour **développer** l'expression.
- Entrer  $x^2-3x+2$  puis cliquer sur  pour **factoriser** l'expression.
- Entrer  $x^2-5x-3=0$  puis cliquer sur  pour **résoudre** l'équation.
- Entrer  $3x^2+2x \leq 0$  puis cliquer sur  pour **résoudre** l'inéquation.

| Calcul formel |                                                                                                       |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1             | Développer $(x-1)(x+2)$<br>$= x^2 + x - 2$                                                            |
| 2             | Factoriser $(x^2-3x+2)$<br>$= (x-2)(x-1)$                                                             |
| 3             | Résoudre $(x^2-5x-3=0)$<br>$= \left\{ x = \frac{-\sqrt{37}+5}{2}, x = \frac{\sqrt{37}+5}{2} \right\}$ |
| 4             | Résoudre $(3x^2+2x \leq 0)$<br>$= \left\{ -\frac{2}{3} \leq x \leq 0 \right\}$                        |

## Commandes utiles en classe de Première

|                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Arrondi</b>                                                                                                    | Cette commande, présente dans le menu <b>Options</b> , permet de préciser le nombre de décimales ou de chiffres significatifs affichés à l'écran.                                                                                                               |
| <b>Résoudre un système d'équations</b>                                                                            | Pour résoudre le système $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ , entrerez <b>Résoudre</b> $(\{2x-y=1, x+3y=4\}, \{x, y\})$                                                                                                                       |
| <b>Saisir l'expression d'une fonction</b>                                                                         | Pour la fonction $f$ telle que $f(x) = x^2$ , entrer <b>f(x) = x^2</b> dans le <b>champ de saisie</b> .<br>Pour la fonction $g$ définie sur $[1; 5]$ par $g(x) = x^4$ , entrer <b>g(x) = Fonction</b> $[x^4, 1, 5]$ .                                           |
| <b>Calculer une dérivée</b>    | Pour dériver la fonction $f: x \mapsto 3x^5$ : <b>Dérivée</b> $[3x^5]$ .                                                                                                                                                                                        |
| <b>Calculer une primitive</b>  | Pour obtenir l'ensemble des primitives de $f: x \mapsto x^3$ : <b>Intégrale</b> $[x^3, x]$ .                                                                                                                                                                    |
| <b>Calculer une intégrale</b>  | Pour calculer $\int_0^2 t^3 dt$ : <b>Intégrale</b> $[t^3, t, 0, 2]$ .                                                                                                                                                                                           |
| <b>Résoudre une équation différentielle</b>                                                                       | Pour résoudre l'équation différentielle $y' = 2y + 3$ , entrer <b>RésolEquaDiff</b> $(2*y+3)$ .                                                                                                                                                                 |
| <b>Calculer la somme des termes d'une liste de nombres</b>                                                        | La commande <b>Somme</b> $[Séquence[g(k), k, a, b]]$ où $g$ est une fonction et $a$ et $b$ des entiers, calcule la somme $g(a) + g(a+1) + \dots + g(b)$ .                                                                                                       |
| <b>Construire la tangente à une courbe</b>                                                                        | La commande <b>Tangente</b> $[A, f]$ permet de tracer la tangente en $A$ à la courbe représentative de la fonction $f$ .                                                                                                                                        |
| <b>Faire afficher le coefficient directeur d'une droite</b>                                                       | Pour faire afficher le coefficient directeur d'une droite $d$ , on saisit <b>Pente</b> $[d]$                                                                                                                                                                    |
| <b>Créer un polygone régulier</b>                                                                                 | Dans le menu de l'icône  , sélectionner <b>Polygone régulier</b> . Par un <b>clic gauche</b> , choisir ou créer deux points comme sommets, puis indiquer le nombre de côtés. |



# La fenêtre graphique 3D de GeoGebra

## Paramètres de la représentation

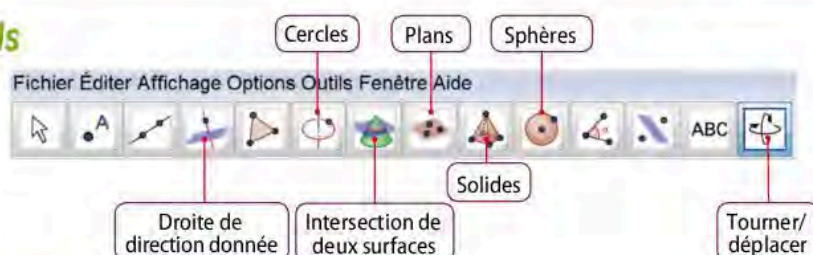
• Un clic droit sur le graphique 3D ouvre une boîte de dialogue. On peut alors faire afficher ou non les axes, le plan ( $xOy$ ), la grille sur ce plan.

• Par défaut, les objets géométriques sont représentés à l'intérieur d'un pavé droit dont les arêtes sont tracées. Ce pavé est appelé *espace restreint*. En sélectionnant **Graphique** dans la boîte de dialogue précédente, on ouvre une nouvelle boîte de dialogue. On peut alors choisir d'utiliser ou non l'espace restreint, de l'afficher ou non. On peut également modifier la taille de l'espace restreint.

|                                          |                                   |
|------------------------------------------|-----------------------------------|
| Espace Restreint                         |                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/>      | Utiliser Espace Restreint         |
| <input checked="" type="checkbox"/>      | Afficher Espace Restreint         |
| Taille Espace Restreint                  |                                   |
| <input type="radio"/>                    | Petite                            |
| <input checked="" type="radio"/>         | Moyenne                           |
| <input type="radio"/>                    | Large                             |
| Basique axeX axeY axeZ Grille Projection |                                   |
| <input type="radio"/>                    | Orthogonale                       |
| <input type="radio"/>                    | Perspective: Distance à la scène: |
| <input type="radio"/>                    | Lunettes: Distance entre yeux:    |
| <input checked="" type="radio"/>         | Oblique: Angle: 30 Facteur: 0.5   |

• Pour obtenir une représentation des objets en perspective cavalière, dans l'onglet **Projection**, choisir **Oblique** puis renseigner l'angle de fuite et le rapport de la perspective.

## La barre d'outils



## Construction de solides

|                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Cube                      | Permet de construire un cube à partir de deux de ses sommets consécutifs. Pour construire un cube de côté 1, on peut par exemple cliquer sur l'origine du repère, puis sur le point de coordonnées (1 ; 0 ; 0). La face inférieure du cube se situe alors dans le plan ( $xOy$ ). On peut redimensionner le cube en faisant glisser le deuxième point créé. |  |
| Pyramide                  | Permet de construire une pyramide à partir de sa base et son sommet.                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |
| Prisme                    | Permet de construire un prisme à partir de sa base et son sommet.                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
| Extrusion Pyramide/Cône   | Permet de construire une pyramide ou un cône à partir de sa base déjà créée et de sa hauteur.                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
| Extrusion Prisme/Cylindre | Permet de construire un prisme ou un cylindre à partir de sa base déjà créée et de sa hauteur.                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
| Cône                      | Permet de construire un cône à partir du centre de sa base, de son sommet et du rayon de sa base.                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
| Cylindre                  | Permet de construire un cylindre droit à partir des centres de chacune des faces et du rayon.                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
| Tétraèdre régulier        | Permet de construire un tétraèdre régulier à partir de deux de ses sommets.                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |
| Patron                    | Permet d'obtenir un patron d'un solide déjà construit. Pour faire varier l'ouverture du patron, on utilise le curseur créé dans la fenêtre 2D.                                                                                                                                                                                                              |  |

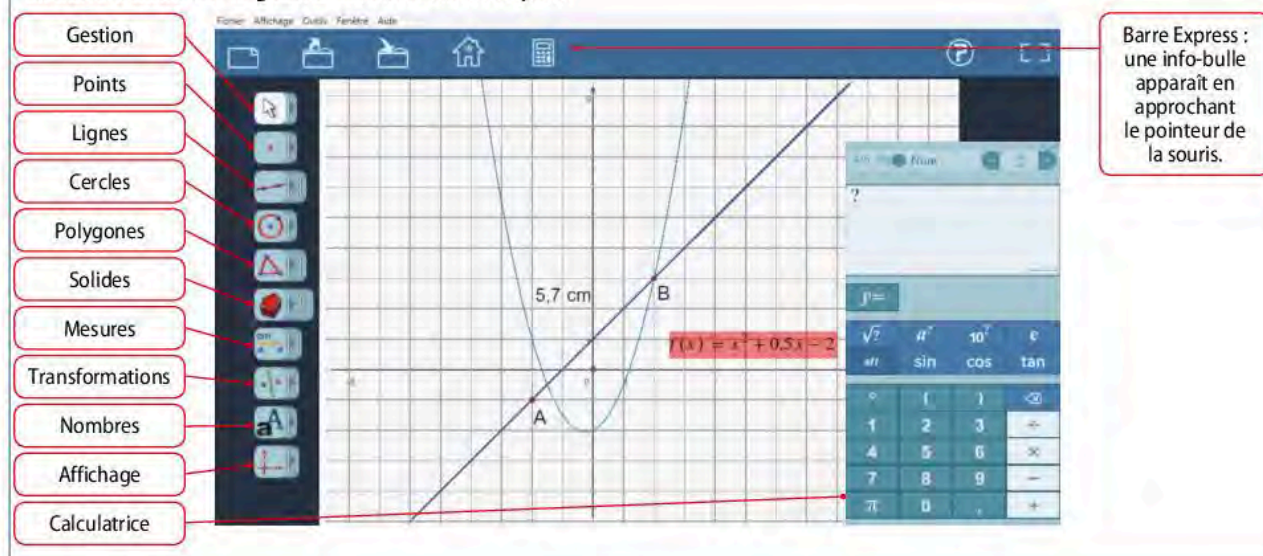
## Tourner-Déplacer

|                             |                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tourner la vue Graphique 3D | Permet de faire tourner la figure en maintenant le clic du bouton de la souris.                                                                                        |
| Déplacer Graphique          | Permet de déplacer le graphique dans la direction haut/bas en maintenant le clic du bouton, puis dans la direction droite/gauche à l'aide d'un deuxième clic maintenu. |
| Vue de face                 | Permet de choisir le plan en vue de face.                                                                                                                              |



## Présentation

La barre d'outils sur la gauche contient dix rubriques.



## Menu déroulant contenu dans chacune des icônes d'outils

- Lorsque l'on clique sur la flèche grise à côté d'une icône, on obtient son menu déroulant. Les différents outils contenus dans cette icône apparaissent.
- **Pour activer un outil**, on fait afficher le menu déroulant, puis on sélectionne l'outil souhaité en cliquant dessus comme ci-dessous avec l'icône **Lignes**.

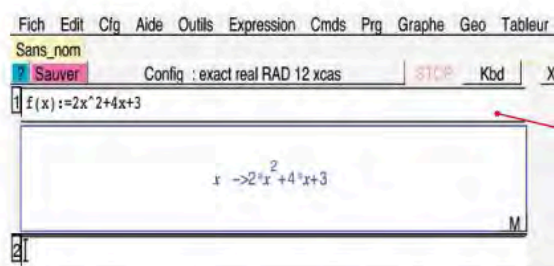


- Pour désactiver un outil, il suffit d'activer l'outil **Pointeur** ou d'appuyer sur la touche **Echap** ou **ESC** du clavier.

## Les outils de Cabri Express

| Pour la géométrie                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Pour les fonctions et les calculs                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cabri permet de construire des droites, des cercles, des arcs de cercle, des polygones, des vecteurs ()...</li> <li>• Cabri permet de construire des solides en 3D à l'aide du menu .</li> <li>• Cabri permet de mesurer des longueurs, des aires, des volumes, des angles à l'aide du menu .</li> <li>• Cabri permet d'afficher les coordonnées d'un point, l'équation d'une droite, d'un cercle, dans un repère à l'aide du menu .</li> <li>• Cabri permet de faire apparaître la trace d'un objet à l'aide du menu .</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cabri dispose d'une calculatrice déplaçable qu'on peut afficher/masquer avec l'icône .</li> <li>• Cette calculatrice fonctionne comme une calculatrice classique et communique avec les éléments construits. En cliquant sur une mesure, celle-ci apparaît dans la calculatrice et le curseur <b>Alg</b> <b>Num</b>  permet de passer de la valeur numérique au nom qui lui est attribué. On peut alors utiliser ce nom dans un calcul dont le résultat sera affiché avec l'unité correspondante.</li> <li>• Elle permet d'afficher la représentation graphique de fonctions en utilisant  dans un repère construit automatiquement et modifiable.</li> </ul> |





Ligne d'édition

On peut trouver les commandes décrites ci-dessous dans le menu **Scolaire** ou dans l'index du menu **Aide**.

## Calculs

Pour régler les modes de calcul, choisir le menu **Cfg**, puis **Configuration du CAS** : décocher la case **approx** si l'on veut faire du calcul formel et éviter les écritures décimales des nombres.

|                                                    |                         |
|----------------------------------------------------|-------------------------|
| Racine carrée d'un réel $x$                        | <code>sqrt(x)</code>    |
| Partie entière d'un réel $x$                       | <code>floor(n)</code>   |
| Nombre aléatoire de l'intervalle $[0 ; 1[$         | <code>rand(0, 1)</code> |
| Nombre aléatoire entier compris entre 0 et $n - 1$ | <code>hasard(n)</code>  |

## Calcul formel

|                                       |                                                                 |                                              |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Développer une expression             | Développer $(x + 3)(x - 1)$                                     | <code>developper((x+3)*(x-1))</code>         |
| Factoriser une expression             | Factoriser $(x^2 - 4)$                                          | <code>factoriser(x^2-4)</code>               |
| Simplifier une expression             | $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$                                   | <code>simplifier(1/x+1/(x-1))</code>         |
| Résoudre une équation                 | Résoudre $x^2 - 5x + 4 = 0$                                     | <code>resoudre(x^2-5*x+4=0)</code>           |
| Résoudre une inéquation               | Résoudre $x^2 - 4 < 0$                                          | <code>resoudre(x^2-4&lt;0)</code>            |
| Résoudre un système d'équations       | Résoudre $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ | <code>resoudre([x+3y=-1,3x+2y=4],x,y)</code> |
| Fixer une variable dans un intervalle | Fixer $x$ dans $[0 ; +\infty[$                                  | <code>supposons(x &gt; 0)</code>             |

## Calcul formel - Analyse

|                                               |                                                  |                                  |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------|
| Définir une fonction                          | $f$ telle que $f(x) = x^2 + x + 1$               | <code>f(x) := x^2+x+1</code>     |
| Dériver une fonction                          | Dériver $f : f(x) = x^2 - 5x$                    | <code>deriver(x^2-5x)</code>     |
| Calculer la limite d'une fonction en un point | Limite de $\ln(x)$ en 0                          | <code>limite(ln(x),x,0)</code>   |
| Déterminer une primitive d'une fonction       | Primitive de $f : f(x) = x^4$                    | <code>int(x^4)</code>            |
| Calculer l'intégrale d'une fonction           | Intégrale de $f$ entre 1 et 2, où $f(x) = x e^x$ | <code>int(x*exp(x),x,1,2)</code> |
| Résoudre une équation différentielle          | Résoudre l'équation $2y' + xy = 1$               | <code>desolve(2*y'+x*y=1)</code> |

## Commandes de géométrie

Pour ouvrir l'écran graphique, sélectionner **Nouvelle figure 2d** dans le menu **Geo**.

|                                                                     |                                    |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Définir un point A de coordonnées (2 ; 5)                           | <code>A := point ([2, 5])</code>   |
| Distance de deux points A et B                                      | <code>distance(A, B)</code>        |
| Tracer la droite d'équation $x + 3y - 1 = 0$                        | <code>droite(x+3y-1=0)</code>      |
| Tracer la représentation graphique d'une fonction $f$ sur $[a ; b]$ | <code>graphe (f(x), x=a..b)</code> |



Cette fiche décrit plus précisément la calculatrice Casio GRAPH 90+E.

Pour les autres calculatrices Casio, les commandes varient peu.

La touche **MENU** permet d'accéder au menu principal donnant les différents modes de la calculatrice. Pour entrer dans un mode, le mettre en surbrillance puis taper sur **EXE**.



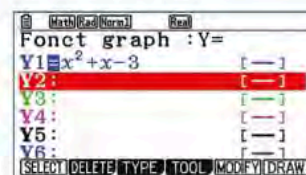
## Étudier une fonction

### ► Définir une fonction

Choisir le mode **Graph**.

Saisir l'expression de la fonction étudiée, en **Y1**, par exemple  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + x - 3$ .

Pour supprimer une fonction, utiliser l'instruction **DELETE** (touche **F2**).



### ► Tracer la représentation graphique d'une fonction

Appuyer sur les touches **SHIFT** **F3** pour accéder au menu **V-Window** et choisir **STANDRD** (touche **F3**).

Appuyer sur **EXIT**, puis sélectionner **DRAW** (touche **F6**).

La courbe s'affiche à l'écran. La fenêtre d'affichage est alors : Xmin = -10 ; Xmax = 10 ; Ymin = -10 ; Ymax = 10.

C'est la **fenêtre standard**.

Pour régler différemment la fenêtre d'affichage, sélectionner **V-Window** et saisir les paramètres souhaités.

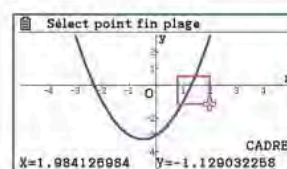
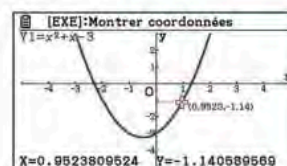
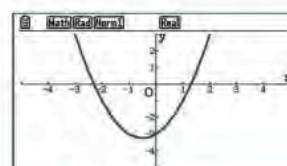
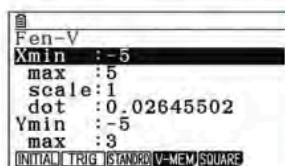
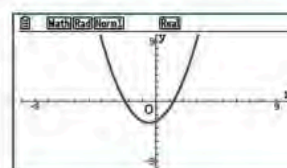
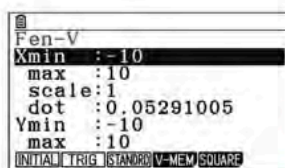
Le tracé de la courbe est alors obtenu par les touches **EXIT**, puis **DRAW**.

Pour parcourir la courbe, on utilise la commande **Trace** (touches **SHIFT** **F1**).

La calculatrice affiche les coordonnées du pointeur.

On déplace le pointeur sur la courbe à l'aide des touches **◀** et **▶** du pavé directionnel.

La commande **Zoom** (touches **SHIFT** **F2**) suivie de **BOX** (touche **F1**) permet d'agrandir la portion de courbe sélectionnée, à l'intérieur d'un rectangle, tracé à l'aide des touches du pavé directionnel.



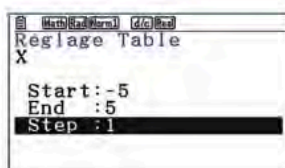
### ► Construire un tableau de valeurs

Choisir le mode **Table**.

Choisir **SET** (touche **F3**) et régler les paramètres de la table (valeur initiale, valeur finale et pas : step). Valider par **EXE**.

La table est obtenue par l'instruction **TABLE** (touche **F6**).

On se déplace dans les colonnes de la table en utilisant les touches du pavé directionnel.



| Y1 = x^2 + x - 3 |    |
|------------------|----|
| X                | Y1 |
| -1               | -3 |
| 0                | -3 |
| 1                | -1 |
| 2                | 3  |

### ► Calculer un nombre dérivé

Dans le mode **Exe-Mat**, sélectionner **MATH** (touche **F4**) puis **d/dx** (touche **F4**).

Calcul du nombre dérivé de la fonction  $f$  en 1 :

$$\left. \frac{d}{dx} (x^2 + x - 3) \right|_{x=1} = 3$$

Calcul direct si l'expression de  $f$  a été saisie en **Y1** :

$$\left. \frac{d}{dx} (Y1) \right|_{x=1} = 3$$

On peut saisir **Y1** en appuyant sur la touche **VARS**, puis **GRAPH** (touche **F4**), puis **Y** (touche **F1**) et touche **1**.

Instruction pour la calculatrice en mode « affichage en ligne » :

$$d/dx(x^2+x-3,1)$$



## ► Calculer une intégrale

Dans le mode **Exe-Mat**, appuyer sur la touche **OPTN**, choisir **CALC** (touche **F4**) puis  $\int dx$  (touche **F4**).

Calcul de l'intégrale de la fonction  $f$  entre 1 et 3 :

$$\int_1^3 (x^2 + x - 3) dx = \frac{20}{3}$$

Calcul direct si l'expression de  $f$  a été saisie en **Y1** :

$$\int_1^3 Y1 dx = \frac{20}{3}$$

Instruction pour la calculatrice en mode « affichage en ligne » :

$$f(x^2 + x - 3, 1, 3) = 20 \div 3$$

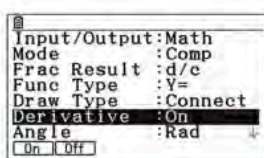
## ► Tracer une tangente

**Exemple** : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x - 3$  et  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé. On veut tracer la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.

### ① Choisir l'instruction

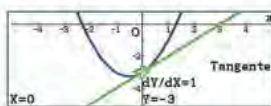
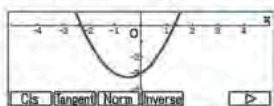
**SET UP** (touches **SHIFT** **MENU**).

Activer le mode **Derivative** : choisir **On** (touche **F1**), suivi de **EXE**.



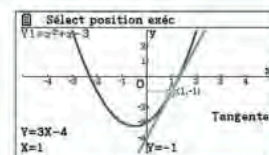
### ② Saisir la fonction en **Y1** et tracer la courbe comme indiqué précédemment.

### ③ Choisir l'instruction **Sketch** (touches **SHIFT** **F4**). Sélectionner **Tangent** (touche **F2**)



### ④ Appuyer sur la touche **1**, puis taper deux fois sur la touche **EXE**.

La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).



Pour supprimer l'affichage des tangentes, choisir l'instruction **Sketch** (touches **SHIFT** **F4**) et sélectionner **Cl** (touche **F1**).

## Résoudre une équation

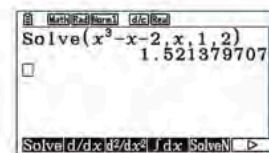
**Exemple** : Résoudre l'équation  $x^3 - x - 2 = 0$  dans l'intervalle  $[1; 2]$ .

### ► Choisir le mode **Exe-Mat**.

La calculatrice fournit des valeurs approchées des solutions d'une équation dont le second membre est 0.

Pour obtenir une approximation d'une solution de l'équation : appuyer sur la touche **OPTN** ; choisir les instructions **CALC** (touche **F4**) puis **Solve** (touche **F1**).

La syntaxe de cette instruction est **Solve (expression, variable, borne inférieure, borne supérieure)**.

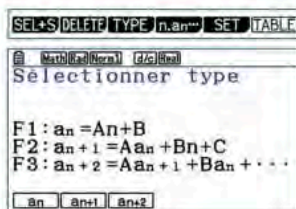


## Suites

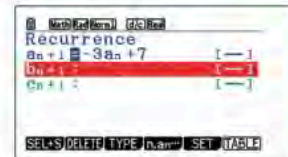
On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 7 \end{cases}$  dont on veut déterminer les termes  $u_1$  à  $u_{15}$ .

### ► Calcul des termes d'une suite

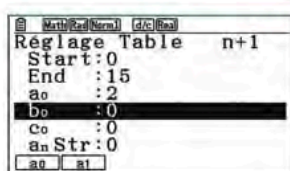
#### ① Choisir le mode **Récur-** **rence**. Si l'écran obtenu ne permet pas d'exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$ , appuyer sur **F3** pour sélectionner le « Type » de suite, puis sur **F2** pour sélectionner $a_{n+1}$ .



#### ② Renseigner l'écran comme ci-contre. $a_n$ est obtenu en sélectionnant l'instruction $na_n$ (touche **F4**), puis $a_n$ (touche **F2**), ou directement $a_n$ (touche **F2**) si elle est disponible.



#### ③ Appuyer sur la touche **F3** pour accéder au menu **SET** et renseigner les indices des premier et dernier termes calculés ainsi que la valeur du premier terme. Appuyer sur **EXE**.



#### ④ Appuyer sur la touche **F6** pour obtenir le tableau des valeurs des termes de $(u_n)$ .

| n+1 | a_{n+1} |
|-----|---------|
| 0   | 2       |
| 1   | 1       |
| 2   | 4       |
| 3   | -5      |



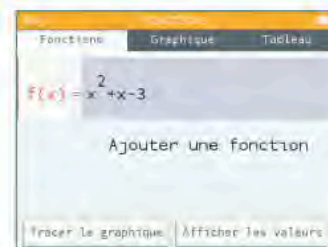
Cette fiche décrit la calculatrice Numworks. La touche  permet d'accéder au menu principal donnant les différents modes de la calculatrice. Pour entrer dans un mode, le mettre en surbrillance avec le pavé directionnel  puis taper sur .

## Étudier une fonction

Dans cette partie, on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x - 3$ .

### ► Définir une fonction

Appuyer sur la touche  et choisir le mode **Fonctions**. Saisir l'expression de la fonction étudiée, par exemple sur la ligne  $f(x)$ . Valider en appuyant sur . Utiliser la touche  pour obtenir la variable  $x$ . Pour supprimer une fonction sélectionnée, utiliser la touche .



### ► Tracer la représentation graphique d'une fonction

#### • Choisir la fenêtre standard

Sélectionner l'onglet **Graphique** avec le pavé directionnel puis appuyer sur , puis **Initialisation** et enfin **Réglage de base**. La fenêtre s'adapte à la courbe.

#### • Choisir une autre fenêtre d'affichage

Sélectionner **Axes** et saisir les paramètres souhaités.

#### • Tracer la courbe représentative d'une fonction

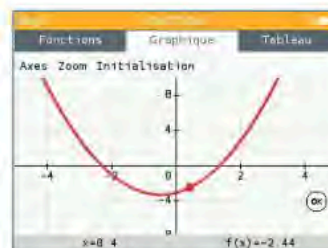
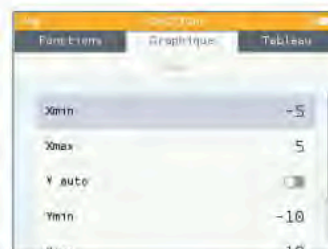
Sélectionner l'onglet **Graphique** en appuyant sur .

#### • Zoomer

L'onglet **Zoom** dans **Graphique** permet de déplacer la partie affichée de la courbe à l'aide du pavé directionnel et de l'agrandir ou de la rétrécir avec les touches .

#### • Parcourir une courbe

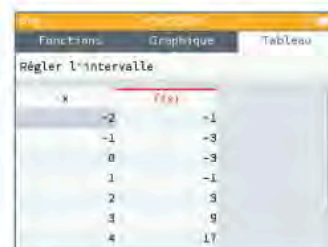
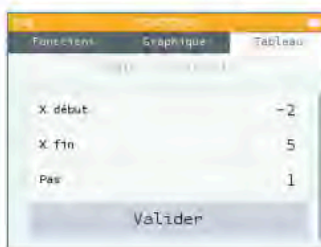
La courbe étant affichée à l'écran, déplacer le point situé sur la courbe représentative à l'aide du pavé directionnel. Ce point parcourt la courbe. Les coordonnées du pointeur sont affichées en bas de l'écran.



### ► Construire un tableau de valeurs

Sélectionner l'onglet **Tableau**, puis sélectionner **Régler l'intervalle** avec le pavé directionnel et appuyer sur . Régler les paramètres de la table : « valeur initiale » (X début), « valeur finale » (X fin) et « pas » (Pas). Valider par .

On se déplace dans les colonnes de la table en utilisant les flèches du pavé directionnel.



### ► Calculer un nombre dérivé

Dans l'écran de calcul, appuyer sur la touche , sélectionner le menu **Calculs** puis **diff(f(x),x,a)**.

Calcul du nombre dérivé de la fonction  $f$  en 1 :

$$\text{diff}(f(x^2+x-3, x, 1))$$

Calcul direct si l'expression de  $f$  a été saisie dans  $f(x)$  :

$$\text{diff}(f(x), x, 1)$$

On obtient «  $f$  » en appuyant sur  puis . Utiliser la touche  pour obtenir la variable  $x$ .

### ► Calculer une intégrale

Dans l'écran de calcul, appuyer sur la touche , sélectionner le menu **Calculs** puis **int(f(x),x,a,b)**.

Calcul de l'intégrale de la fonction  $f$  entre 1 et 3 :

$$\int_1^3 x^2 + x - 3 \, dx$$

Calcul direct si l'expression de  $f$  a été saisie dans  $f(x)$  :

$$\int_1^3 f(x) \, dx$$



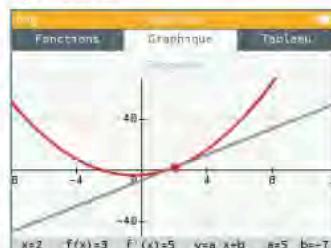
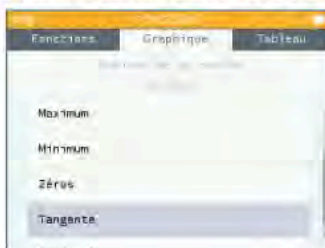
On saisit d'abord la borne inférieure, puis la borne supérieure et enfin l'expression de la fonction en se déplaçant avec le pavé directionnel **sans** appuyer sur **EXE**. On obtient « f » en appuyant sur **alpha** puis **x²**. Utiliser la touche **x/n,1** pour obtenir la variable x.

Pour obtenir une écriture fractionnaire sélectionner **Paramètres** sur l'écran d'accueil puis **Format résultat** puis **Auto**.

## ► Tracer une tangente

La courbe étant affichée à l'écran avec le pointeur, appuyer sur **EXE**. Sélectionner **Aller à**, puis saisir l'abscisse du point de la courbe où l'on souhaite obtenir la tangente. Appuyer sur **EXE** puis valider.

De retour sur l'écran avec la courbe, appuyer de nouveau sur **EXE**, puis sélectionner **Calculer**. Descendre pour sélectionner **Tangente**. La tangente apparaît, ainsi qu'une équation et le nombre dérivé correspondants.



## Résoudre une équation

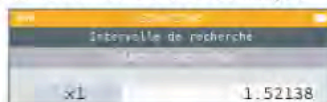
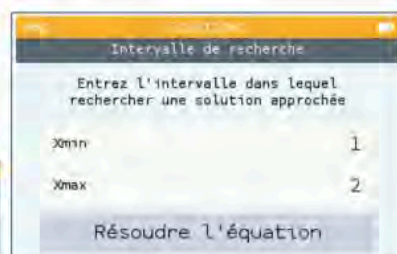
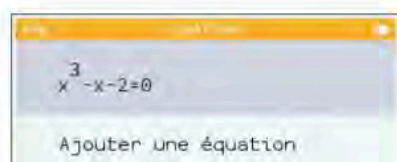
**Exemple :** Résoudre l'équation  $x^3 - x - 2 = 0$  dans l'intervalle [1 ; 2].

La calculatrice fournit des valeurs approchées des solutions d'une équation dont le second membre est 0.

Pour obtenir une approximation d'une solution :

- Sélectionner l'application  sur l'écran d'accueil.
- Sélectionner **Ajouter une équation** avec le pavé directionnel et appuyer sur **EXE**.
- Sélectionner le modèle d'équation ou ici **Vide** puis appuyer sur **EXE**.
- Saisir l'équation puis sélectionner **Résoudre l'équation** en appuyant sur **EXE**.
- Paramétrer l'intervalle de recherche entre 1 et 2 puis sélectionner **Résoudre l'équation** en appuyant sur **EXE**.

On obtient une valeur approchée de la solution.



## Suites

### ► Calculer les termes d'une suite

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 7 \end{cases}$ . On veut afficher, à l'aide de la calculatrice, les termes  $u_0$  à  $u_6$ .

- 1 Sélectionner l'application  dans l'écran d'accueil. Appuyer sur **OK**.

- 2 Sélectionner **Ajouter une suite**. Appuyer sur **OK** et sélectionner  $u_{n+1}$ . Renseigner l'écran comme ci-dessous en validant avec **EXE** à chaque étape et en se déplaçant avec le pavé directionnel.

$u_{n+1} = -3u_n + 7$   
 $u_0 = 2$   
 $u_n, u_{n+1}, \dots$  sont déjà pré-saisi selon le type de suite qui a été sélectionné. Si on a quand même besoin de saisir  $u_n$ , on utilise les touches : **alpha** **x** **( )** **alpha** **x** **( )**.

- 3 Sélectionner **Afficher les valeurs** ou **Tableau** pour obtenir le tableau des valeurs des termes de  $(u_n)$ .

| n | $u_n$ |
|---|-------|
| 0 | 2     |
| 1 | 1     |
| 2 | 4     |
| 3 | -5    |
| 4 | 22    |
| 5 | -59   |
| 6 | 184   |

- 4 Choisir **Régler l'intervalle** pour modifier le réglage par défaut sans oublier de valider avec **EXE** à chaque ligne

|         |    |
|---------|----|
| N début | 0  |
| N fin   | 10 |
| Pas     | 1  |
| Valider |    |



Cette fiche décrit plus précisément la calculatrice TI-83 Premium. Pour les autres calculatrices Texas, les commandes varient peu. Les différents menus sont accessibles par les touches du clavier de la calculatrice comme : **f(x)**, **fenêtre**, **zoom**, **trace**, **graphe**, **math**, **mode**.

## Étudier une fonction

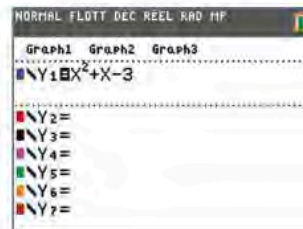
Choisir l'écran de calcul.

### ► Définir une fonction

Accéder à l'**éditeur de fonctions** en appuyant sur la touche **f(x)**.

Saisir l'expression de la fonction étudiée, en Y1, par exemple  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + x - 3$ .

Pour supprimer une fonction sélectionnée, appuyer sur la touche **annul**.



### ► Tracer la représentation graphique d'une fonction

Appuyer sur la touche **zoom** pour accéder au menu **ZOOM** et choisir **6:ZStandard**. La courbe s'affiche à l'écran.

La fenêtre d'affichage est alors :

$X_{min} = -10$  ;  $X_{max} = 10$  ;  $Y_{min} = -10$  ;  $Y_{max} = 10$ .

C'est la **fenêtre standard**.

Pour régler différemment la fenêtre d'affichage, appuyer sur la touche **fenêtre** et saisir les paramètres souhaités.

Le tracé de la courbe est alors obtenu en appuyant sur la touche **graphe**.

Pour parcourir la courbe, on utilise la touche **trace**.

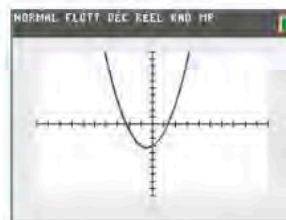
La calculatrice affiche les coordonnées du pointeur.

On déplace le pointeur à l'aide des touches **◀** et **▶** du pavé directionnel.

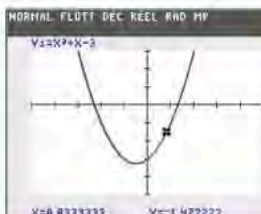
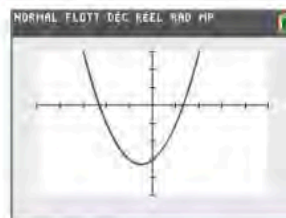
La touche **zoom** suivie de **1:ZCadré** permet d'agrandir la portion de courbe sélectionnée, à l'intérieur d'un rectangle, tracé à l'aide des touches du pavé directionnel.

**Remarque** : Il peut être nécessaire de désactiver les graphiques statistiques. Pour cela, accéder au menu **graph stats** (touches **2nde** **f(x)**) et sélectionner **4:GraphNaff**.

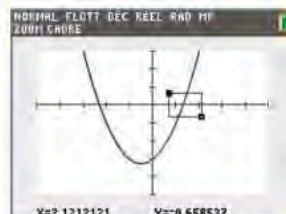
**ZOOM** MÉMOIRE  
1:ZCadré  
2:Zoom avant  
3:Zoom arrière  
4:ZDécimal  
5:ZCarré  
6:ZStandard  
7:ZTrig  
8:ZEntier  
9:ZoomStat



**FENETRE**  
 $X_{min} = -5$   
 $X_{max} = 5$   
 $X_{grad} = 1$   
 $Y_{min} = -5$   
 $Y_{max} = 3$   
 $Y_{grad} = 1$   
 $X_{res} = 1$



**CONFIG TABLE**  
DébutTbl=5  
ΔTbl=1  
Indent : **Auto** Demande  
Dépendte : **Auto** Demande



| NORMAL FLOTT DEC REEL RAD MP |     |
|------------------------------|-----|
| APP SUB FOUR Tbl             |     |
| X                            | Y1  |
| 5                            | 27  |
| 6                            | 39  |
| 7                            | 53  |
| 8                            | 69  |
| 9                            | 87  |
| 10                           | 107 |
| 11                           | 129 |
| 12                           | 153 |
| 13                           | 179 |
| 14                           | 207 |
| 15                           | 237 |

### ► Construire un tableau de valeurs

Choisir l'instruction **déf table** (touches **2nde** **fenêtre**) et régler les paramètres de la table (valeur initiale et pas).

La table est obtenue par l'instruction **table** (touches **2nde** **graphe**).

On se déplace dans les colonnes de la table en utilisant les touches **◀**, **▶**, **▲** et **▼** du pavé directionnel.

### ► Calculer un nombre dérivé

Dans l'écran de calcul, appuyer sur la touche **math**, sélectionner le menu **MATH** puis **8:nbreDérivé**.

Calcul du nombre dérivé de la fonction  $f$  en 1 :

$$\left. \frac{d}{dx} (x^2 + x - 3) \right|_{x=1} = 3$$

Calcul direct si l'expression de  $f$  a été saisie en Y1 :

$$\left. \frac{d}{dx} (Y1) \right|_{x=1} = 3$$

Pour obtenir la notation **Y1** : touche **var**, sélectionner **VAR Y**, **1:Fonction** puis **1:Y1** et valider par **entrer**.

Instruction pour les calculatrices disposant seulement de l'affichage en ligne :

$$\text{nbreDérivé}(X^2+X-3, X, 1) = 3$$



## ► Calculer une intégrale

Dans l'écran de calcul, appuyer sur la touche **math**, sélectionner le menu **MATH** puis choisir **9:intégrFonct**.

Calcul de l'intégrale  
de la fonction  $f$  entre 1 et 3 :

$$\int_1^3 (x^2 + x - 3) dx$$

6.666666667

Calcul direct si l'expression  
de  $f$  a été saisie en  $Y1$  :

$$\int_1^3 (Y1) dx$$

6.666666667

Instruction pour les calculatrices disposant seulement de l'affichage en ligne :  
Pour obtenir une écriture fractionnaire, utiliser la touche  $\frac{\Box}{\Box}$ .

$$\text{intégrFonct}(X^2+X-3, X, 1, 3)$$

6.666666667

## ► Tracer une tangente

**Exemple** : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x - 3$  et  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé. On veut tracer la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.

① Saisir l'expression de  $f(x)$  en  $Y1$ .

③ Appuyer sur la touche **graphe**  
et choisir l'instruction **dessin**  
(**2nde** **prgm**), puis le menu  
**DESSIN** puis **5:Tangente**.

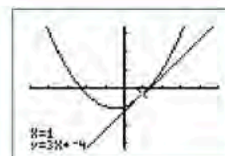
```

DESSIN POINTS SA
1:EffDessin
2:Ligne(
3:Horizontale
4:Verticale
5:Tangente(
6:DessFonct
7:Ombre(

```

② Régler la fenêtre d'affichage.

④ Préciser la valeur de  $x$ ,  
en appuyant sur **1**. Valider par  
**entrer**.  
La tangente s'affiche ainsi  
qu'une équation (éventuellement  
approchée).



Pour supprimer l'affichage des tangentes, choisir l'instruction **dessin** puis **1:EffDessin**.

## Résoudre une équation

**Exemple** : Résoudre l'équation  $x^3 - x - 2 = 0$  dans l'intervalle  $[1; 2]$ .

La calculatrice fournit des valeurs approchées des solutions d'une équation dont le second membre est 0.

Pour obtenir une approximation d'une solution de l'équation dans l'écran de calcul :

- choisir l'instruction **catalog** (touches **2nde** **0**) puis résoudre( et valider par **entrer** ;
- saisir le premier membre de l'équation, la variable  $X$  et une valeur approchée de la solution, ici 1 (valider par **entrer**).

La syntaxe de cette instruction est **résoudre** (expression, variable, approximation de la solution).

```

CATALOG
RemFlir(
RéorganiserMém
Ref
Repeat
résoudre(

```

$$\text{résoudre}(X^3 - X - 2, X, 1)$$

1.521379707

## Suites

## ► Calcul des termes d'une suite

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 7 \end{cases}$  dont on veut déterminer les termes  $u_1$  à  $u_{15}$ .

① Appuyer  
sur la touche **mode** pour  
accéder à l'écran ci-contre.  
À la quatrième ligne, sélection-  
ner le mode **SUITE**.  
Taper **entrer**.  
Appuyer  
sur la touche **f(x)**.

```

MATHPRINT CLASSIC
SCI ENG
FLOTTANT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
RADIAN DEGR
FONCTION PARAMÉTRIQU POLAIRE SUITE
ÉPARG POINT-ÉPARG FIN POINT-FIN
SÉQUENTIELLE SIMUL
REEL a+b1 p*(c0)
FENÊTRE HORIZONTAL GRAPHE-TABLE
TYPEFRACTION M21 Unvd
RESULTATS: AUTO DEC
DIAGNOSTIQUES STATS: NUFF AFF
ASSISTANT STATS: OFF NUFF
RÉGLER HORLOGE 00/22/05 05:43 PM
LANGUE: FRANÇAIS

```

② Choisir le type **SUITE(n+1)**, en haut de l'écran, puis  
compléter l'écran.

$u(n)$  est obtenu en utilisant  
les touches **2nde** **7** (**X**, **T**, **0**, **n** ).  
 $nMin$  est l'indice de départ.  
 $u(nMin)$  est la première  
valeur.

```

NORMAL FLOTT DEC REEL RAD MP
Graph1 Graph2 Graph3
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)
nMin=0
u(n+1)=-3*u(n)+7
u(0)=2
u(1)=
v(n+1)=
v(0)=
v(1)=
w(n+1)=

```

③ Appuyer  
sur la touche **fenêtre**, puis rensei-  
gner l'indice du premier terme  
et celui du dernier terme à cal-  
culer, ici 15.  
Appuyer sur les touches **2nde**  
**fenêtre** pour accéder à l'écran  
**CONFIG TABLE**, puis le com-  
pléter.

```

FENÊTRE
nMin=0
nMax=15
DbutTracé=1
PasTracé=1

```

```

CONFIG TABLE
DbutTbl=5
aTbl=1
Indont: RUFF Demande
Depndte: RUFF Demande

```

④ Appuyer sur les touches  
**2nde** **graphe** pour obtenir  
le tableau des valeurs des  
termes de  $(u_n)$ .

| n  | u(n)  |  |  |  |
|----|-------|--|--|--|
| 0  | 2     |  |  |  |
| 1  | -1    |  |  |  |
| 2  | -5    |  |  |  |
| 3  | -14   |  |  |  |
| 4  | -35   |  |  |  |
| 5  | -80   |  |  |  |
| 6  | -184  |  |  |  |
| 7  | -445  |  |  |  |
| 8  | -1042 |  |  |  |
| 9  | -2419 |  |  |  |
| 10 | -5784 |  |  |  |

n=0



Accédez aux corrigés rédigés et détaillés des exercices Pour travailler en autonomie et de certains sujets de Bac avec l'application **Bordas Flashpage** (voir Rabat F) ou sur le site élève [lycee.editions-bordas.fr](http://lycee.editions-bordas.fr)

## COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

### Se tester pour un bon départ

1. Faux :  $u_1 = 3 \times 3 - 2 = 7$ .
2. Vrai :  $2 \times 3^0 + 1 = 3 = u_0$ .
3. 1.  $E \times F = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$
2.  $E \times F$  contient 6 éléments.
- 5 a. 8 femmes sont du groupe AB.
- b. 85 est le nombre de personnes de groupe sanguin B.

|        | A   | B  | AB | O   | Total |
|--------|-----|----|----|-----|-------|
| Femmes | 73  | 20 | 8  | 89  | 190   |
| Hommes | 94  | 65 | 17 | 134 | 310   |
| Total  | 167 | 85 | 25 | 223 | 500   |

### Pour maîtriser les bases

- 20 1.  $u_0 = 1 \geq 1$ . 2. a.  $u_p \geq p$ .
- b.  $P(p+1) : u_{p+1} \geq p+1$ .
- c.  $u_{p+1} = 2u_p - p + 1 \geq 2p - p + 1$  soit  $u_{p+1} \geq p+1$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq n$ .
- 30 1.  $k = 3$ .
2.  $(0,1,2); (0,2,1); (1,0,2); (1,2,0); (2,0,1); (2,1,0)$ . Il y a 6 permutations.
3.  $3! = 6$ .
- 34 1. a.  $\{p,q,r\}; \{p,q,s\}; \{p,s,r\}; \{q,s,r\}$ .
- b. Il y a 4 combinaisons de 3 éléments de E.
- c.  $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \times (4-3)!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$ .
2. a.  $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ .
- b.  $\{p,q\}; \{p,r\}; \{p,s\}; \{q,r\}; \{q,s\}; \{r,s\}$ .

### Pistes

- 77 Pour dénombrer les manières d'avoir trois cartes de même valeur, on peut d'abord déterminer le nombre de choix pour la valeur, puis le nombre de choix pour les trois cartes de cette valeur. On enlève alors les cartes de la valeur choisie pour ensuite dénombrer les paires de cartes qui peuvent compléter la main.
- 98 On peut lister toutes les sommes qui permettent d'obtenir 15 en utilisant les nombres 1, 2, 5 et 10, en écrivant les termes dans l'ordre décroissant par exemple.

### Pour travailler en autonomie

- 100 Initialisation :  $u_1 = 6$ .
- Hérédité : soit  $p$  entier naturel non nul tel que  $u_p = 6$ .
- Alors  $u_{p+1} = 4u_p - 18 = 4 \times 6 - 18 = 6$ .
- Conclusion : pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_n = 6$ .

- 101 Initialisation :  $v_0 = -5 \leq -4$ .
- Hérédité : soit  $p$  entier naturel tel que  $v_p \leq -4$ .
- Alors  $v_{p+1} = 3v_p + 8 \leq 3 \times (-4) + 8$ , soit  $v_{p+1} \leq -4$ .
- Conclusion : pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n \leq -4$ .

- 102 Initialisation :  $3^0 - 5 \times 0 = 1 = u_0$ .
- Hérédité : soit  $p$  entier naturel tel que  $u_p = 3^p - 5p$ . Alors  $u_{p+1} = 3u_p + 10p - 5$ , soit  $u_{p+1} = 3 \times (3^p - 5p) + 10p - 5$ , soit  $u_{p+1} = 3^{p+1} - 5p - 5$ , soit  $u_{p+1} = 3^{p+1} - 5(p+1)$ .
- Conclusion : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3^n - 5n$ .

- 103 Initialisation :  $4^0 = 1$  et  $1 + 3 \times 0 = 1$ , donc  $4^0 \geq 1 + 3 \times 0$ .
- Hérédité : soit  $p$  entier naturel tel que  $4^p \geq 1 + 3p$ .
- Alors  $4^{p+1} = 4^p \times 4 \geq (1 + 3p) \times 4$ , soit  $4^{p+1} \geq 4 + 12p$ .
- Or,  $1 + 3(p+1) = 4 + 3p \leq 4 + 12p$ .
- Donc  $4^{p+1} \geq 1 + 3(p+1)$ .
- Conclusion : pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n \geq 1 + 3n$ .

- 104 1. Faux :  $5 + 7 = 12$ .
2. Vrai :  $5 \times 7 \times 6 = 210$ .
- 105 1.  $10^6$ . 2. 151 200.
- 106 1. 277 977 744. 2. 153 014 400.
- 107 55 440.
- 108 1. a.  $5! = 120$ . b.  $4! = 24$ .
2. a.  $5 \times 4 \times 3 = 60$ . b.  $4 \times 3 = 12$ .
- 109 1. b, c, d. 2. c, d. 3. c, d.
- 110 Faux :  $\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$ .
- 111 1. 31 474 716. 2. 714 000.
3.  $\frac{6}{31 474 716} \approx 1,9 \times 10^{-7}$ .
- 112 1. 906 192. 2. 378.
3. a. 0,04 %. b. 0,22 %.
- c. Ni cœur, ni valet : 21 cartes.

Ainsi,  $\frac{\binom{21}{6}}{906192} \approx 5,99\%$ .

- 113 1. 30 codes. 2. 6 codes.
- 114 4 élèves.

### Revoir des points essentiels

- 115 Initialisation :  $2 \times 5^0 + 1 = 3 = u_0$ .
- Hérédité : soit  $p$  entier naturel tel que  $u_p = 2 \times 5^p + 1$ .
- Alors  $u_{p+1} = 5(2 \times 5^p + 1) - 4 = 2 \times 5^{p+1} + 5 - 4$ , soit  $u_{p+1} = 2 \times 5^{p+1} + 1$ .
- Conclusion : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2 \times 5^n + 1$ .
- 116 Initialisation :  $3^1 + 1 = 4 = v_1$ .
- Hérédité : soit  $p$  entier naturel non nul tel que  $v_p = 3^p + p$ . Alors  $v_{p+1} = 3 \times (3^p + p) - 2p + 1$ , soit  $v_{p+1} = 3^{p+1} + 3p - 2p + 1$ , soit  $v_{p+1} = 3^{p+1} + p + 1$ .

Conclusion : pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $v_n = 3^n + n$ .

$$117 \binom{5000}{2} = 12\,497\,500. \quad 118 \binom{6}{4} = 15.$$

### Pour se préparer à l'écrit

#### Sujet B

1. a.  $\binom{10}{3} = 120$ . b.  $\binom{7}{3} = 35$ .
- c.  $\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = 63$ . d.  $\binom{6}{3} = 20$ .
2. Le nombre de manières de choisir simultanément 5 jetons parmi les 8 est  $\binom{8}{5}$ . D'après la formule de Pascal,  $\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = 35 + 21 = 56$ .
3. a.  $10^3 = 1\,000$ . b.  $7^3 = 343$ .
- c.  $7^2 \times 3 \times 3 = 441$ . d.  $6^3 = 216$ .
4.  $1 \times 9 \times 8 = 72$ .

#### Sujet C

1.  $n^n$ .
2. a. Si on n'a qu'une case et qu'une boule, on est certain que la case contienne la boule. Donc  $p_1 = 1$ .  
Si on a 2 cases et 2 boules, il y a  $2^2$  soit 4 rangements possibles. Parmi eux, seulement 2 permettent d'avoir une boule dans chaque case. Donc  $p_2 = \frac{2}{4} = 0,5$ .
- b. Il y a  $n!$  façons de ranger les  $n$  boules dans des cases différentes ( $n$  choix pour la première boule,  $n-1$  choix pour la deuxième, etc.). Il y a au total  $n^n$  façons de ranger les  $n$  boules dans les  $n$  cases. Donc  $p_n = \frac{n!}{n^n}$ .
- c.  $p_5 = \frac{5!}{5^5} \approx 0,04$ .
3. a. L'appel `fac(5)` retourne 120.
- b. La fonction `fac`, de paramètre  $n$  un entier naturel non nul, retourne le nombre  $n!$ .

c. 

```
def probabilite(n):
 return(fac(n)/n**n)
```

4. On démontre par récurrence.
- Initialisation :  $P_1 = 1$  et  $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1$ .
- Donc  $P_1 \leq \frac{1}{2^{1-1}}$ .
- Hérédité : soit  $k$  un entier naturel non nul tel que  $P_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ . Alors  $P_{k+1} \leq \frac{1}{2} P_k \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k-1}}$ .
- Donc  $P_{k+1} \leq \frac{1}{2^k}$ .
- Conclusion : l'inégalité  $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  est vraie pour tout entier naturel non nul  $n$ .

## VECTEURS, DROITES ET PLAN DE L'ESPACE

### Se tester pour un bon départ

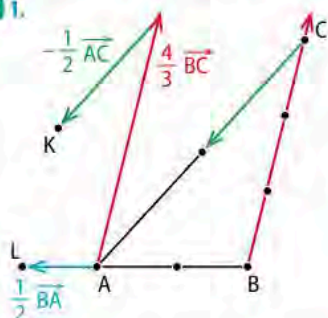
- 3 1. Le théorème de Pythagore dans le triangle BCG rectangle en G nous donne  $BG = 5$ .  
Dès lors  $\frac{BL}{BG} = 0,4$  et  $\frac{BK}{BH} = 0,4$ .



D'après la réciproque du théorème de Thalès, (KL) et (GH) sont parallèles.

2. Avec le théorème de Thalès,  $KL = 3,2$ .

7 1.



$$2. \vec{KL} = \vec{KA} + \vec{AL} = -\frac{4}{3} \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{BA}$$

$$\vec{KL} = -\frac{4}{3} \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{BC} = \frac{5}{6} \vec{BC}.$$

Les droites (KL) et (BC) sont parallèles.

### Pour maîtriser les bases

18 1.  $\vec{AB} = -3\vec{AC}$ . 2.  $\vec{AB} = \frac{4}{3}\vec{AC}$ .

24 1. Il existe trois réels  $x, y$  et  $z$  non tous nuls tels que  $x\vec{AD} + y\vec{BD} + z\vec{CD} = \vec{0}$  donc  $\vec{AD}, \vec{BD}$  et  $\vec{CD}$  sont coplanaires.

2.  $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AD}$ .

3.  $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = -\vec{AC} + \vec{AD}$ .

4.  $-3\vec{AD} + 5\vec{BD} + 2\vec{CD} = \vec{0}$

$$-3\vec{AD} - 5\vec{AB} + 5\vec{AD} - 2\vec{AC} + 2\vec{AD} = \vec{0}$$

$$4\vec{AD} = 5\vec{AB} + 2\vec{AC}$$

$$\vec{AD} = \frac{5}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}.$$

29 1.  $\vec{J} = \vec{JA} + \vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{BC}$ .

2.  $\vec{J}$  et  $\vec{BC}$  sont colinéaires. On en déduit que (IJ) est parallèle au plan (BCD).

35 1.  $\vec{AB}(1; -3; -1)$  et  $\vec{AC}(3; -9; -3)$ .

2. a. Puisque  $\vec{AC} = 3\vec{AB}$ , les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.

b. Les points A, B et C sont alignés.

41 1.  $\vec{AB}(7; 3; -10)$ .

2.  $\begin{cases} x = -3 + 7t \\ y = 2 + 3t \\ z = 8 - 10t \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

3. a.  $x_C = 11$  donc  $t = 2$ .

b.  $y_C = 2 + 3 \times 2 = 8$  et  $z_C = 8 - 10 \times 2 = -12$ .

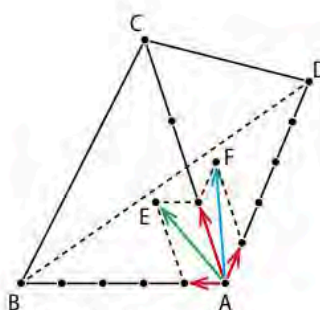
### Pistes

56 Exprimer les vecteurs  $\vec{GE}$  et  $\vec{FH}$  dans la base  $(\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD})$ .

127 Déterminer les représentations paramétriques des droites (AB), (AC) et (BC) puis déterminer laquelle est sécante avec (EF).

### Pour travailler en autonomie

129 1. Pour un tracé plus « facile », les longueurs AB et AD doivent être multiples de 5, la longueur AC doit être multiple de 3.



2.  $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF} = \frac{1}{5}\vec{BD}$ .

On en déduit que (EF) et (BD) sont parallèles.

130  $\vec{u} = -2\vec{AB}$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires.

131 1. a.  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$  et  $\vec{AH} = \vec{AE} + \vec{AD}$ .

b.  $\vec{AK} + \vec{CK} + \vec{HK} = \vec{0}$ . En introduisant A :

$$\vec{AK} + \vec{CK} + \vec{AK} + \vec{HA} + \vec{AK} = \vec{0}$$

$$\text{d'où } 3\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AD}$$

$$\text{et } \vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE}.$$

2.  $\vec{DF} = \vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AE}$  et  $\vec{DK} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE}$

donc  $\vec{DF} = 3\vec{DK}$ . Puisque  $\vec{DF}$  et  $\vec{DK}$  sont colinéaires, D, F et K sont alignés.

132 1.  $\vec{DP} = \vec{DA} + \vec{AP} = \vec{DA} + \vec{DN}$  d'où  $\vec{DP} = \vec{DA} + \vec{DC} + \vec{BM} = \vec{DA} + \vec{DM} + \vec{BC}$ .

2.  $\vec{DP} = 2\vec{DC} + \vec{BC}$  donc  $\vec{DP}, \vec{DC}$  et  $\vec{BC}$  sont coplanaires.

133 1. Le théorème de la droite des milieux dans le triangle ABC permet de justifier que (IJ) et (BC) sont parallèles.

2. D appartient à (DIJ) et (BCD) donc ces plans ne sont pas parallèles.

3. (AD) est la droite d'intersection entre (ABD) et (ACD).

134 1.  $\vec{J} = \frac{2}{5}\vec{GE}$  donc  $\vec{J}$  et  $\vec{GE}$  sont colinéaires.

2. (FI) est sécante au plan (EGJ) au point I.

135 1. Vrai. 2. Faux. 3. Vrai. 4. Vrai.

136 a.  $\vec{AN} = 2\vec{AB} + \vec{AH} + \vec{AI}$ .

$$\cdot \vec{OC} = \vec{AB} - \vec{AH} - \vec{AI} \quad \cdot \vec{HL} = 3\vec{AB} - \vec{AH} + \vec{AI}.$$

b.  $\cdot \vec{AN} = \vec{KN} - \vec{KJ} - \vec{KB} \quad \cdot \vec{OC} = -\vec{KN} - 2\vec{KJ} + \vec{KB}.$

$$\cdot \vec{HL} = -\vec{KN} - 2\vec{KJ} - \vec{KB}.$$

137 1.  $\vec{AC} = -5\vec{AB} + 16\vec{AD}$  donc  $\vec{AC}, \vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  sont coplanaires et les points A, B, C et D le sont aussi.

2.  $\vec{AE}, \vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  ne sont pas coplanaires donc E n'est pas un point du plan (ABD).

138 a, c et d.

139 1. I(2; 0; 1). 2. D(2; -4; 1).

3. E(-2; -8; 5). 4. F(10; 4; -7).

5.  $\vec{EF} = 3\vec{ED}$  donc  $\vec{EF}$  et  $\vec{ED}$  sont colinéaires et les points E, F et D sont alignés.

140 a. Faux. b. Vrai. c. Faux. d. Vrai.

141 1.  $\vec{AB} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$  donc  $\vec{AB}, \vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont coplanaires.

2.  $d$  et  $d'$  sont coplanaires,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires donc  $d$  et  $d'$  sont sécantes.

3. C(-7; 7; -1) est le point d'intersection entre  $d$  et  $d'$ .

142  $\vec{u}(2; -2; 4)$  est un vecteur directeur de  $d$  et  $\vec{v}(-1; 1; 2)$  est un vecteur directeur de  $d'$ .  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires.

De plus, le système 
$$\begin{cases} 1 + 2k = 2 - t \\ -2k = 3 + t \\ -2 + 4k = 1 + 2t \end{cases}$$
 n'a pas

de solution.

Donc  $d$  et  $d'$  ne sont pas coplanaires.

### Revoir des points essentiels

143  $\vec{IJ} = \frac{1}{3}\vec{BE} + \frac{1}{2}\vec{EG}$  et  $\vec{IK} = \frac{4}{3}\vec{BE} + 2\vec{EG}$ .

$\vec{IK} = 4\vec{IJ}$  donc  $\vec{IK}$  et  $\vec{IJ}$  sont colinéaires.

Ainsi, les points I, J et K sont alignés.

144 a.  $\vec{BD} = -\vec{AB} + \vec{AD}$  et  $\vec{DE} = -\vec{AD} + \vec{AE}$ .

b.  $3\vec{AP} = 3\vec{AB} + 3\vec{BP} = 3\vec{AB} + 2\vec{BD} + \vec{DE}$ .

$$\text{D'où } 3\vec{AP} = 3\vec{AB} - 2\vec{AB} + 2\vec{AD} - \vec{AD} + \vec{AE}.$$

$$\text{Alors } 3\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}.$$

Puisque  $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 3\vec{AP}$ , on en déduit que les points A, G et P sont alignés.

145 (AB) :  $\begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -5t \\ z = -2 + t \end{cases}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

De plus, C(17; 15; -5).

146 (AB) :  $\begin{cases} x = 7 - 8t \\ y = -2 + 4t \\ z = 4 - 8t \end{cases}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

De plus, C(-5; 4; -8).

### Pour se préparer à l'écrit

#### Sujet B

1. Réflexion par  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  :  $\vec{u}_1(a; b; -c)$ .

Réflexion par  $(O; \vec{j}, \vec{k})$  :  $\vec{u}_2(-a; b; -c)$ .

Réflexion par  $(O; \vec{i}, \vec{k})$  :  $\vec{u}_3(-a; -b; -c)$ .

$\vec{u}_3 = -\vec{u}$  donc le rayon final est parallèle au rayon initial.

2. a.  $d_2$  :  $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

b. L'abscisse d'un point quelconque de  $(O; \vec{j}, \vec{k})$  est nulle.

c.  $\begin{cases} 0 = 2 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$  donne  $\begin{cases} t = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$  d'où  $I_2(0; 2; 1)$ .

3.  $I_3(4; 0; 3)$ .

4. a.  $d_1, d_2$  et  $d_3$  ne sont pas coplanaires.

b.  $d_1, d_2$  et  $d_4$  ne sont pas coplanaires.

#### Sujet E

1.  $\vec{AB}, \vec{AD}$  et  $\vec{AE}$  ne sont pas coplanaires donc  $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  est une base de l'espace.

2. a.  $\vec{CE} = -\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AE}$ .

b.  $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{AE}$

3.  $\vec{AF} + \vec{AH} = \vec{AB} + \vec{AD} + 2\vec{AE} = 3\vec{AL}$

Donc  $\vec{AF}, \vec{AH}$  et  $\vec{AL}$  sont coplanaires.

4.  $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{AH} = \frac{3}{2}\vec{AL}$  donc  $\vec{AK}$  et  $\vec{AL}$  sont colinéaires et A, K et L sont alignés.



## 3 ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

### Se tester pour un bon départ

1. c. 2. a, b et c.

4. 1. Vrai.

2. Vrai.

3. Faux.

5. 1. Faux.

2. Vrai.

### Pour maîtriser les bases

20.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 28$ .

30.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

38. 1. a.  $\vec{AB}(2; 1; 3)$  et  $\vec{AC}(-5; 7; 1)$ .

b.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ .

2. (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

53.  $d = -8$ .

### Pistes

67. 2. Exprimer le produit scalaire  $\vec{ME} \cdot \vec{MB}$  en fonction de  $x$ .

141. 2. Déterminer en fonction de  $a$ , les coordonnées du point H, intersection de la droite  $d$  et du plan  $\mathcal{P}$ .

### Pour travailler en autonomie

143.  $\vec{BC} \cdot \vec{BG} = 16$ . b.  $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = 64$ .

c.  $\vec{BC} \cdot \vec{HF} = -16$ .

144. 1.  $\vec{JI} = -\frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$  et  $\vec{JK} = -\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$ .

2.  $\vec{JI} \cdot \vec{JK} = \frac{1}{2}\vec{AE} \cdot \frac{1}{8}\vec{AD} = 0$ .

3. IJK est un triangle rectangle en J.

145. 1.  $\vec{AB}(-4; 3; 9)$  et  $\vec{AC}(3; 1; 1)$  donc  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -12 + 3 + 9 = 0$ .

$\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont donc orthogonaux.

2. ABC est un triangle rectangle en A.

146. 1. a.  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 116$ .

b.  $AB = \sqrt{276} = 2\sqrt{69}$  et  $AC = 7$ .

2.  $\widehat{BAC} \approx 4,07^\circ$  à  $0,01^\circ$  près.

147. 1. a. 2. a et d. 3. c.

148. 1.  $\vec{AB}(1; 2; -3)$  et  $\vec{AC}(-4; 0; 1)$ .  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés : ces points définissent un plan.

2.  $\vec{DE}(2; 11; 8)$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{DE} = 0$  donc (AB) et (DE) sont orthogonales.

3.  $\vec{DE} \cdot \vec{AC} = 0$  donc (DE) est orthogonale à (AC). (DE) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) donc (DE) est perpendiculaire à (ABC).

149.  $T$  est incluse dans  $\mathcal{P}$  et  $\Delta$  est perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  donc  $T$  et  $\Delta$  sont orthogonales. De plus  $T$  est perpendiculaire à (OA).  $T$  est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (OAB) donc  $T$  est perpendiculaire à (OAB).

150.  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ .  $\vec{n}$  est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan  $\mathcal{P}$  donc  $\vec{n}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ .

151. a. Faux. b. Vrai. c. Vrai.

152. 1.  $\vec{AH}(2; 0; -4)$  et  $\vec{AH} \cdot \vec{n} = 0$  donc H appartient au plan  $\mathcal{P}$ .

2.  $\vec{BH} = 2\vec{n}$  et  $H \in \mathcal{P}$  donc H est le projeté orthogonal de B sur  $\mathcal{P}$ .

3.  $BH = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ .

153. 1.  $\vec{AC}(15; -3; -6)$  et  $\vec{AB}(5; -1; -2)$  donc  $\vec{AC} = 3\vec{AB}$  : C appartient à (AB).

De plus  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$  donc C est le projeté orthogonal de D sur (AB).

2.  $CD = \sqrt{11}$ .

154.  $H(-5; 18; 7)$ . 155.  $5x - 3y + 2z - 7 = 0$ .

156.  $-x + y - 3z - 5 = 0$ .

157. 1.  $\vec{AB}(-1; 0; 2)$  et  $\vec{AC}(2; 2; 1)$ .  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés : ces points définissent un plan.

2. a.  $4x_A - 5y_A + 2z_A + 1 = 0$  donc  $A \in \mathcal{P}$ .

$4x_B - 5y_B + 2z_B + 1 = 0$  donc  $B \in \mathcal{P}$ .

$4x_C - 5y_C + 2z_C + 1 = 0$  donc  $C \in \mathcal{P}$ .

Donc  $\mathcal{P}$  est le plan (ABC).

b.  $\vec{n}(4; -5; 2)$ .

158.  $d$  coupe  $\mathcal{P}$  en  $A(-50; -95; -22)$ .

159.  $H(1; -1; -1)$ .

160. 1. BCD est rectangle en C. L'aire de BCD est égale à  $\frac{\sqrt{350}}{2}$  soit à  $\frac{5\sqrt{14}}{2}$ .

2.  $AH = \sqrt{56}$  donc le volume de ABCD est égal à  $\frac{70}{3}$ .

### Revoir des points essentiels

161.  $\vec{AB}(1; 2; 3)$  et  $\vec{CD}(-1; -1; 1)$ .  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$  donc (AB) et (CD) sont orthogonales.

162. 1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  et  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$  donc  $\vec{u}$  est orthogonal à chacun des vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

2.  $d$  est perpendiculaire à  $\mathcal{P}$ .

163.  $\vec{AB}(7; 2; 3)$  et  $\vec{AC}(-2; 1; 4)$ .

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$  donc ABC est rectangle en A.

164. 1. A(0; 0; 0), F(1; 0; 1), C(1; 1; 0), H(0; 1; 1) et G(1; 1; 1).

2.  $\vec{AG}(1; 1; 1)$ ,  $\vec{FC}(0; 1; -1)$  et  $\vec{FH}(-1; 1; 0)$ .  $\vec{AG} \cdot \vec{FC} = 0$  et  $\vec{AG} \cdot \vec{FH} = 0$ .  $\vec{AG}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan (FCH) donc  $\vec{AG}$  est un vecteur normal au plan (FCH) donc (AG) est perpendiculaire à (FCH).

165.  $x - 3y + 5z + 15 = 0$ . 166.  $6x - y + z - 9 = 0$ .

167.  $2x + 5y + z = 0$ .

168. 1.  $\vec{l}(5; 3; 7)$ . 2.  $\vec{AB}(-6; -2; -8)$ .

3.  $-6x - 2y - 8z + 92 = 0$ .

### Pour se préparer à l'écrit

#### Sujet A

1. a.  $\vec{OA}(10; 0; 1)$  et  $\vec{OB}(1; 7; 1)$ .

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 11$ . Donc (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

b.  $\widehat{AOB} \approx 81,1^\circ$  à  $0,1^\circ$  près.

2.  $7x_0 + 9y_0 - 70z_0 = 0$

$7x_A + 9y_A - 70z_A = 0$

$7x_B + 9y_B - 70z_B = 0$  donc (OAB) a pour équation  $7x + 9y - 70z = 0$ .

$\begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} y = 0 \\ z = 5 - 4t \end{cases}$  avec  $t$  réel quelconque.

4.  $7x + 9y - 70z + 175 = 0$ .

5. F(5; 0; 3).

6.  $\vec{EF}(\frac{9}{2}; -\frac{7}{2}; 0)$  et  $\vec{AB}(-9; 7; 0)$  donc  $\vec{AB} = 2\vec{EF}$ .

(EF) est donc parallèle à (AB).

## Sujet E

1. a.  $\vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AG}$ .

b.  $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = (\vec{AC} + \vec{AE}) \cdot \vec{BD}$  donc

$\vec{AG} \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{AE} \cdot \vec{BD}$ .

ABCD est un carré donc (AC) et (BD) sont perpendiculaires d'où  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ . (AE) est perpendiculaire au plan (BCD) donc  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ . Donc  $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$ .

c.  $\vec{AG}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction du plan (BDE) donc  $\vec{AG}$  est un vecteur normal au plan (BDE) : (AG) est perpendiculaire à (BDE).

2. a.  $\vec{AG}(1; 1; 1)$  et  $\vec{AG}$  est un vecteur normal à (BDE) donc (BDE) a une équation de la forme  $x + y + z + d = 0$ . B  $\in$  (BDE) donc  $x_B + y_B + z_B + d = 0$  ce qui conduit à  $d = -1$ . Donc (BDE) a pour équation  $x + y + z - 1 = 0$ .

b.  $K(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ .

c. Le volume de BDEG est égal à  $\frac{1}{3}$ .

## SUITES

### Se tester pour un bon départ

1. 1. a. et b.

2. b. et d.

3. 1. a.  $u_1 = -1$ .

b. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

2. a. Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $v_{n+1} = -5n^2 - 11n - 3$ .

b.  $v_{n+1} - v_n = -10n - 6 < 0$ .

6 a. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = -2 + 7n$ . Or  $-2 + 7n > 1\,000$  équivaut à  $n > \frac{1002}{7}$ . Et  $\frac{1002}{7} \approx 143,1$ . Donc  $n_0 = 144$ .

b.  $(u_n)$  semble tendre vers  $+\infty$ .

### Pour maîtriser les bases

17.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  donc pour tout réel  $A$  et en particulier pour  $A = 1\,000$ , il existe un rang  $N$  à partir duquel tous les termes  $u_n$  sont strictement supérieurs à  $A$ .

29. 1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -7$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\frac{2}{7}$ .

34. 1. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-(-1)^n \leq 1$  donc  $-3n - (-1)^n \leq -3n + 1$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n + 1) = -\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

39. a. 0 b.  $-\infty$  c.  $-\infty$  d. pas de limite e.  $+\infty$ .

49. 1. a.  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = \frac{13}{3} \approx 4,3$ ,  $u_2 = \frac{53}{9} \approx 5,9$ ,

$u_3 = \frac{187}{27} \approx 6,9$ ,  $u_4 = \frac{617}{81} \approx 7,6$ ,

$u_5 = \frac{1963}{243} \approx 8,1$ ,  $u_6 = \frac{6113}{729} \approx 8,4$ ,

$u_7 = \frac{18787}{2187} \approx 8,6$ ,  $u_8 = \frac{57257}{6561} \approx 8,7$ ,  $u_9 \approx 8,8$ .

b.  $(u_n)$  semble être croissante et majorée par 9.

2. Par récurrence sur la propriété  $P(n)$  :  $u_n \leq 9$ .

Initialisation : on a  $u_0 \leq 9$ .  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel  $n$



tel que  $u_n \leq 9$ . Alors en multipliant chaque membre de l'inégalité par  $\frac{2}{3}$  et en ajoutant 3 on obtient  $u_{n+1} \leq 9$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 3 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$ .

Comme  $u_n \leq 9$  alors  $-\frac{1}{3}u_n + 3 \geq 0$  et donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ . La suite est croissante.

4. La suite est croissante et majorée donc elle converge. (Théorème de convergence monotone)

### Pistes

78 1. Reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{10}$ .

2. Écrire le terme général de la suite à l'aide de la somme des termes d'une suite géométrique et utiliser la question 1. pour la convergence.

95 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul  $u_n \geq n + 1$ .

### Pour travailler en autonomie

101 1. À l'aide de la calculatrice pour des grandes valeurs de  $n$  on conjecture une limite égale à 2.

2. Pour tout réel  $a$  strictement positif  $v_n \in ]2 - a; 2 + a[$  dès que  $n > \frac{1}{a}$ .

102

$u \leftarrow 2$   
 $n \leftarrow 0$   
 Tant que  $u \leq A$   
      $u \leftarrow 2u + 2n^2 - n$   
      $n \leftarrow n + 1$   
 Fin Tant que

103 a.  $-\infty$ . b.  $-\infty$ . c.  $+\infty$ .

104 1.  $-\infty$ . 2.  $-\infty$ . 105 1. Faux. 2. Vrai.

106 a.  $-\infty$  (en développant).  
 b.  $+\infty$  (en développant).

107 a.  $u_n \geq n - 1$  donc la limite est  $+\infty$ .

b.  $\frac{n-1}{n^2-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2-1}$  donc par le théorème des gendarmes la limite est 0.

c.  $u_n \leq -\sqrt{n} - 1$  donc la limite est  $-\infty$ .

108 a.  $\frac{2n-1}{n^2-1} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n^2-1}$  donc par le théorème des gendarmes la limite est 2.

b.  $u_n \geq 2n^3 - 1$  donc la limite est  $+\infty$ .

c.  $\frac{\sqrt{n}-1}{n} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{n}+1}{n}$  donc par le théorème des gendarmes la limite est 0.

109 1. Par récurrence sur la propriété  $P(n): u_n \geq 2^n$ .

Initialisation:  $u_4 = 26$  et  $2^4 = 16$ , donc  $u_4 \geq 2^4$ .  $P(0)$  est vraie.

Hérédité: on considère un entier naturel  $n$  supérieur à 4 tel que  $u_n \geq 2^n$ .

Alors  $u_{n+1} \geq 2^{n+1} + 1 \geq 2^{n+1}$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

110 1. Vrai (sauf si la raison est nulle).

2. Faux car la suite tend vers  $-\infty$ .

111 1.  $+\infty$ . 2. 0. 3.  $+\infty$ .

4. On factorise par  $15^n$  et on obtient une limite égale à  $-\infty$ .

5. On factorise au numérateur par  $4^n$  et par  $5^n$  au dénominateur. On obtient une limite égale à 0.

112 a. 0. b.  $+\infty$ . c. 4.

113 1. Pour tout entier naturel  $n$ ,

$u_n - (-5) = 2(n+1)^2$  donc  $u_n \geq -5$ .

2. Par récurrence:

Initialisation:  $v_0 = 0$  donc  $v_0 \leq 8$ .

$P(0)$  est vraie.

Hérédité: on considère un entier naturel  $n$  tel que  $v_n \leq 8$ .

Alors  $\frac{1}{2}v_n^2 + 8 \leq 40$ . Donc  $\sqrt{\frac{1}{2}v_n^2 + 8} \leq \sqrt{40}$ .

Or  $\sqrt{40} = 6,3$  donc  $v_{n+1} \leq 8$ .

114 c. et d.

115 1.  $a_0 = 7\,000$ . 80 % des abonnés de l'année 2020 +  $n$  dont le nombre est noté  $a_n$  se réabonnent ( $0,8a_n$ ) et il y a 4 000 nouveaux abonnés (+4 000).

2. Par récurrence sur la propriété  $P(n)$ :

$a_n \leq 20\,000$ .

Initialisation:  $a_0 = 7\,000$  donc  $a_0 \leq 20\,000$ .  $P(0)$  est vraie.

Hérédité: on considère un entier naturel  $n$  tel que  $a_n \leq 20\,000$ .

Alors  $0,8a_n + 4\,000 \leq 0,8 \times 20\,000 + 4\,000$ . Donc  $a_{n+1} \leq 20\,000$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$ ,

$a_{n+1} - a_n = -0,2a_n + 4\,000$ . Or  $a_n \leq 20\,000$ . Donc  $a_{n+1} - a_n \geq 0$ . La suite est croissante.

4. La suite est croissante et majorée donc elle converge. (Théorème de convergence monotone)

### Revoir des points essentiels

116 a.  $+\infty$ . b.  $+\infty$ . c. 0. d.  $+\infty$ .

117 a.  $-\infty$ . b. 0. c.  $-\infty$ . d.  $+\infty$ .

118 Pour tout entier naturel  $n$ ,

$v_n - 7 = -2(n^2 - 7n + 12)$ . On factorise pour obtenir  $v_n - 7 = -2(n-3)(n-4)$  et en étudiant le signe on obtient pour tout entier naturel  $n$ ,  $-2(n^2 - 7n + 12) \leq 0$ . Donc  $v_n \leq 7$ .

119 Par récurrence sur la propriété  $P(n): u_n \leq 3$ .

Initialisation:  $u_0 = 3$  donc  $u_0 \leq 3$ .  $P(0)$  est vraie.

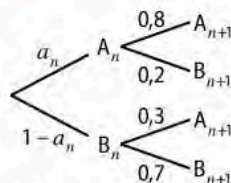
Hérédité: on considère un entier naturel  $n$  tel que  $u_n \leq 3$ .

Alors  $2u_n - 5 \leq 2 \times 3 - 5$ . Donc  $u_{n+1} \leq 3$ .

### Pour se préparer à l'écrit

#### Sujet A

1. a.



b. D'après la formule des probabilités totales avec la partition  $(A_n, B_n)$ :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
 &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\
 &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\
 &= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3 \\
 &= 0,5a_n + 0,3.
 \end{aligned}$$

2. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal

$$\begin{aligned}
 \text{à } 1, u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,6 \\
 &= 0,5a_n + 0,3 - 0,6 \\
 &= 0,5a_n - 0,3 \\
 &= 0,5(a_n - 0,6) \\
 &= 0,5u_n.
 \end{aligned}$$

Donc la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison 0,5.

3. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $u_n = u_1 \times 0,5^{n-1}$ . Or  $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$ .

Donc  $u_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$ .

Et:  $a_n = u_n + 0,6 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$ .

La limite ne dépend pas de la valeur de  $a$ .

#### Sujet C

1. Faux. 2. Faux. 3. Vrai. 4. Vrai. 5. Faux.

### 5 FONCTIONS : LIMITES ET DÉRIVATION

#### Se tester pour un bon départ

1 a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 2n + 6) = +\infty$ .

b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - n^2 - n^3) = -\infty$ .

c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n)(2 + n) = -\infty$ . d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ .

6 a. Vrai. b. Vrai. c. Vrai. d. Faux.

8 Pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ donc}$$

$$g'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}}.$$

#### Pour maîtriser les bases

29 •  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ .

38 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x) = -\infty$ .

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

2. a. Sur  $]7; +\infty[$ ,  $7 - x < 0$ . b.  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = -\infty$ .

45 1. Par croissances comparées:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

2. a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 5) = -5$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ . c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$ .

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$ .

48  $f = u^2$  avec  $u(x) = e^x + 1$  et  $u'(x) = e^x$ .

Donc pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = 2u'(x) \times u(x) = 2e^x(e^x + 1).$$



## Pistes

**134** Utiliser la valeur de  $f(0)$  pour calculer  $a$ , puis la valeur de  $f'(0)$  pour calculer  $b$ .

**141** Étudier les variations de  $f'$  pour en déduire son signe.

## Pour travailler en autonomie

**145**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**146**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}e^x \right) = -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 7x^2 - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$ .

**147** 1. a. 2. d.

**148**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**149** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  : il y a une asymptote d'équation  $x = 0$  (axe des ordonnées).

**150** 1.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ .

2. Il y a une asymptote d'équation  $x = 1$  et une d'équation  $y = -1$  (en  $+\infty$ ).

**151** 1.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

2. Il y a une asymptote d'équation  $x = 2$ .

**152** •  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 - 2e$ .

**153** Réponses a et d.

**154** 1. Pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$  donc  $5x - 0,1 \leq f(x) \leq 5x + 0,1$ .

•  $f(x) \leq 5x + 0,1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x + 0,1) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

•  $5x - 0,1 \leq f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 0,1) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. Pour tout réel  $x > 0$ , on a :

$5 - \frac{0,1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 5 + \frac{0,1}{x}$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 5 - \frac{0,1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 5 + \frac{0,1}{x} \right) = 5$

donc d'après le théorème des gendarmes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$ .

**155** Pour tout réel  $x > 1$  :

•  $2 + \frac{1}{x^2 - 1} \leq f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) = +\infty$  donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

•  $2 + \frac{1}{x - 1} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x - 1}$  et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) = 2$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

**156** •  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$  donc

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**157** •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

•  $f(x) = 7e^x - xe^x$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7e^x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$  donc

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

**158**  $f'(x) = 6(x^2 + 1)e^{x(x^2+3)}$ .

$g'(x) = -3 \times 2x(x^2 + 3)^{-4} = \frac{-6x}{(x^2 + 3)^4}$ .

**159** Réponse c.

**160** 1.  $f'(x) = 3(e^x + 1)(e^x + x + 1)^2$

2. Équation de la tangente :  $y = 24x + 8$ .

**161** 1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$ .

3.  $f$  est décroissante sur  $\left] -\infty; -\frac{1}{2} \right]$  et croissante sur  $\left[ -\frac{1}{2}; +\infty \right]$ . Par conséquent,  $f$  admet un minimum en  $-\frac{1}{2}$ . Ce minimum est :  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**162** 1. a.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ .

Il y a une asymptote d'équation  $x = -1$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. a.  $f'(x) = 0,5e^{0,5x} + \frac{2}{(x+1)^2}$ .

b. Pour tout réel  $x$  de  $]-1; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissante sur  $]-1; +\infty[$ .

3. Équation de la tangente :  $y = 2,5x - 1$ .

**163** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

2. a. Pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,

$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}(2e^x + 1)}{e^{-x}(e^x - 1)} = \frac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

3. Il y a une asymptote d'équation  $x = 0$  (axe des ordonnées) et une d'équation  $y = 2$  (en  $+\infty$ ).

4. a.  $f'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}$ .

b. Pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$  donc  $f$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

**164** 1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. •  $f'(x) = 4x^3 + 6x - 10$  et  $f''(x) = 12x^2 + 6$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f''(x) > 0$  donc  $f'$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

• Pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = x^3 \left( 4 + \frac{6}{x^2} - \frac{10}{x^3} \right)$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ .

•  $f'(1) = 4 + 6 - 10 = 0$ .

3. D'après le tableau de variation de  $f'$ ,  $f'(x) \leq 0$  sur  $]-\infty; 1]$  et  $f'(x) \geq 0$  sur  $[1; +\infty[$ .

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0    | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-6$ | $+\infty$ |

## Revoir des points essentiels

**165** 1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{3-x} = -\infty$ . 2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{2-x} = +\infty$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2+e^x} = 0$ . 4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2+e^x} = \frac{1}{2}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(5-3\sqrt{x}) = -\infty$ . 6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x^3 + \frac{2}{x} \right) = +\infty$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x^2 + 9) = -\infty$ . 8.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x + 1) = -\infty$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(e^x - 1) = 0$ . 10.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^x}{x-4} = -\infty$ .

**166** 1.  $f'(x) = -2xe^{-x^2} + 1$ . 2.  $f'(x) = 6e^{3x+1}$ .

3.  $f'(x) = -xe^{2-x^2}$ . 4.  $f'(x) = 24x(4x^2 - 1)^2$ .

5.  $f'(x) = 24x(3x^2 - 1)^3$ . 6.  $f'(x) = 5e^x(e^x - 1)^4$ .

7.  $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 + 5)^3}$ . 8.  $f'(x) = \frac{-30x}{(x^2 + 5)^4}$ .

9.  $f'(x) = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 1}}$ . 10.  $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 8}}$ .

## Pour se préparer à l'écrit

### Sujet A

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2.  $f'(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$  et

$f''(x) = 6x^2 + 6x - 12$ .

3. •  $f''(x)$  est positif sur  $]-\infty; -2]$  et sur  $[1; +\infty[$  et négatif sur  $]-2; 1]$ .

Donc  $f'$  est croissante sur  $]-\infty; -2]$  et sur  $[1; +\infty[$ , et décroissante sur  $]-2; 1]$ .

•  $f''(x) = x^3 \left( 2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f''(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty$ .

• On vérifie que  $f'(-\frac{7}{2}) = 0$  et  $f'(1) = 0$ .

4. a.  $f'(x) \leq 0$  sur  $]-\infty; -\frac{7}{2}]$  et  $f'(x) \geq 0$  sur  $[-\frac{7}{2}; +\infty[$ .

|         |           |                              |               |           |
|---------|-----------|------------------------------|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{7}{2}$               | 1             | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0                            | 0             | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f\left(-\frac{7}{2}\right)$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |

avec  $f\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{2107}{32}$ .

### Sujet E

1. a.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{5}} = 0$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$ .

b. Pour tout  $t$  positif,  $f'(t) = -196e^{-\frac{1}{5}}$ .

$f'(t) < 0$  donc  $f$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

|         |       |           |
|---------|-------|-----------|
| $t$     | 0     | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | -     |           |
| $f(t)$  | 1 000 | 20        |

2. a.  $d(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20 - \left( 980e^{-\frac{t+1}{5}} + 20 \right)$

$d(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} - 980e^{-\frac{t+1}{5}}$

$d(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} - 980e^{-\frac{t}{5}} \times e^{-\frac{1}{5}}$



$$d(t) = 980 e^{-\frac{t}{5}} \left(1 - e^{-\frac{t}{5}}\right)$$

b.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$ .

La température finira par se stabiliser et comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$ , elle se stabilisera à 20 °C.

## 6 CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ

### Se tester pour un bon départ

2 a. Pour tout réel  $x$  de  $[-4; 2]$  :

$-3 \leq g(x) \leq 5$ .

b.  $k$  doit appartenir à  $[-3; 5]$ .

4 b.

7 1. Faux. 2. Vrai.

### Pour maîtriser les bases

26  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = \frac{3}{2}$  et  $u_3 = \frac{5}{3}$ .

30 1.  $f(-3) = -11$  et  $f(3) = 13$ .

2.  $f$  est continue sur  $[-3; 3]$ , 0 est compris entre  $f(-3)$  et  $f(3)$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  possède au moins une solution dans  $[-3; 3]$ .

3. On utilise le résultat de la question 2., puisque 6 est compris entre  $f(-3)$  et  $f(3)$ .

33 1. a. Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = 3x^2 + 1$ .

b.  $f$  est une fonction polynôme donc continue sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) > 0$  ;  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $f(0) = -9$  et  $f(4) = 59$ ,  $f$  est continue, strictement croissante sur  $[0; 4]$ , d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$ , a une unique solution  $\alpha$  dans  $[0; 4]$ .

3. a.  $f(1) = -7$  et  $f(2) = 1$ .

b. On en déduit que  $1 < \alpha < 2$ .

40 1. La tangente à  $\mathcal{C}_f$  traverse la courbe  $\mathcal{C}_f$  donc  $A$  est un point d'inflexion.

2. On lit que sur  $[-3; -1]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessous de toutes ses tangentes, donc  $f$  est concave et sur  $[-1; 1]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de toutes ses tangentes donc  $f$  est convexe.

### Pistes

60 Étudier les variations de  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h = f - g$ .

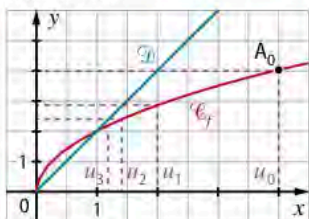
94 Étudier et se servir de la convexité sur  $[0; +\infty[$ , de la fonction racine carrée.

### Pour travailler en autonomie

96 1.  $f$  est continue en  $-1$  mais pas continue en 2.

2.  $f$  n'est pas continue en tout point de  $[-4; 5]$ , puisque discontinue en 2.

97 1.



2. On conjecture que  $(u_n)$  décroît et que  $(u_n)$  converge vers 1.

3.  $f$  croît sur  $[0; +\infty[$ .

4. Pour tout naturel  $n$ , soit  $P(n)$  : «  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$  » ;

$u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{4} = 2$ .  $P(0)$  est vraie car  $1 \leq u_1 \leq u_0$ .

Soit  $n$  un naturel fixé tel que  $P(n)$  est vraie, prouvons que  $P(n+1)$  est vraie. Par hypothèse :

$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$  ; comme  $f$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ , on a :  $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$  c'est-à-dire

$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$  ;  $P(n+1)$  est vraie. D'après le

principe de récurrence  $P(n)$  est vraie donc  $(u_n)$  est décroissante, minorée par 1.

5.  $(u_n)$  est décroissante minorée donc  $(u_n)$  converge vers un réel  $L$ .

6.  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$  et pour tout naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  donc  $L$  vérifie  $L = f(L)$ . L'équation

$f(x) = x$  équivaut à  $x = x^2$  ce qui équivaut à  $x = 0$  ou  $x = 1$ . Comme  $(u_n)$  est minorée par 1, on en

déduit que  $L = 1$ .

98 1. Pour tout réel  $x$  de  $[0; 2]$ ,

$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{3+0,5x}}$  ;  $f'(x) > 0$  sur  $[0; 2]$  donc  $f$  croît sur  $[0; 2]$ .

|     |            |   |
|-----|------------|---|
| $x$ | 0          | 2 |
| $f$ | $\sqrt{3}$ | 2 |

2. Pour tout naturel  $n \geq 1$ , soit  $P(n)$  :

«  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$  » :  $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et

$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{12+\sqrt{2}}$  ;  $u_1 \approx 0,7$  et  $u_2 \approx 1,8$  donc  $P(1)$  est vraie car  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 2$ . Soit  $n$  un naturel

non nul fixé tel que  $P(n)$  est vraie, prouvons que  $P(n+1)$  est vraie. Par hypothèse :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$  et comme sur  $[0; 2]$ ,  $f$  est croissante, donc

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$  c'est à dire  $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$  donc  $P(n+1)$  est vraie.

D'après le principe de récurrence  $P(n)$  est vraie.

3.  $(u_n)$  est croissante majorée donc converge, vers un réel  $L$  qui vérifie  $L = f(L)$  car  $f$  est continue

sur  $[0; 2]$  et pour tout naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . L'équation  $f(x) = x$  équivaut à  $3 + 0,5x = x^2$  ce qui

équivaut à  $x = -1,5$  ou  $x = 2$  or  $(u_n)$  est minorée par 0 donc  $L = 2$ .

99 1. Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ , donc  $f'(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}$  ;  $f$  croît strictement sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;  $f$  est continue, strictement croissante, l'équation

$f(x) = 4$  possède une unique solution.

100 1.  $f(-10) = -938$  et  $f(10) = 942$ , d'où  $f(-10) \times f(10) < 0$  ; de plus  $f$  est continue sur

$[-10; 10]$  donc l'équation  $f(x) = 0$  possède au moins une solution sur  $[-10; 10]$ .

2. Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = 3x^2 - 6$  puis  $f'(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ . Ce polynôme du 2<sup>nd</sup> degré est positif strictement à l'extérieur de ses

racines  $-\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ , en particulier sur  $]-\infty; -\sqrt{2}[$  donc sur  $[-3; -2]$  ;  $f$  croît strictement sur cet

intervalle.

3.  $f$  est continue strictement croissante sur  $[-3; 2]$ ,  $f(-3) = -7$  et  $f(2) = 6$  donc l'équation

$f(x) = 0$  possède bien une unique solution.

4.  $-2,7 < \alpha < -2,6$ .

101 1. a. Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = e^x(x+1)$ .

$f'(x)$  est du signe de  $x+1$  puisque  $e^x > 0$ . Sur  $[-3; -1]$ ,  $x+1 \leq 0$  donc  $f'(x) \leq 0$ ,  $f$  décroît,

$f(-3) = -3e^{-3}$  et  $f(-1) = -e^{-1}$  donc  $f(x) < 1$  sur  $[-3; -1]$ . Sur  $[-1; 3]$ ,  $x+1 > 0$  donc  $f'(x) > 0$ ,

ainsi  $f$  croît strictement sur  $[-1; 3]$ ,  $f$  est continue sur  $[-1; 3]$  et 1 est compris entre  $f(-1) = -e^{-1}$

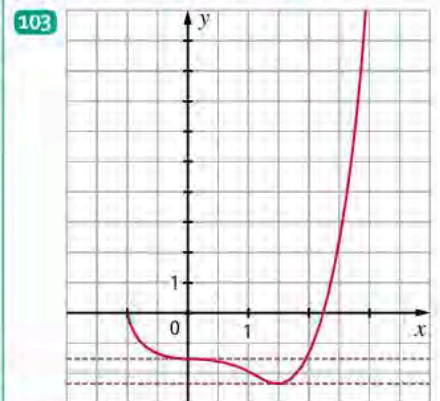
et  $f(3) = 3e^3$  : l'équation  $f(x) = 1$  a une seule solution dans  $[-1; 3]$  et ainsi dans  $[-3; 3]$ .

b.  $f(0) = 0$  et  $f(1) = e$  :  $\alpha \in [0; 1]$ .

2.

```
from math import *
def f(x):
 return x*exp(x)
def d():
 a=0; b=1
 while (b-a)>0.01:
 y=f((a+b)/2)
 if y>1:
 b=(a+b)/2
 else:
 a=(a+b)/2
 return a, b
```

102 1. Faux. 2. Faux. 3. Vrai.



104 Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 72x$  et  $f''(x) = -12x^2 - 12x + 72 = -12(x+3)(x-2)$  ;  $f''$

est négative sur  $]-\infty; -3[ \cup ]2; +\infty[$  et positive sur  $[-3; 2]$  donc  $f$  est concave sur  $]-\infty; -3[$  puis

$f$  est convexe sur  $[-3; 2]$ , et concave sur  $[2; +\infty[$ .

105 d.

106 Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = -3e^{-3x+4}(3x-50)$  et  $f''(x) = 27e^{-3x+4}(x-17)$ . La courbe de  $f$

possède un seul point d'inflexion en  $x = 17$  car  $f''$  s'annule et change de signe uniquement en 17.

107 1. Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -e^{-x} + 2x$  et  $f''(x) = e^{-x} + 2$ .  $f''$  est toujours strictement

positive donc  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

2. L'équation recherchée est  $y = -x - 3$ .

3.  $f$  est convexe donc sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes d'où pour tout

réel  $x$  :  $f(x) \geq -x - 3$ .

### Revoir des points essentiels

108 1. Pour tout réel  $x$  :  $g'(x) = 5x^4 + 4$  ;  $g'(x) > 0$  ;  $g$  croît strictement sur  $[-1; 0]$ ,  $g$  est continue sur

$[-1; 0]$ ,  $g(-1) = -3$  ;  $g(0) = 2$  : l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

2.  $-0,50 \leq \alpha \leq -0,49$ .

109 1. Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = -e^{-x} - 1$  ;  $f'(x) < 0$  ;  $f$  décroît strictement sur  $\mathbb{R}$ , et donc sur

$[0; 3]$ ,  $f$  est continue,  $f(0) = 9$  ;  $f(3) \approx 5,05$  donc l'équation  $f(x) = 6$  possède une seule solution  $\alpha$ .

2.  $2,12 \leq \alpha \leq 2,13$ .



**110** Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = 36x^2 - 24x$  et  $f''(x) = 72x - 24$ . Sur  $]-\infty; \frac{1}{3}[$ ,  $f''(x) \leq 0$  donc  $f'$  est concave et sur  $]\frac{1}{3}; +\infty[$ ,  $f''(x) \geq 0$  donc  $f'$  est convexe. Le point d'abscisse  $x = \frac{1}{3}$  est le seul point d'inflexion.

**111** Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = e^{3x}(2 - 3x)$  et  $f''(x) = 3e^{3x}(1 - 3x)$ . Sur  $]-\infty; \frac{1}{3}[$ ,  $f''(x) \geq 0$  donc  $f'$  est convexe puis sur  $]\frac{1}{3}; +\infty[$ ,  $f''(x) \leq 0$  donc  $f'$  est concave. Le point d'abscisse  $x = \frac{1}{3}$  est le seul point d'inflexion.

## Pour se préparer à l'écrit

### Sujet A

1. Pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = e^{-x}(57 - 25x)$  ; pour tout réel  $x$  :  $e^{-x} > 0$  et  $57 - 25x > 0$  équivaut à  $x < 2,28$ .
2. Sur  $[1,5 ; 2,28[$ ,  $f'(x) > 0$ , et sur  $]2,28 ; 6]$ ,  $f'(x) < 0$ .

|         |               |               |             |
|---------|---------------|---------------|-------------|
| $x$     | 1,5           | 2,28          | 6           |
| $f'(x)$ | 0             | +             | 0           |
| $f(x)$  | $5,5e^{-1,5}$ | $25e^{-2,28}$ | $118e^{-6}$ |

3. Sur  $[4 ; 5]$ ,  $f'$  est strictement décroissante, continue,  $f(4) = 68e^{-4} \approx 1,25$  et  $f(5) = 93e^{-5} \approx 0,63$  : l'équation  $f(x) = 1$ , a une seule solution  $\alpha$  dans  $[4 ; 5]$ .
4. a. Il est inférieur à 0,1.
- b. Écrire ligne 13 : return b. 5.  $4,3 \leq \alpha \leq 4,4$ .

### Sujet C

1. c.
2. b.
3. b. et c.

## 7 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

### Se tester pour un bon départ

2. a. Faux. b. Vrai. c. Faux.

5. a.  $e^{x+2}$ . b.  $e^{3x+5}$ . c.  $e^{7-4x}$ . d.  $e^{x+2}$ .

9. a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + x = +\infty$

- b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - e^x) = -\infty$

- c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = +\infty$

- d.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)e^x = 0$

### Pour maîtriser les bases

28. 1.  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ .

2.  $f$  est décroissante sur  $]0 ; 1]$  et croissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

34. 1.  $x = \frac{e^{-2}}{5}$ . 2.  $x = \frac{e^2}{4}$ .

45. 1.  $\ln(5) + \ln(3) + 1$ .

2.  $\ln(5) + 2\ln(3) + 2$ .

3.  $2\ln(5) + \ln(3) - 4$ .

52. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 + \ln(x) = -\infty$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 + \ln(x) = +\infty$ .

### Pistes

85. Déterminer, en fonction de  $a$ , une équation de la tangente  $T$ .

104. On peut commencer à regarder ce qu'il se passe sur des exemples.

121. Étudier les variations de  $f_n$  définie par  $f_n(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$ .

### Pour travailler en autonomie

142. A =  $-\frac{11}{2} \ln(3)$  ; B =  $14 \ln(2) - 10 \ln(3)$  ;

$$C = 8 \ln(3) - \frac{3}{2} \ln(2) ; D = \ln(3) + \ln(2) + \frac{9}{2} ;$$

$$E = 2 - \frac{3}{2} \ln(3) - \frac{3}{2} \ln(2) ; F = 2 + \ln(3) + 3 \ln(2).$$

143.  $2\ln(\sqrt{3} - 1) + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} + 4}{4}\right)$

$$= \ln\left((\sqrt{3} - 1)^2 \left(\frac{2\sqrt{3} + 4}{4}\right)\right)$$

$$= \ln\left((4 - 2\sqrt{3})\left(\frac{2\sqrt{3} + 4}{4}\right)\right)$$

$$= \ln(1) = 0.$$

144.  $2\ln x - \ln(x^2 + 1) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

145. 1.  $\ln(e^x + 1) - x = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x)$

$$= \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$= \ln(1 + e^{-x}).$$

2.  $f(x) > 0$  pour tout  $x$  réel.

146. 1. Condition d'existence :

$$x \in ]-\infty ; 5[.$$

$$\text{Solution : } x = 5 - e^{-2}.$$

$$2. x = -\sqrt{\ln 3 - 1} \text{ ou } x = \sqrt{\ln 3 - 1}.$$

147. 1. Condition d'existence :

$$x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]2 ; +\infty[.$$

$$\text{Solution : } [-2 ; 0[ \cup ]2 ; 4].$$

$$2. x \in \left[\frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{2}\right) ; +\infty\right[$$

3. Conditions d'existence :  $x \in ]0 ; +\infty[$ .

$$\text{Solution : } ]0 ; e^{\frac{2}{3}}[ \cup ]e^5 ; +\infty[.$$

148. 1. Condition d'existence :  $x \in ]3 ; +\infty[$ .

$$\text{Solution : } x = 8.$$

2. Condition d'existence :  $x \in ]3 ; +\infty[$ . Pas de solution.

149. 1. Condition d'existence :  $x \in ]3 ; +\infty[$ . Pas de solution.

2. Conditions d'existence :  $x \in ]-\frac{1}{2} ; 4[$ .

$$\text{Solution : } ]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[ \cup ]3 ; 4[.$$

150. 1.

```
1 def bambou():
2 n = 0
3 while 500*1.05**n - 400 < 1000
4 n = n + 1
5 return(n)
```

2.  $500 \times 1,05^n - 400 \geq 1\,000$  soit  $n \geq 22$ .

151. 1.  $P(3) \approx 0,467\,4$  soit environ 47 %.

2.  $P(t) \geq 0,9$  à partir de 11 jours.

152. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+2}{\ln(x)-1}\right) = 0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{3x+2}{\ln(x)-1}\right) = -\infty$ .

La droite d'équation  $x = e$  est asymptote verticale à la courbe.

153. 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale à la courbe.

154. 1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \ln\left(\frac{x^2-9}{x^2+1}\right) = -\infty$  ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2-9}{x^2+1}\right) = 0$$

2. La droite d'équation  $x = 3$  est asymptote verticale à la courbe.

La droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale à la courbe.

155. 1.  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 \ln(x+1) = 0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = +\infty$ .

156. 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\ln(x)} = +\infty$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 1 - \ln(x) = +\infty$ .

157.  $f'(x) = e^x - 3$ .

$f$  est décroissante sur  $]-\infty ; \ln(3)]$  et croissante sur  $[\ln(3) ; +\infty[$ .

158. 1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right) = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right) = 0.$$

La droite d'équation  $x = -2$  est asymptote verticale à la courbe. La droite d'équation  $y = 0$  est asymptote à la courbe.

2.  $f'(x) = \frac{7}{(x-5)(x+2)}$ .

$f$  est croissante sur  $]-\infty ; -2[$ .

159. 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ . Pas d'asymptote.

2.  $g'(x) = 3 - \ln(x)$ .

$g$  est croissante sur  $]0 ; e^3]$  et décroissante sur  $[e^3 ; +\infty[$ .

3.  $g(x)$  positive sur  $]0 ; e^4]$  et négative sur  $[e^4 ; +\infty[$ .

4. On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur  $]0 ; e^3]$  et sur  $[e^3 ; +\infty[$ .  $3,72 < \alpha < 3,73$  et  $43,35 < \beta < 43,36$ .

160. 1.  $f(1) = -1$  et  $f'(1) = -2$

2. a.  $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{2x-a}{x^2}$

- b.  $f'(1) = -2$  équivaut à  $2 - a = -2$  soit  $a = 4$  ;

$f(1) = -1$  équivaut à  $a + b = -1$  soit  $b = -5$ .

Ainsi :  $f(x) = 2\ln(x) + \frac{4}{x} - 5$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale à la courbe.



4.  $f$  est décroissante sur  $]0; 2]$  et croissante sur  $[2; +\infty[$ .  
 5. Deux solutions, une sur  $]0; 2]$  et une sur  $[2; +\infty[$ .

### Revoir des points essentiels

161 Condition d'existence :

$x \in ]5; +\infty[$ . Solution :  $x = 6$ .

162 Condition d'existence :

$x \in ]7; +\infty[$ . Solution :  $]7; 8]$ .

163 Condition d'existence :

$x \in ]-1; 1[ \cup ]2; +\infty[$ .

Solution :  $] -1; \frac{1}{2}] \cup [3; +\infty[$ .

164  $f'(x) = 2\ln(x-1) + \frac{2x}{x-1}$ .

165  $f'(x) = \frac{2\ln(x) + 4}{x}$ .

166  $f'(x) = \frac{-2\ln(x) - 1}{x^2}$ .

### Pour se préparer à l'écrit

#### Sujet A

1. c. 2. b. 3. c. 4. d. 5. c. 6. c. 7. d.

#### Sujet D

1.  $f'(x) = x - 7 + \frac{6}{x} = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$ .

2. a.

|         |     |                |                |
|---------|-----|----------------|----------------|
| $x$     | 1   | 6              | 9              |
| $f'(x)$ | 0   | -              | 0              |
| $f$     | 7,5 | $\approx 0,75$ | $\approx 4,68$ |

b. Sur  $[6; 9]$ ,  $f(x) < 5$ , pas de solution. Sur  $[1; 6]$  une solution : on applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

c.  $2,55 < \alpha < 2,56$ .

d. La variable  $X$  contient la valeur 2,56, première valeur au centième pour laquelle  $Y > 5$ .

3. Le coût moyen est minimum pour une production de 600 pneus. Ce coût moyen est d'environ 75 euros.

## 8 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

### Se tester pour un bon départ

1. A ; E ; B ; D. 4.  $\sin x = -0,6$ .

6. a. Arrondis des affichages à 0,000 1 :

$[0,0; 1,5708; 3,1416]$

$[0,0; 0,7854; 1,5708; 2,3562; 3,1416]$ .

b. On obtient les  $n$  réels associés à la subdivision régulière de la moitié supérieure du cercle trigonométrique.

### Pour maîtriser les bases

32. a.  $f'(x) = -4 \sin(4x) - 2 \cos(2x)$ .

b.  $f'(x) = 2020 \sin(50 - 2020x)$ .

c.  $f'(x) = -300 \sin(30x) - 300 \sin(10x)$ .

44. 1. C'est sur le cercle n° 2.

2. L'ensemble solution est  $[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$ .

51. 1.  $f'(x) = 5 + 2 \cos(x)$ .

2. a. On a  $\cos(x) \geq -1$ . Donc  $2 \cos(x) \geq -2$ .

Donc  $5 + 2 \cos(x) \geq 3$ . Donc  $f'(x) \geq 3$ .

b. Puisque  $3 > 0$ , on déduit que, sur  $[0; 2\pi]$ , on a  $f'(x) > 0$ .

3. La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[0; 2\pi]$ .

De plus,  $f(0) = 0$  et  $f(2\pi) = 10\pi$ .

D'où le tableau de variation de  $f$ .

|        |   |         |
|--------|---|---------|
| $x$    | 0 | $2\pi$  |
| $f(x)$ | 0 | $10\pi$ |

### Pistes

82.  $f$  est impaire donc, pour tout réel  $x$ , on a  $f(-x) = -f(x)$ . On dérive chacun des deux termes de l'égalité.

93. On effectue le changement de variable  $X = \cos(x)$ .

### Pour travailler en autonomie

116. 1.  $f'(x) = -3 \sin(x) + 2 \cos(x)$ .

2.  $2f'(x) + 3f(x)$

$= 2(-3 \sin(x) + 2 \cos(x)) + 3(3 \cos(x) + 2 \sin(x))$

$= 13 \cos(x)$ .

117. 1.  $f'(x) = 2 \cos(x) + 1$ .

2. La tangente en  $a$  est parallèle à l'axe des abscisses lorsque  $f'(a) = 0$ , c'est-à-dire

$2 \cos a + 1 = 0$ , soit  $a = \frac{2\pi}{3}$  ou  $a = \frac{4\pi}{3}$ .

Il y a deux points solutions, dont les coordonnées respectives sont :

$(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3} + 2\pi + 3}{3})$  et  $(\frac{4\pi}{3}, \frac{-3\sqrt{3} + 4\pi + 3}{3})$ .

118. 1.  $f'(x) = -12 \sin(4x) + 15 \cos(3x)$ .

2. Au point A :  $y = 15x + 3$ .

Au point B :  $y = -15x + 15\pi + 3$ .

119. 1.  $y = 0$ .

2. On étudie le signe de  $f''(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

$f''(x) = -2 \cos(x) + 2 = -2(\cos(x) - 1)$ .

Or pour tout réel  $x$ , on a  $\cos(x) \leq 1$ .

Donc, pour tout réel  $x$ , on a  $f''(x) \geq 0$ .

Donc  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

3. a.  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  donc  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $T$ .

Donc, pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) \geq 0$ .

b. Donc on a  $2 \cos(x) + x^2 - 2 \geq 0$ , c'est-à-dire  $\cos(x) \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ .

120. 1.  $f$  est croissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , décroissante sur  $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$  et croissante sur  $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ .

2. a. Périodicité.

b. Périodicité ou Parité.

c. Périodicité ou Parité.

3. a.

|        |        |                  |                  |        |
|--------|--------|------------------|------------------|--------|
| $x$    | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $4\pi$ |
| $f(x)$ | 0      | 1                | -1               | 0      |

b.

|        |         |                   |                  |   |
|--------|---------|-------------------|------------------|---|
| $x$    | $-2\pi$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 |
| $f(x)$ | 0       | 1                 | -1               | 0 |

c.

|        |         |                   |                   |         |
|--------|---------|-------------------|-------------------|---------|
| $x$    | $-4\pi$ | $-\frac{7\pi}{2}$ | $-\frac{5\pi}{2}$ | $-2\pi$ |
| $f(x)$ | 0       | 1                 | -1                | 0       |

121. a. Vrai. b. Vrai. c. Vrai. d. Faux.

122. b.

123. a.  $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\}$  b.  $\mathcal{S} = \{-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\}$

c.  $\mathcal{S} = \{-\pi; \pi\}$  d.  $\mathcal{S} = \{-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

124. a.  $\mathcal{S} = [-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}]$  b.  $\mathcal{S} = [\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$

c.  $\mathcal{S} = [\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$  d.  $\mathcal{S} = [\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$

125.  $\mathcal{C}$  est au-dessus de l'axe des abscisses pour  $x \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi]$  et au-dessous

pour  $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}]$ .

126. 1.  $(2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$

$= 2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - \cos(x) - 1$

$= 2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1$ .

2.  $2 \cos(x) - 1 \leq 0$  pour  $x \in [-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$

et  $2 \cos(x) - 1 \geq 0$  pour  $x \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ .

Comme  $\cos(x) \geq -1$ ,  $\cos(x) + 1 \geq 0$ .

3.  $2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 \geq 0$  équivaut à  $(2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) \geq 0$  :  $\mathcal{S} = [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}] \cup \{-\pi; \pi\}$ .

127. 1. a.  $f'(x) = 1 + (-\sin(x)) \sin(x) + \cos(x) \cos(x) - 4 \cos(x) = 2 \cos^2(x) - 4 \cos(x) = 2 \cos(x)(\cos(x) - 2)$ .

b.  $f'(x) \leq 0$  pour  $x \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$  et

$f'(x) \geq 0$  pour  $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ .

b. Par conséquent,  $f$  est décroissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , croissante sur  $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$  et décroissante sur  $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ .

2. a.  $f''(x) = -4 \sin(x)(\cos(x) - 1)$ .

b.  $f''(x)$  est positif sur  $[0; \pi]$  et négatif sur  $[\pi; 2\pi]$ .

Donc  $f$  est convexe sur  $[0; \pi]$  et concave sur  $[\pi; 2\pi]$ . Puisque  $f''$  s'annule en  $\pi$  en changeant de signe, la courbe admet un point d'inflexion en  $\pi$ .

128. 1.  $f(-x) = f(x)$  :  $f$  est paire.

2.  $f(x + 2\pi) = f(x)$  :  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .

3.  $f'(x) = -\sin(x)(2 \cos(x) + 1)$ .

4. a. Pour tout  $x \in [0; \pi]$ , on a  $\sin(x) \geq 0$ .

Donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $-2 \cos(x) - 1$ . De plus,  $-2 \cos(x) - 1 \geq 0$  équivaut à  $\cos(x) \leq -0,5$

soit à  $x \in [\frac{2\pi}{3}; \pi]$ . Donc  $f'(x)$  est positif sur

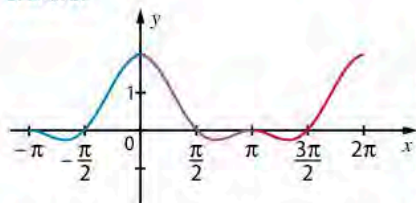
$[\frac{2\pi}{3}; \pi]$  et négatif sur  $[0; \frac{2\pi}{3}]$ .

b.

|        |   |                  |       |
|--------|---|------------------|-------|
| $x$    | 0 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ |
| $f(x)$ | 2 | -0,25            | 0     |



5. a. et b.



b. On obtient le tracé (en bleu) sur  $[-\pi; 0]$  par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis le tracé (en rouge) sur  $[\pi; 2\pi]$  par la translation de vecteur  $2\pi\vec{i}$  du tracé bleu.

129 1. Le dénominateur ne s'annule jamais.

2. a.  $f(-x) = -f(x)$  :  $f$  est impaire.

b.  $f(x + 2\pi) = f(x)$  :  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .

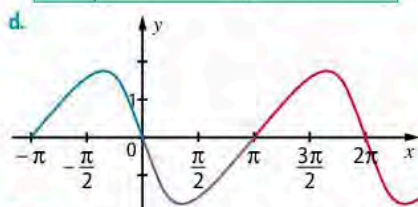
c. La courbe est symétrique par rapport à O et invariante par translation de vecteur  $2k\pi\vec{i}$ , avec  $k$  entier.

d. C'est le plus petit intervalle centré en 0 et d'amplitude  $2\pi$ .

3. a.  $f'(x) = \frac{3 - 6\cos(x)}{(\cos(x) - 2)^2}$ .

b.  $f'(x) \geq 0$  sur  $[\frac{\pi}{3}; \pi]$  et  $f'(x) \leq 0$  sur  $[0; \frac{\pi}{3}]$ .

|        |   |                 |       |
|--------|---|-----------------|-------|
| $x$    | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
| $f(x)$ | 0 | $-\sqrt{3}$     | 0     |



130 1. a.  $0 \leq 2\cos^2 x \leq 2$  donc  $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$ .

b. Les limites de  $f(x)$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  sont respectivement  $-\infty$  et  $+\infty$ .

c. C se situe entre deux droites.

2.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - 1)$  et  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - 1)$ ;

$(\pi; \pi + 1)$ ,  $(0; 1)$  et  $(2\pi; 2\pi + 1)$ .

131 1.  $f'(x) = -x \sin x$ . 2.  $f'(x) \leq 0$  sur I.

|        |   |            |
|--------|---|------------|
| $x$    | 0 | $\pi$      |
| $f(x)$ | 1 | $-\pi + 1$ |

4. La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur I ; de plus, 0 appartient à  $[-\pi + 1; 1]$ , donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution sur I.

## Revoir des points essentiels

132 1.  $f'(x) = 2 \sin(x) + 9 \cos(x)$ .

2.  $f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$ .

3.  $f'(x) = 5 \sin(7 - 5x)$ .

4.  $f'(x) = 10 \cos(10x - 1)$ .

5.  $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{(\cos(x) + 5)^2}$ .

6.  $f'(x) = 16 \sin(x) \cos(x)$ .

133 1.  $\mathcal{F} = \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$ ;  $\mathcal{F}' = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ .

2.  $\mathcal{F} = \left\{ -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$ ;  $\mathcal{F}' = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$ .

3.  $\mathcal{F} = \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$ ;  $\mathcal{F}' = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ .

4.  $\mathcal{F} = \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$ ;  $\mathcal{F}' = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ .

## Pour se préparer à l'écrit

### Sujet B

1. Vrai. 2. Faux. 3. Vrai.

4. Faux. 5. Vrai. 6. Vrai.

### Sujet D

1. L'aire est égale à  $\frac{1}{2} \times AH \times HM$ .

Or  $AH = AO + OH = 1 + \cos(\alpha)$  et  $HM = \sin(\alpha)$ . D'où le résultat.

2.  $\mathcal{A}'(\alpha) = \cos^2(\alpha) + \frac{1}{2} \cos(\alpha) - \frac{1}{2}$ .

3.  $P(X) = (X - 0,5)(X + 1)$

b.  $\mathcal{A}'(\alpha) = (\cos(\alpha) - 0,5)(\cos(\alpha) + 1)$ .

4.  $\mathcal{A}'(\alpha) \geq 0$  sur  $[0; \frac{\pi}{3}]$  et  $\mathcal{A}'(\alpha) \leq 0$  sur  $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ .

|                       |   |                       |                 |
|-----------------------|---|-----------------------|-----------------|
| $\alpha$              | 0 | $\frac{\pi}{3}$       | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\mathcal{A}(\alpha)$ |   | $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ | $\frac{1}{2}$   |

6. L'aire est maximale pour  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  et cette aire vaut  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

## PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

### Se tester pour un bon départ

2 a.  $u'(x) = v'(x) = \frac{1}{x+1}$ .

b. Puisque  $u'(x) - v'(x) = 0$  pour tout réel  $x$ , la fonction  $u - v$  est constante sur  $]0; +\infty[$ , donc  $u(x) - v(x) = k$ , et  $u(x) = v(x) + k$ , où  $k$  est une constante.

c.  $u(1) = \ln(4)$  et  $v(1) = \ln(2)$ , donc

$k = 2 \times \ln(2) - \ln(2) = \ln(2)$ .

4.  $\frac{3}{x-2} - 2 = \frac{3 - 2(x-2)}{x-2} = \frac{7-2x}{x-2}$ .

7 b.

### Pour maîtriser les bases

24 1.  $F'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$ . Puisque  $F'(x) = f(x)$  pour tout réel  $x$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Autres primitives :  $F_1(x) = x \ln(x) + 1$  et  $F_2(x) = x \ln(x) + 2$ .

34 1.  $F = u^2 u'$ , avec  $u(x) = \sin(x)$ .

2.  $F(x) = \frac{1}{3} \sin^3(x)$ .

40 1.  $y' = \frac{5}{2}y$ , soit  $a = \frac{5}{2}$ .

2. Solution :  $y = ke^{\frac{5}{2}x}$  avec  $k$  réel.

45 1.  $y = -2$ .

2. L'équation  $y' = 10y$  a pour solution générale

$y = Ce^{10x}$ , avec  $C$  réel, donc les solutions de (E) sont de la forme  $y = Ce^{10x} - 2$ .

### Pistes

104 Déterminer une primitive de  $x \mapsto f(ax+b)$  à l'aide de  $F$ .

129 Chercher une solution particulière de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$ .

### Pour travailler en autonomie

133 1.  $g'(x) = x^3 \times \frac{1}{x} + 3x^2 \ln(x) = f(x)$ , donc  $g$  est une primitive de  $f$ .

2.  $g_1(x) = x^2(3 \ln(x) + 1) - 1$ .

134 1.  $y = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 - \frac{2}{x}$ . 2.  $y = 5 \ln(x) - 4\sqrt{x}$ .

135 1.  $\frac{2}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{(a+b)x - 2a - b}{(x-1)(x-2)}$ .

D'où  $a = -4$  et  $b = 7$ .

2.  $F(x) = -4 \ln(x-1) + 7 \ln(x-2)$ .

3.  $F_1(x) = -4 \ln(x-1) + 7 \ln(x-2) + 4 \ln(3)$ .

136 1.  $F(x) = \ln(2x-5) + C$ , avec  $C$  réel.

2.  $G(x) = \frac{1}{4(1-2x)^2} + C$  ( $C$  réel).

137 Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors,  $F'(x) = f(x)$ , donc  $F'(x) \geq 0$  pour  $x \leq 1$  et  $F'(x) \leq 0$  pour  $x \geq 1$ .  $F$  croît pour  $x \leq 1$  et décroît pour  $x \geq 1$ . Ainsi,  $F = g$ .

138 a.  $f(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x) \times \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$  donc

$F(x) = \frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \frac{3}{2} \ln(x)$ .

b.  $g(x) = x - 4 + \frac{6}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ , d'où :

$G(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \ln(x) + 2\sqrt{x}$ .

c.  $h(x) = \frac{e^{-2x}}{(e^{-2x} + 4)^3}$ , de la forme  $-\frac{1}{2}u'u^{-3}$ , d'où

$H(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{(e^{-2x} + 4)^2}$ .

139 1. Pour tout  $x > 0$ , puisque  $G(x) = \frac{g(x)}{x}$ ,

alors  $G'(x) = \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$ , et  $xg'(x) - g(x) = x^2G'(x)$ , soit  $g(x) - xg'(x) = -x^2G'(x)$ .

Ainsi,  $g$  possède la propriété P si et seulement si  $-x^2G'(x) = \frac{2x}{x+2}$  soit  $G'(x) = \frac{2}{x(x+2)}$ .

Ceci équivaut à  $G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$ , car  $\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$ .

2.  $G(x) = \ln(x+2) - \ln(x) + C$ . Donc E est l'ensemble des fonctions de la forme  $x \mapsto x \ln(x+2) - x \ln(x) + kx$ , où  $k$  est un réel.

140  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$  et

$(x-1)f'(x) + f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x-1} + \frac{x^2}{x-1} = 2x$ , donc  $f$  est solution de l'équation différentielle.

141 b. et c.

142 1.  $y = Ce^{10x}$ , avec  $C$  réel.

2.  $y(2) = 3$  équivaut à  $Ce^{20} = 3$ , soit  $C = 3e^{-20}$ . Ainsi,  $f(x) = 3e^{-20}e^{10x} = 3e^{10x-20}$ .

143 1. La solution constante est  $y = \frac{3}{2}$ . L'ensemble des solutions est formé des fonctions  $u$  telles que  $u(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$  avec  $C$  réel.



2.  $f(x) = -e^{-2x} + \frac{3}{2}$ .

144 Réponses a. et d.

145 1. L'équation devient  $z' - 4z = 1$ . Elle a pour solutions  $z = Ce^{4x} + \frac{1}{4}$ , avec  $C$  réel.

2.  $y = \frac{C}{4}e^{4x} + \frac{1}{4}x + D$ , avec  $C$  et  $D$  réels.

146 1.  $N(t) = 10^9 e^{at}$ .

2. On a :  $e^{18a} = \frac{1}{2}$ , soit  $a = -\frac{\ln(2)}{18}$ .

3. On résout :  $N(t) < 100$ , soit  $e^{at} < 10^{-7}$ , soit  $t > -\frac{7\ln(10)}{a}$ , soit  $t > \frac{126\ln(10)}{\ln(2)}$ , soit  $n \geq 419$ .

Ce sera au bout de 419 jours.

147 1.  $y = Ce^{-x}$ , où  $C$  est un réel.

2.  $g'(x) + g(x) = 2x - 2 + x^2 - 2x = x^2 - 2$ , donc  $g$  est solution de (E).

3.  $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

148 1. Soit  $u$  une fonction affine telle que  $u(x) = ax + b$ . Alors,  $u'(x) + 2u(x) = 4x - 3$  équivaut à  $a + 2(ax + b) = 4x - 3$ , ce qui équivaut à  $2ax + (a + 2b) = 4x - 3$  pour tout réel  $x$  soit  $2a = 4$  et  $a + 2b = -3$ . D'où :  $a = 2$  et  $b = -\frac{5}{2}$ . La fonction  $x \mapsto 2x - \frac{5}{2}$  est solution.

2.  $y = Ce^{-2x} + 2x - \frac{5}{2}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

3.  $y(1) = 0$ , soit  $Ce^{-2} - \frac{1}{2} = 0$ , et  $C = \frac{1}{2}e^2$ .

Ainsi :  $y = \frac{1}{2}e^{2-2x} + 2x - \frac{5}{2}$ .

149 1.  $g'(x) = ae^{2x} + 2axe^{2x} = (2ax + a)e^{2x}$ .

Donc  $g$  est solution de (E) si et seulement si  $(2ax + a)e^{2x} - 2axe^{2x} = e^{2x}$ , soit  $ae^{2x} = e^{2x}$  pour tout  $x$ , soit  $a = 1$ .

2.  $y = Ce^{-2x} + xe^{2x}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

### Revoir des points essentiels

150 1.  $F(x) = -3x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 10x$ .

2.  $G(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 - 6x$ .

3.  $H(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8\ln(x)$ .

4.  $J(x) = \frac{6}{x} + 2\sqrt{x}$ .

5.  $P(x) = \ln(2x - 3)$ .

6.  $Q(x) = \ln(x^2 + 5)$ .

151 1.  $y = Ce^{-4x} + \frac{5}{4}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

2.  $y = Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

3.  $y = Ce^{-7x} + 2$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

4.  $y = Ce^{-2x} + 3$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

5.  $y = Ce^{9x}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

6.  $y = Ce^{\frac{1}{4}x} - 4$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

7.  $y = Ce^{-11x}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

8.  $y = Ce^{\frac{1}{2}x} + 8$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .

### Pour se préparer à l'écrit

#### Sujet C

1. La pente de la tangente est  $y'$ .

La condition s'écrit :  $y' = 2(x + y)$ , soit  $y' = 2y + 2x$ .

2.  $u(x) = -x - \frac{1}{2}$ .

3.  $y = Ce^{2x} - x - \frac{1}{2}$ .

4. a.  $g(0) = \frac{1}{2}$ , soit  $C - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , soit  $C = 1$ .

D'où  $g(x) = e^{2x} - x - \frac{1}{2}$ .

b.  $g'(x) = 2e^{2x} - 1$ .

$g'(x) \geq 0$  équivaut à  $e^{2x} \geq \frac{1}{2}$ , soit  $x \geq \frac{-\ln(2)}{2}$ .

Donc  $g$  est décroissante sur  $]-\infty; \frac{-\ln(2)}{2}]$  et

croissante sur  $[\frac{-\ln(2)}{2}; +\infty[$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x}) = 0$ .

$g(x) = 2x \left( \frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{2x}}{2x} \right) = +\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

c.



#### Sujet D

1.  $y = Ce^{-0,124t}$ , où  $C$  est un réel.

2.  $f(0) = 15,3$  équivaut à  $C = 15,3$ .

Donc,  $f(t) = 15,3e^{-0,124t}$ .

3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-0,124t}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$ .

D'où  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$  : la concentration en carbone 14 présent dans un organisme devient négligeable au fil du temps.

4.  $f(t) = 7,27$  équivaut à  $e^{-0,124t} = \frac{7,27}{15,3}$ ,

soit  $-0,124t = \ln\left(\frac{7,27}{15,3}\right)$  soit  $t = \frac{-1}{0,124} \ln\left(\frac{7,27}{15,3}\right)$ .

Ce nombre vaut  $6,0008$  à  $10^{-4}$  près, soit environ 6 milliers d'années, ce qui donne bien environ 6 000 ans.

5. On cherche  $t$  tel que  $N(t) < 0,003 \times 15,3$ , soit  $e^{-0,124t} < 0,003$ , ce qui équivaut à

$-0,124t < \ln(0,003)$ , soit  $t > \frac{-\ln(0,003)}{0,124}$  : ce

nombre vaut environ 46,8. C'est donc à partir de 46 800 ans qu'un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

### 10 CALCUL INTÉGRAL

#### Se tester pour un bon départ

1 a.  $12 \text{ cm}^2$ . b.  $7,5 \text{ cm}^2$ .

2 a. Soit  $a$  un réel de  $I$  et  $a + h$  un réel de  $I$  avec  $h \neq 0$ .

On note  $r(h)$  le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et

$a + h$ .  $r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

$f$  est dérivable en  $a$  si  $r(h)$  admet une limite finie lorsque  $h$  tend vers 0. Cette limite est alors notée  $f'(a)$ .

b.  $r(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 6 + h$ .

Lorsque  $h$  tend vers 0 alors  $r(h)$  tend vers 6. Donc  $f$  est dérivable en 3 et  $f'(3) = 6$ .

5 a. Pour  $x$  réel,  $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}e$ .

b. Pour  $x$  réel,  $F(x) = \frac{1}{4}\sin^4(x)$ .

c. Pour  $x$  réel,  $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{4}{3}$ .

#### Pour maîtriser les bases

24 1. 6.

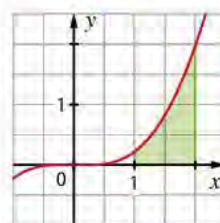
2. 3.

3. 16.

34 1.  $I = 10,5$ .

2.  $J = 0$ .

43 1.



2.  $f$  est continue et positive sur  $[1; 2]$  donc l'aire  $\mathcal{A}(S)$ , en u.a., est égale à  $\int_1^2 f(x) dx$ .

Or,  $\int_1^2 f(x) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = \frac{15}{4}$ .

Donc  $\mathcal{A}(S) = \frac{15}{4}$  u.a.

#### Pistes

75 Étudier le signe de  $x^2 - x - 6$  puis écrire  $f(x)$  sans les barres de valeur absolue et utiliser la relation de Chasles.

86  $\ln(x+1) = 1 \times \ln(x+1)$  et une primitive de la fonction  $x \mapsto 1$  est la fonction  $x \mapsto x + 1$ .

96 Calculer  $I_n$  à l'aide d'une intégration par parties.

#### Pour travailler en autonomie

122 1. a.

2. b.

3. c.

4. b.

123 1. ligne 2 :  $h = 0,2$

ligne 3 : for i in range (1,6)

ligne 4 :  $x = x + h$

ligne 5 :  $S = S + h \cdot \exp(x)$

ligne 6 : return (S)

2. On remplace la ligne 1 par : def somme (n)

la ligne 2 par :  $h = \frac{1}{n}$

et la ligne 3 par : for i in range (1,n+1).

124 1. Vrai. Une primitive de  $x \mapsto e^{\frac{1}{2}x+1}$  est la fonction  $x \mapsto 2e^{\frac{1}{2}x+1}$  puis on calcule l'intégrale.

2. Faux, c'est  $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ .

3. Vrai. Le calcul donne  $\frac{3}{2}\ln(5)$  et  $\frac{3}{2}\ln(5) = 3 \times \frac{1}{2}\ln(5) = 3\ln(\sqrt{5})$ .

4. Faux.  $F'(x) = \frac{1}{x} > 0$  donc  $F$  est croissante sur  $[1; +\infty[$ .

125 1.  $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ .

2.  $\frac{10e^3 + 5}{9}$ .

126 1. Pour  $t \geq 1$ ,  $t \ln(t) \geq 0$  donc pour  $x$  de  $I$ ,  $F(x) \geq 0$ .

2. a.  $F'(x) = x \ln(x)$ .

b.  $x \geq 1$  donc  $F'(x) \geq 0$  et  $F$  est croissante sur  $I$ .

3. a.  $u(t) = \ln(t)$  donc  $u'(t) = \frac{1}{t}$ .  $v'(t) = t$  donc  $v(t) = \frac{t^2}{2}$ .

$F(x) = \left[ \frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{t}{2} dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ .

b.  $F(e) = \frac{e^2 + 1}{4}$ . L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction



$t \mapsto t \ln(t)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=e$  est égale à  $\frac{e^2+1}{4}$  u.a.

**127** 1. Pour  $x$  de  $[1; 4]$ ,  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \geq 0$ .  
Donc  $f$  est croissante sur  $[1; 4]$ .

2. On en déduit que :  $f(1) \leq f(x) \leq f(4)$  soit  $e \leq f(x) \leq \frac{e^4}{4}$ .

3.  $3e \leq \int_1^4 f(x) dx \leq \frac{3e^4}{4}$ .

**128** 1. a.  $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} \sin(x) - x^n \sin(x) dx$   
 $= \int_0^1 x^n \sin(x)(x-1) dx$ .

b. Pour  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $x^n \sin(x)(x-1) \leq 0$  donc pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $I_{n+1} - I_n \leq 0$  et  $(I_n)$  est décroissante.

2. a. Pour  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $0 \leq \sin(x) \leq 1$  et  $x^n \geq 0$  donc  $0 \leq x^n \sin(x) \leq x^n$ .

b.  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$  donc  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  donc d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

**129** 1.  $I_n$  représente l'aire, en u.a., du domaine délimité par la courbe de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x^n)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .

2. Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $x$  dans  $[0; 1]$ ,  $x^{n+1} \leq x^n$ ,  $1+x^{n+1} \leq 1+x^n$ ,  $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$  et donc  $I_{n+1} \leq I_n$ .  
La suite  $(I_n)$  est donc décroissante.

3. a. Pour  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et  $x$  de  $[0; 1]$ ,

$0 \leq x^n \leq 1$ ,  $1 \leq 1+x^n \leq 2$  et

$0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln(2)$ . Donc  $0 \leq I_n \leq \ln(2)$ .

b. La suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée donc elle converge.

**130** 1. a. 2. c.

**131** 1.  $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ . On a  $f'(0) = 1$  et  $f(0) = 1$  donc  $T: y = x+1$ .

2.  $f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$ .

3.  $f$  est concave sur  $]-\infty; 2]$  et convexe sur  $[2; +\infty[$ .  $\mathcal{C}$  est en dessous de  $T$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. a.  $f(x) - (x+1) = xe^{-x} + 1 - x - 1 = x(e^{-x} - 1)$ .

b.  $\int_0^1 x(e^{-x} - 1) dx = 0,5 - 2e^{-1} \approx -0,236$ .

c. L'aire, en u.a., de la surface délimitée par  $\mathcal{C}$ ,  $T$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$  est environ égale à 0,236.

**132** 1. a.  $f$  est dérivable sur  $[0; 12]$  et  $f'(t) = -1,5e^{-0,15t} < 0$ . Donc  $f$  est décroissante sur  $[0; 12]$ .

b. La fonction  $F$  définie sur  $[0; 12]$  par  $F(t) = -\frac{200}{3} \times e^{-0,15t}$  est une primitive de  $f$  sur  $[0; 12]$ . Donc  $I = F(12) - F(0) = \frac{200}{3}(1 - e^{-1,8})$ .

2. On calcule la valeur moyenne  $\mu$  de la fonction  $f$  sur  $[0; 12]$  :  $\mu = \frac{1}{12} I = \frac{50}{9}(1 - e^{-1,8}) \approx 4,6$ .

En moyenne, 4,6 g de substance médicamenteuse est présente chaque heure dans le sang.

## Revoir les points essentiels

**133** a.  $J = 258$ . b.  $K = -151,875$ .

c.  $L = e - 1$ . d.  $M = \frac{5}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ .

**134** a.  $J = 4,25$ . b.  $K = 0,1$ .

c.  $L = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ . d.  $M = \ln(e+1)$ .

**135** a.  $J = 8$ . b.  $K = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$ .

c.  $L = \frac{1}{4}$ . d.  $M = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$ .

**136** Sur  $[1; 2]$ ,  $x^2 - 1 \geq 0$ .

On note  $\mathcal{A}$  l'aire, en u.a., de la surface délimitée par  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=2$ .

$\int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$ . Donc  $\mathcal{A} = \frac{4}{3}$  u.a.

**137** Sur  $[-2; 0]$ ,  $x \leq 0$  et  $x^2 - 4 \leq 0$ .

Donc  $g(x) \geq 0$ .

On note  $\mathcal{A}$  l'aire, en u.a., de la surface délimitée par  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=-2$  et  $x=0$ .

$\int_{-2}^0 g(x) dx = \left[\frac{1}{4}(x^2-4)^2\right]_{-2}^0 = 4$ .

Donc  $\mathcal{A} = 4$  u.a.

## Pour se préparer à l'écrit

### Sujet B

1.  $I_n$  représente l'aire sous la courbe de la fonction  $f_n$  sur l'intervalle  $[1; 2]$ .  $\mathcal{C}_{n+1}$  est en dessous de  $\mathcal{C}_n$  sur cet intervalle. Donc on conjecture que  $(I_n)$  est décroissante.

2. a.  $I_2 = e - e^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}$ .

b.  $I_{n+1} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$   
 $= \left[-\frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1-n}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}} dx$

$= e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n+1}} + (1-n)I_n$ .

c.  $I_3 = \frac{1}{2}\sqrt{e}$ .

3. Pour  $n \geq 2$ ,  $I_{n+1} - I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$ .

Pour  $x \in [1; 2]$ ,  $\frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} > 0$  et  $\frac{1}{x} - 1 < 0$ .

Donc  $I_{n+1} - I_n < 0$  et  $(I_n)$  est décroissante.

4. a. Pour  $x \in [1; 2]$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$  et  $e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e$ .

De plus  $\frac{1}{x^{n+1}} > 0$ . Donc  $0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$ .

b. Pour  $n \geq 2$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{1-n} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$ .

c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

### Sujet D

1.  $25 < \int_2^{10} f(x) dx < 33$ .

2. a.  $F$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$F'(x) = \ln(x) + \frac{x+1}{x} - 1$   
 $= \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} - 1 = f(x)$ .

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

b.  $\mu = \frac{11}{8} \ln(10) - \frac{3}{8} \ln(2) - 1 \approx 1,91$ .

3. a.  $T: y = \frac{1}{4}x + \ln(2)$ .

b. Pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$  et  $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$ .  
 $f''(x) \leq 0$  lorsque  $x \geq 2$ .

Donc  $f$  est concave sur  $[2; +\infty[$ .

c.  $f$  est convexe sur  $]0; 2]$  et concave sur  $[2; +\infty[$ .  
Le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion.  
Donc  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $T$  sur  $]0; 2]$  et  $\mathcal{C}$  est en dessous de  $T$  sur  $[2; +\infty[$ .

4. On note  $\mathcal{A}$  l'aire, en u.a., de  $S$ .

$\int_2^8 \left(\frac{1}{4}x + \ln 2 - f(x)\right) dx = 13,5 - 18 \ln(2)$ .

Donc  $\mathcal{A} = 13,5 - 18 \ln(2)$  u.a. soit environ 1,02 u.a.

## LOI BINOMIALE

### Se tester pour un bon départ

1.  $1. \binom{30}{5} = 142\,506$ . 2.  $\binom{24}{5} = 42\,504$ .

3.  $\frac{100\,002}{142\,506} \approx 0,7$ .

3. 1. c. 2. c et d.

4. 1. c. 2. c et d.

## Pour maîtriser les bases

26 1. Vrai. 2. Faux. 28 c.

39 1. On a une répétition d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .  $Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $n=5$  et  $p=\frac{1}{2}$ .

2.  $P(Y=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = 0,3125$

## Pistes

56 Nommer  $p$  le paramètre et exprimer  $V$  en fonction de  $p$ .

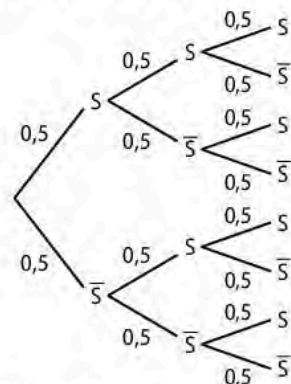
87 Exprimer  $P(T \cup I)$  en fonction de  $P(T)$  et  $P(I)$ , sachant que  $T$  et  $I$  sont indépendants, de même que  $\bar{T}$  et  $\bar{I}$ .

## Pour travailler en autonomie

101 1. Oui car il y a équiprobabilité des sexes à la naissance.

2. Soit  $S$  l'événement « l'enfant est de sexe féminin ». L'univers de l'expérience aléatoire est  $\{S; \bar{S}\} \times \{S; \bar{S}\} \times \{S; \bar{S}\}$ .

3.



4.  $P(SSS) = P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = \frac{1}{8}$ ,

$P(S\bar{S}\bar{S}) = P(\bar{S}S\bar{S}) = P(\bar{S}\bar{S}S) = \frac{3}{8}$

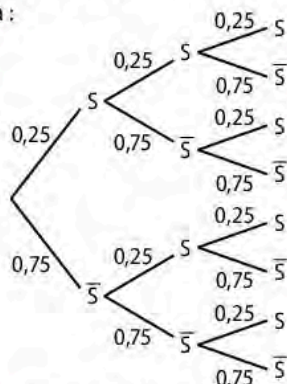


et  $P(\overline{S}\overline{S}\overline{S}) = P(\overline{S}\overline{S}S) = P(\overline{S}S\overline{S}) = \frac{3}{8}$ .

102 1.  $\frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0,25$ .

2. a. Soit  $S$  le succès : « obtenir un trèfle ». L'univers de l'expérience aléatoire est  $\{S; \overline{S}\} \times \{S; \overline{S}\} \times \{S; \overline{S}\}$ .

b. On a :



c.  $P(X=0) = 0,75^3 \approx 0,42$  à  $10^{-2}$  près.

$P(X=1) = 3 \times 0,25 \times 0,75^2 = 0,42$  à  $10^{-2}$  près.

$P(X \geq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 0,16$  à  $10^{-2}$  près.

103 a. Faux. b. Vrai.

104 1. a.  $P(X=21) = \binom{30}{21} \times 0,85^{21} \times 0,15^9$ .

$P(X=22) = \binom{30}{22} \times 0,85^{22} \times 0,15^8$ .

b.  $P(X=21) = 0,018$ ,  $P(X=22) = 0,042$ .

2.  $P(X \leq 19) = 0,003$  et

$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 0,990$ .

105 Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à l'examen de vingt enfants, associe le nombre d'enfants présentant une forte réaction au vaccin. Alors :  $P(X=4) = 0,18$  et  $P(3 \leq X \leq 7) = 0,59$ .

106 1. c. 2. d. 3. c.

107 Il faudra qu'il interroge au moins 17 élèves.

108 1. c. 2. b.

109 1.  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n=100$  et  $p=0,87$ .

2.  $a=83$ . 3.  $b=91$ .

110 1.  $P(A) = 0,6$ ,  $P_A(B) = 0,05$  et  $P_A(\overline{B}) = 0,04$ .

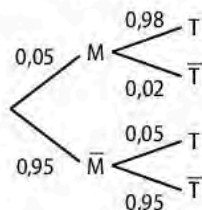
2.  $P(B) = 0,046$ . 3. Non car  $P_A(B) \neq P(B)$ .

4.  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{23}$ .

Il s'agit de la probabilité que la pièce provienne de la première machine sachant qu'elle présente un défaut.

111 1.  $P_M(T) = 0,98$  et  $P_M(\overline{T}) = 0,95$ .

2. a.



b.  $P(T) = 0,0965$ . c. Non car  $P_M(T) \neq P(T)$ .

### Revoir les points essentiels

112 On répète sept fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{6}$ .  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n=7$  et  $p=\frac{1}{6}$ .

113 On répète treize fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n=13$  et  $p=\frac{1}{2}$ .

114  $P(X=9) \approx 0,252$  à  $10^{-3}$  près.

$P(X \leq 8) \approx 0,654$  à  $10^{-3}$  près.

115  $P(X=1) \approx 0,362$  à  $10^{-3}$  près.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,191$  à  $10^{-3}$  près.

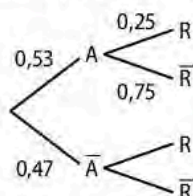
### Pour se préparer à l'écrit

#### Sujet B

##### Partie A

1.  $P(A) = 0,53$ ,  $P(R) = 0,32$  et  $P_A(R) = 0,25$ .

2.



3.  $P(R \cap A) = P_A(R) \times P(A) = 0,1325$ .

4.  $P_R(A) = \frac{0,1325}{0,32} \approx 0,414$ .

5.  $P(\overline{A} \cap R) = P(R) - P(A \cap R) = 0,1875$  est la probabilité que les clients aient moins de cinquante ans et soient intéressés par des placements à risque.

$P_A(R) = \frac{0,1875}{0,47} \approx 0,4$  est la probabilité que les clients soient intéressés par des placements à risque sachant qu'ils ont moins de cinquante ans.

##### Partie B

1. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, parmi une série de 45 clients reçus par Camille en un mois, associe le nombre de clients convaincus.  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n=45$  et  $p=0,23$ .  $P(X=10) \approx 0,141$ .

2.  $P(10 \leq X \leq 14) = 0,532$ .

3.  $P(X \geq 15) \approx 0,075$ .

#### Sujet C

##### Partie A

1.  $P(V \cap A) = P_A(V) \times P(A) = 0,588$ .

2.  $P(B \cap V) = P(V) - P(A \cap V) = 0,372$ .

$P_B(V) = \frac{0,372}{0,4} = 0,93$ .

3. Oui car  $P_B(V) = 0,7$ .

##### Partie B

1. a. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à un sachet de 40 billes, associe le nombre de billes de couleur noire.  $X$  suit la loi binomiale de paramètres

$n=40$  et  $p=\frac{1}{5}$ . On a  $P(X=10) \approx 0,107$ .

b.  $P(X \leq 12) \approx 0,957$  donc on ne peut pas remettre en cause le réglage de la machine.

2. Soit  $n$  le nombre de billes total d'un sachet.  $X$  suit alors la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p=0,2$ . On veut  $P(X \geq 1) \leq 0,01$  ce qui est vrai à partir de  $n=17$ .

## 12 VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI DES GRANDS NOMBRES

### Se tester

2 1. Ensemble des valeurs :  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

$P(X=k) = \frac{1}{6}$  pour  $k$  entier,  $1 \leq k \leq 6$ .

2.  $P(A) = P(X=3) + P(X=4)$

$+ P(X=5) = \frac{1}{2}$ .

3.  $|X-3| \leq 1$  équivaut à  $2 \leq X \leq 4$ .

$P(B) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{1}{2}$ .

5 1. c. 2. d.

7 a. Faux. b. Vrai.

### Maîtriser les bases

19 1.  $Y$  prend les valeurs 3, 6 et 9.

2.  $P(Y=3) = P(X=1) = 0,2$ .

$P(Y=6) = P(X=2) = 0,3$ .

3.  $P(Y=9) = P(X=3)$

$= 1 - (P(X=2) + P(X=1)) = 0,5$ .

25 1.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, donc  $V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 3^2 + 4^2 = 25$ .

$\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)} = 5$ .

2.  $V(2X-Y) = V(2X) + V(-Y) = 2^2 V(X) + (-1)^2 V(Y) = 4 V(X) + V(Y) = 52$ .

3.  $V(-3X+1) = V(-3X) = (-3)^2 V(X) = 81$ .

38 1. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec  $\delta = 0,15$  :

$P(|X-1,5| \geq 0,15) \leq \frac{\sigma(X)^2}{0,15^2} \leq 0,22$ .

2. Avec l'événement contraire :

$P(1,35 < X < 1,65) = 1 - P(|X-1,5| \geq 0,15) = 1 - 0,22$ , donc  $P(1,35 < X < 1,65) > 0,78$ .

### Pistes

47 Décomposer la probabilité demandée en une somme de deux probabilités à déterminer.

57 Écrire  $X$  comme la somme de deux variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale différente.

64 Écrire  $X$  comme la somme de deux variables aléatoires suivant chacune une loi binomiale.

77 En notant  $Y$  la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain d'Hugo, exprimer  $X$  comme somme d'un échantillon de taille  $n$  de  $Y$ .



## Pour travailler en autonomie

**87** 1.  $P(Z=1) = P(X=0 \text{ et } Y=1)$   
 $= P(X=0) \times P(Y=1) = 0,28.$

$P(Z=3) = P(X=1 \text{ et } Y=2)$   
 $= P(X=1) \times P(Y=2) = 0,18.$

2.  $P(Z=2) = 1 - (P(Z=1) + P(Z=3)) = 0,54.$

**88** 1.  $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2};$

$P(Y=0) = \frac{1}{6}; P(Y=1) = \frac{1}{2}; P(Y=2) = \frac{1}{3}.$

2.  $X$  et  $Y$  étant indépendantes,

$P(Z=1) = P(X=1 \text{ et } Y=0)$   
 $= P(X=1)P(Y=0) = \frac{1}{12}.$

$P(Z=4) = P(X=2 \text{ et } Y=2)$   
 $= P(X=2)P(Y=2) = \frac{1}{6}.$

3.  $P(Z=2)$  est égal à  $P(X=1 \text{ et } Y=1 \text{ ou } X=2 \text{ et } Y=0) = P(X=1) \times P(Y=1) + P(X=2) \times P(Y=0)$   
 $= \frac{1}{3}.$

4.  $P(Z=1) + P(Z=2) + P(Z=4) = \frac{7}{12}.$

$P(Z=3) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$

**89** 1.  $E(Z) = E(X) + E(Y) = 3 + 5 = 8.$

2.  $E(T) = -2E(X) + 4(Y) = -2 \times 3 + 4 \times 5 = 14.$

3.  $E(U) = aE(X) - E(Y) = 3a - 5.$

$E(U) = 0$  équivaut à  $3a - 5 = 0$  soit  $a = \frac{5}{3}.$

**90**  $D = H - F$ . Par linéarité de l'espérance :  
 $E(D) = E(H) - E(F) = 178 - 164 = 14.$

Comme  $H$  et  $F$  sont indépendantes,  
 $V(D) = V(H) + V(F) = 7^2 + 6^2 = 85.$

**91**  $E(X) = 10 \times 0,4 = 4.$

$V(X) = 10 \times 0,4 \times 0,6 = 2,4.$

$E(Y) = 0,6. V(Y) = 0,6 \times 0,4 = 0,24.$

Par linéarité de l'espérance :

$E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = 7,4.$

$X$  et  $Y$  sont indépendantes, donc

$V(2X - Y) = V(2X) + V(-Y) = 4V(X) + V(Y) = 9,84.$

$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{9,84}.$

**92** Le gain est donné par la variable aléatoire  $G$  de loi  $P(G=4) = 0,99$  et  $P(G=-60) = 0,01.$

$E(G) = 4 \times 0,99 - 60 \times 0,01 = 3,36.$

$Z = 10\,000\,G$ , d'où  $E(Z) = 10\,000\,E(G) = 33\,600.$

Le bénéfice moyen est de 33 600 € par jour.

**93** 1. Vrai. 2. Faux.

3. Faux. 4. Faux.

**94**  $Y$  est la variable aléatoire  $M_{100}$ , moyenne d'un échantillon de taille 100 de  $X$ .

$E(Y) = E(M_{100}) = E(X) = 1\,800.$

$V(Y) = V(M_{100}) = \frac{V(X)}{100}$  d'où

$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{V(X)}{100}} = 20.$

**95** On remplace  $\delta = 1$  dans

$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2};$

$P\left(|X - \frac{1}{2}| \geq 1\right) \leq \frac{1}{8}.$

**96** 1.  $X$  suit la loi binomiale de paramètres 4 000 et 0,25, donc  $E(X) = 4\,000 \times 0,25 = 1\,000$  et  $V(X) = 4\,000 \times 0,25 \times 0,75 = 750.$

On a  $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ , qui devient

$P(|X - 1\,000| \geq \delta) \leq \frac{750}{\delta^2}.$

2.  $\{920 < X < 1\,080\}$  est l'événement contraire de  $\{|X - 1\,000| \geq 80\}.$

Avec  $\delta = 80,$   
 $P(|X - 1\,000| \geq 80) \leq \frac{750}{6\,400} < 0,12.$

$P(920 < X < 1\,080) = 1 - P(|X - 1\,000| \geq 80),$   
donc  $P(920 < X < 1\,080) > 1 - 0,12,$   
soit  $P(920 < X < 1\,080) > 0,88.$

**97** 1. a.  $Z$  mesure le nombre de clients rentrés dans la pharmacie sur le créneau 18 h - 19 h.

b. Par linéarité de l'espérance,  $E(Z) = E(Z_1) + E(Z_2)$   
 $= 20 + 15 = 35.$

Comme  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indépendantes

$V(Z) = V(Z_1) + V(Z_2) = \sigma(Z_1)^2 + \sigma(Z_2)^2 = 4 + 1 = 5.$

2.  $\{30 < Z < 40\}$  est l'événement contraire de  $\{|Z - 35| \geq 5\}.$

$P(30 < Z < 40) = 1 - P(|Z - 35| \geq 5)$

Par Bienaymé-Tchebychev :

$P(|Z - 35| \geq 5) \leq \frac{V(Z)}{5^2} = \frac{1}{5},$

D'où  $P(30 < Z < 40) \geq \frac{4}{5}$

La probabilité est minorée par 0,80.

**98** 1.  $E(B) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,1$   
 $= 1,3.$

$V(B) = (0 - 1,3)^2 \times 0,2 + (1 - 1,3)^2 \times 0,4 + (2 - 1,3)^2$   
 $\times 0,3 + (3 - 1,3)^2 \times 0,1 = 0,81.$

2. a.  $P(|M_n - E(B)| \geq \delta) \leq \frac{V(B)}{n\delta^2}$

b. Avec  $\delta = 0,3 : P(|M_n - E(B)| \geq 0,3) \leq \frac{0,81}{n \times 0,3^2}.$

D'où  $P(|M_n - 1,3| \geq 0,3) \leq \frac{9}{n}$

et  $P(|M_n - 1,3| < 0,3) \geq 1 - \frac{9}{n}$

$P(|M_n - 1,3| < 0,3) = P(1 < M_n < 1,6)$

$P(M_n > 1) \geq P(1 < M_n < 1,6)$

d'où  $P(M_n > 1) \geq 1 - \frac{9}{n}.$

c.  $1 - \frac{9}{n} \geq 0,9$  équivaut à  $n \geq 90.$

Il faut au moins 90 matches.

## Revoir les points essentiels

**99** Par la linéarité de l'espérance,

$E(Z) = 2E(X) + E(Y) = 2 \times 20 + 30 = 70.$  Comme  $X$

et  $Y$  sont indépendantes,  $2X$  et  $Y$  le sont aussi,

d'où  $V(2X + Y) = V(2X) + V(Y).$

D'où  $V(Z) = 2^2 \times V(X) + V(Y) = 25.$

On en déduit :  $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = 5.$

**100**  $\{30 < X < 50\}$  est l'événement contraire de  $\{|X - 40| \geq 10\}.$  D'après l'inégalité de Bienaymé-

Tchebychev, on a  $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$

Avec  $\delta = 10,$

$P(|X - 40| \geq 10) \leq \frac{\sigma(X)^2}{10^2} = \frac{\sigma(X)^2}{100}$   
 $= 0,49.$

On en déduit :

$P(30 < X < 50) = 1 - P(|X - 40| \geq 10)$  soit  
 $P(30 < X < 50) \geq 0,51.$

## Se préparer à l'écrit

### Sujet B

1.  $Y = 2X + 10$ . Par linéarité de l'espérance :

$E(Y) = 2E(X) + 10 = 16.$

$V(2X + 10) = V(2X) = 2^2 V(X) = 4\sigma(X)^2 = 0,36.$

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0,36} = 0,6.$

2.  $P(|Y - E(Y)| \geq \delta) \leq \frac{V(Y)}{\delta^2}.$  Avec  $E(Y) = 16,$

$V(Y) = 0,36$  et  $\delta = 1,8 :$

$P(|Y - 16| \geq 1,8) \leq P(|Y - 16| \geq 1,8)$

$\leq \frac{0,36}{1,8^2} = \frac{1}{9}.$

3.  $|X - 3| < 0,9$  entraîne  $X - 3 < 0,9$  qui équivaut à  $Y < 17,8$  donc  $P(Y \leq 17,8) \geq P(|X - 3| \geq 0,9).$

En considérant l'événement contraire,

$P(Y > 17,8) = 1 - P(Y \leq 17,8)$

$\leq 1 - P(|X - 3| \leq 0,9) \leq 1 - 0,99 \leq 0,01.$

### Sujet F

1.  $X_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , d'où  $E(X_n) = np$  et  $V(X_n) = np(1 - p).$

2. a.  $p(1 - p)$  a deux racines, 0 et 1. Son maximum vaut  $\frac{1}{4}$ , atteint en  $p = \frac{1}{2}.$

b.  $E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = p$  et

$V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{V(X_n)}{n^2} = \frac{p(1 - p)}{n}.$  Pour tout  $\delta > 0,$

d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right| \geq \delta\right) \leq \frac{V(X_n/n)}{\delta^2}.$

On a donc  $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \frac{p(1 - p)}{n\delta^2},$

et d'après la question précédente

$\frac{p(1 - p)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$

3. Il suffit de déterminer  $n$  tel que  $\frac{X_n}{n}$  s'éloigne de  $p$  d'au moins 0,01 avec une probabilité d'au plus 0,05.

D'après 2.b., il suffit que  $\frac{1}{4n \times (0,01)^2} \leq 0,05,$

soit  $n > 50\,000.$



## A

|                                     |              |
|-------------------------------------|--------------|
| Affectation (algorithmique)         | 430          |
| Aire « sous une courbe »            | 330          |
| ALEA et ALEA.ENTRE.BORNES (tableur) | 453          |
| Arbre pondéré                       | Rabat C, 366 |
| Argument d'une fonction (Python)    | 431          |
| Asymptote                           | 164          |

## B

|                                 |          |
|---------------------------------|----------|
| Base de l'espace                | 56       |
| Base orthonormée de l'espace    | 90       |
| BERNOULLI Jacques               | 366, 406 |
| BERNOULLI Nicolas               | 364      |
| BIENAYME Irénée Jules           | 406      |
| Booléen                         | 430      |
| Boucle « Pour » – « For »       | 433      |
| Boucle « Si... Alors » – « If » | 432      |
| Boucle « Tant que » – « While » | 434      |
| BRIGGS Henry                    | 260      |
| BROUNCKER William               | 356      |

## C

|                                                   |               |
|---------------------------------------------------|---------------|
| Calculs d'aires                                   | Rabat C, 336  |
| Caractérisation vectorielle d'une droite          | 52            |
| Caractérisation vectorielle d'un plan             | 52            |
| CAUCHY Augustin-Louis                             | 164, 200, 204 |
| Chaîne de caractères                              | 430           |
| Coefficient binomial                              | 18            |
| Colinéaires (vecteurs)                            | 50, 445       |
| Combinaison                                       | 18            |
| Combinaison linéaire de vecteurs                  | 50            |
| Complémentaire (d'un ensemble)                    | 448           |
| Concavité, convexité                              | 206           |
| Condition nécessaire, condition suffisante        | 449           |
| Connecteurs ET, OU                                | 448           |
| Continuité, continue                              | 202           |
| Contraposée                                       | 450           |
| Contre-exemple                                    | 451           |
| Converger, convergente                            | 128           |
| Coordonnées d'un vecteur                          | 445           |
| Coplanaires – non coplanaires                     | 52            |
| Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires | 204           |
| Côte d'un point                                   | 56            |
| Couple                                            | 448           |
| Croissances comparée                              | 172, 240      |

## D

|                        |         |
|------------------------|---------|
| Dérivation – Dérivée   | Rabat B |
| Dérivée de la composée | 174     |
| Dérivée seconde        | 174     |
| DESCARTES René         | 14      |
| Dichotomie             | 204     |
| Diverger, divergente   | 128     |

## E

|                                                    |         |
|----------------------------------------------------|---------|
| Échantillon de taille $n$ d'une loi de probabilité | 404     |
| Épreuve de Bernoulli                               | 366     |
| Équation cartésienne d'un plan                     | 96      |
| Equation $\cos(x) = a$                             | 272     |
| Équations de droites                               | 445     |
| Équations différentielles                          | 302     |
| Équation du second degré                           | Rabat B |
| Équivalence (entre deux énoncés)                   | 450     |
| Ensemble                                           | 448     |
| Espérance                                          | Rabat C |
| Événements indépendants                            | Rabat C |

## F

|                                   |         |
|-----------------------------------|---------|
| Factorielle (d'un entier naturel) | 16      |
| Fonction carré                    | 443     |
| Fonction composée                 | 170     |
| Fonction cube                     | 443     |
| Fonction exponentielle            | Rabat C |
| Fonction inverse                  | 443     |

|                                   |          |
|-----------------------------------|----------|
| Fonction logarithme népérien      | 236      |
| Fonction polynôme du second degré | 443      |
| Fonction racine carrée            | 443      |
| Fonctions sinus et cosinus        | 270, 446 |
| Fonction valeur absolue           | 443      |
| Fonctions (en Python)             | 431      |
| Forme indéterminée                | 130      |
| Formule de Pascal                 | 20       |
| Formule des probabilités totales  | Rabat C  |
| Formules de polarisation          | 90       |
| Fractions                         | 440      |

## G

|                    |     |
|--------------------|-----|
| GALTON Sir Francis | 365 |
|--------------------|-----|

## H

|                         |    |
|-------------------------|----|
| Hypothèse de récurrence | 12 |
|-------------------------|----|

## I

|                                             |          |
|---------------------------------------------|----------|
| Identités remarquables                      | 441      |
| Image d'une suite par une fonction continue | 202      |
| Implication                                 | 449      |
| Import de module Python                     | 430      |
| Inclusion                                   | 448      |
| Inégalité de Bienaymé-Tchebychev            | 406      |
| Inégalité de concentration                  | 406      |
| Inéquation $\cos(x) \leq a$                 | 272      |
| Intégrale d'une fonction                    | 330, 332 |
| Intégration par parties                     | 334      |
| Intersection (de deux ensembles)            | 448      |
| Intersection de droites et de plans         | 96       |

## L

|                                                    |          |
|----------------------------------------------------|----------|
| LAGRANGE Joseph-Louis                              | 226      |
| LEIBNIZ Gottfried Wilhelm                          | 330      |
| Limite d'une suite                                 | 128      |
| Limites d'une fonction – Limite à gauche, à droite | 164      |
| Limite d'une fonction composée                     | 170      |
| Limite d'une suite géométrique                     | 132      |
| Limite et comparaison                              | 132, 172 |
| Listes (en Python)                                 | 435      |
| Loi binomiale                                      | 368      |
| LOI.BINOMIALE (tableur)                            | 368      |
| Loi de Bernoulli                                   | 366      |
| Loi faible des grands nombres                      | 406      |

## M

|                        |          |
|------------------------|----------|
| MAX et MIN (tableur)   | 453      |
| Médiane                | 444      |
| Méthode d'Euler        | 321      |
| Méthode des milieux    | 355      |
| Méthode des rectangles | 330, 355 |
| Méthode des trapèzes   | 355      |
| Moyenne                | 444      |

## N

|                                 |          |
|---------------------------------|----------|
| NB.SI (tableur)                 | 453      |
| Négation (d'une proposition)    | 449      |
| NAPIER John                     | 235, 236 |
| Nombre de parties d'un ensemble | 14       |
| Nombre d'or                     | 155      |
| Nombre $e$                      | 154      |

## O

|                             |        |
|-----------------------------|--------|
| Orthogonalité dans l'espace | 88, 92 |
|-----------------------------|--------|

## P

|                                 |        |
|---------------------------------|--------|
| Parallélisme dans l'espace      | 54     |
| PASCAL Blaise                   | 20     |
| PEANO Giuseppe                  | 12     |
| Permutation                     | 16     |
| Plan médiateur d'un segment     | 94     |
| POINCARÉ Henri                  | 10, 12 |
| Point d'inflexion d'une courbe  | 206    |
| Position relative de deux plans | 54     |

|                                             |         |
|---------------------------------------------|---------|
| Position relative d'une droite et d'un plan | 54      |
| Pourcentages                                | 444     |
| Primitive d'une fonction                    | 298     |
| Principe additif, multiplicatif             | 14      |
| Probabilité conditionnelle                  | Rabat C |
| Produit cartésien de deux ensembles         | 448     |
| Produit scalaire dans le plan               | 446     |
| Produit scalaire dans l'espace              | 88      |
| Projeté orthogonal d'un point               | 94      |
| Propriété héréditaire                       | 12      |
| Puissances                                  | 440     |

## Q

|                 |     |
|-----------------|-----|
| Quantificateurs | 448 |
| Quartiles       | 444 |

## R

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| Racines carrées                             | 440 |
| Raisonnement par disjonction des cas        | 451 |
| Raisonnement par l'absurde                  | 451 |
| Raisonnement par récurrence                 | 12  |
| Réciproque (d'une implication)              | 450 |
| Référence d'une cellule – Référence absolue | 453 |
| Règles d'incidence (espace)                 | 52  |
| Repère de l'espace                          | 56  |
| Représentation paramétrique d'une droite    | 58  |
| Réunion (de deux ensembles)                 | 448 |

## S

|                                |         |
|--------------------------------|---------|
| Schéma de Bernoulli            | 368     |
| Sens de variation d'une suite  | Rabat B |
| SI (tableur)                   | 453     |
| Signe d'une expression         | 442     |
| SOMME (tableur)                | 453     |
| Somme de variables aléatoires  | 402     |
| Suite arithmétique             | Rabat B |
| Suite géométrique              | Rabat B |
| Suite majorée, minorée, bornée | 134     |
| Suite récurrente               | 202     |
| Système linéaire               | 58      |

## T

|                                     |          |
|-------------------------------------|----------|
| Taux d'évolution                    | 444      |
| TCHEBYCHEV Pafnouti                 | 401, 406 |
| Théorème des gendarmes              | 132      |
| Théorème des valeurs intermédiaires | 204      |
| Triangle de Pascal                  | 20       |
| Trigonométrie                       | 446      |

## U

|              |     |
|--------------|-----|
| Unité d'aire | 330 |
|--------------|-----|

## V

|                                             |              |
|---------------------------------------------|--------------|
| Valeur moyenne d'une fonction               | 336          |
| Variable aléatoire                          | Rabat C      |
| Variable aléatoire de Bernoulli             | 366          |
| Variable aléatoire somme d'un échantillon   | 404          |
| Variable aléatoire moyenne d'un échantillon | 404          |
| Variables aléatoires indépendantes          | 402          |
| Variance                                    | Rabat C, 444 |
| Vecteurs coplanaires                        | 52           |
| Vecteurs du plan                            | 445          |
| Vecteurs de l'espace                        | 50           |
| Vecteurs linéairement indépendants          | 50           |
| Vecteur normal à un plan                    | 94           |
| Volumes de solides usuels                   | 447          |

## W

|                  |     |
|------------------|-----|
| WEIERSTRASS Karl | 202 |
|------------------|-----|



## Crédits photographiques

Couverture © Vladitto/Shutterstock

8 et p. 31, © Hadrian/Shutterstock ; 10 bas © Sergey Novikov/Shutterstock ; 11 ht © Michael Chow-USA TODAY Sports/Reuters ; 11 bas © MooNam StockPhoto/Shutterstock ; 26 © Photo12/Alamy/Werner Otto ; 27 © Oli Scarff/Afp ; 28 © praetorianphoto/Getty Images ; 29 ht © georgejmclittle/Adobe Stock ; 29 bas © Robert Kneschke/Shutterstock ; 29 m © Iakov Filimonov/Shutterstock ; 30 © sebra / Adobe Stock ; 31 bas © Sergey / Adobe Stock ; 32 © pioneer111 / Adobe Stock ; 33 ht © Neiron Photo / Adobe Stock ; 33 bas © guy / Adobe Stock ; 37 © stokkete / Adobe Stock ; 38 © andrewtit / Adobe Stock ; 41 © Studio Romantic/Adobe Stock ; 46 et p. 49, © iStock Editorial / Getty Images Plus ; 49 bas © Gilles Ehrmann / Adobe Stock ; 77 © Frank McClintock/Shutterstock ; 80 © Stuart Forster/REX/Sipa ; 84 et p. 87 © Bjoern Wylezich/Shutterstock ; 107 © Shane Myers Photography/Shutterstock ; 120 © Shine Nucha/Shutterstock ; 124 et p. 145 © Jean Marie Liot/DPPI/Afp ; 142 © Indigo/Adobe Stock ; 146 g © Anna/Adobe Stock ; 146 d © Anna ART/Adobe Stock ; 147 © wildestanimal/Adobe Stock ; 155 ht © lucky-photo/Adobe Stock ; 156 © ingo Bartussek/Adobe Stock ; 162 et p. 191 © Rosley Majid/EyeEm/Getty Images ; 179 © Science, Industry & Business Library/New York public library/spl/Cosmos ; 183 © Agor2012/Shutterstock ; 185 g © Michal Kowalski/Shutterstock ; 185 d © creativenature.nl/Adobe Stock ; 190 © Toru Kimura/Shutterstock ; 193 © A-Girard/Shutterstock ; 194 © Gjp/Clermont-Ferrand/cnri/spl/Cosmos ; 198 et p. 217 © Danièle Schneider/Photononstop ; 200 © Evita / Adobe Stock ; 215 g © Thomas Zelonka/Adobe Stock ; 217 g © xavdlp/Adobe Stock ; 227 © gstockstudio/Adobe Stock ; 232 et p. 248 © wowinside/Adobe Stock ; 244 © Oxford Media Library/Adobe Stock ; 246 © neiezhmakov/Adobe Stock ; 247 © shaiith / Adobe Stock ; 249 ht © tmass/Adobe Stock ; 249 bas BIS / Ph. Jupp Franz © Archives Bordas ; 250 © Richie Chan/Adobe Stock ; 251 © victimewalker/Shutterstock ; 256 ht © heavypong/Adobe Stock ; 256 bas © BIS / Ph. J. Boyer © Archives Larbor ; 259 g © SSPL/Leemage/Bridgeman ; 259 d © George Bernard/spl/Cosmos ; 261 ht DR ; 266 © Afanasiev Andrii/Shutterstock ; 268 © Allen.G/Shutterstock ; 278 © Giambra / Adobe Stock ; 288 © Stefania Loriga/Adobe Stock ; 292 et p. 310 ht © Mauricio Gralki/Shutterstock ; 295 ht © 3dsculptor/Adobe Stock ; 295 bas © A Stockphoto/Adobe Stock ; 305 © sciencephoto/Shutterstock ; 308 © Paulista/Adobe Stock ; 309 ht © CrackerClips/Adobe Stock ; 309 bas d © Kalyakan/Adobe Stock ; 309 bas g © RFBSP/Adobe Stock ; 310 bas g © loraks/Adobe Stock ; 310 bas d © kovop58/Adobe Stock ; 315 © unikyluckk/Adobe Stock ; 316 © watman/Adobe Stock ; 321 © katty2016/Adobe Stock ; 326 et p. 343 © J-P Dordain/Onlyfrance.fr ; 329 ht © Animaflora PicsStock/Adobe Stock ; 329 bas © Jacob Lund/Adobe Stock ; 346 © whyframeshot/Adobe Stock ; 347 bas © B Brown/Shutterstock ; 347 ht © Anna/Adobe Stock ; 357 © HJBC/Adobe Stock ; 362 et p. 382 © Eric Gaillard/Reuters ; 364 bas © Photo12/Alamy/Pictorial Press

Ltd ; 364 ht © Altitude Drone/Shutterstock ; 375 © Alexander Zschach/Shutterstock ; 376 © Photo12/Alamy/UPI ; 377 © banu sevim/Shutterstock ; 378 © A. and I. Kruk/Shutterstock ; 379 m g © Praisaeng/Shutterstock ; 379 ht d © alexvey/Shutterstock ; 379 bas g © N-sky/Shutterstock ; 380 g © info@nextmars.com/Adobe Stock ; 380 d © Romolo Tavani / Adobe Stock ; 382 ht g © makedonski2015 / Adobe Stock ; 382 m d © Irina84/Adobe Stock ; 383 ht © VIAR PRO studio/Adobe Stock ; 383 bas © manjik/Adobe Stock ; 388 © pressmaster/Adobe Stock ; 389 © Mr. JK/Shutterstock ; 390 © Kirill/Adobe Stock ; 392 © Media\_works/Shutterstock ; 393 © Viacheslav Iakobchuk / Adobe Stock ; 398 et p. 416 © master1305/Adobe Stock ; 400 ht © Andrey2 / Adobe Stock ; 400 bas © RikoBest/Shutterstock ; 411 © ji\_images/Adobe Stock ; 412 © ah\_fotobox/Adobe Stock ; 413 © ivanko80 / Adobe Stock ; 417 ht © Brian Jackson/Adobe Stock ; 417 bas d © mnirat/Adobe Stock ; 421 © full image/Adobe Stock ; 425 © Jeffrey Greenberg/Universal Images Group/Getty Images ; 439 © Rawpixel.com/Adobe Stock ; 449 © Remi Gardet/Adobe Stock ; Frise 16 : Rabat D et p. 366, 406 © BIS / Ph. D.R. Coll. Archives Larbor ; Frise 17 : Rabat D et p. 154 © BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; Frise 18 : Rabat D © BIS / Ph. Hubert Josse © Archives Larbor ; Frise 15 : Rabat D et p. 76, p. 226 © BIS / Ph. Jeanbor © Archives Larbor ; Frise 20 : Rabat D © BIS / Ph. J. Austin © Archives Larbor ; Frise 21 : Rabat D et p. 387, 417 © akg-images / SPL ; Frise 22 : Rabat D et p. 354 ht © BIS / Ph. J.L. Charmet © Archives Larbor ; Frise 23 : Rabat D et p. 225 © MP/Leemage/Bridgeman ; Frise 24 : Rabat D et p. 164, 204 © BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; Frise 01 : Rabat D et p. 354 bas © BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; Frise 02 : Rabat D et p. 155 © Rabatti - Domingie/akg-images ; Frise 03 : Rabat D © akg-images / SPL ; Frise 04 : Rabat D et p. 225 © akg-images ; Frise 05 : Rabat D et p. 235 © BIS / Ph. DR Coll. Archives Larbor ; Frise 06 : Rabat D et p. 261, DR ; Frise 07 : Rabat D © Photo12/Alamy/Historic Images ; Frise 08 : Rabat D et p. 281 d. © akg-images / SPL ; Frise 09 : Rabat D et p. 14, © BIS / Ph. Guiley-Lagache © Archives Bordas ; Frise 11 : Rabat D et p. 20, © BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; Frise 12 : Rabat D et p. 281 g © Bridgeman Art Library ; Frise 10 : Rabat D et p. 352 © BIS / Ph. © Archives Nathan ; Frise 13 : Rabat D et p. 356 © DeAgostini/Leemage/Bridgeman ; Frise 14 : Rabat © BIS / Ph. © National Portrait Gallery - Archives Larbor ; Frise 15 : Rabat D et p. 78, 330 © BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; Frise 01 : Rabat E et p. 191, DR ; Frise 02 : Rabat E et p. 215 © BIS / Ph. Boyer Coll. Archives Larbor ; Frise 03 : Rabat E © Académie Royale de Belgique ; Frise 04 : Rabat E et p. 116 © Selva/Leemage/Bridgeman ; Frise 05 : Rabat E et p. 202 © BIS / Ph. DR Coll. Archives Larbor ; Frise 06 : Rabat E et p. 401 © BIS / Ph. DR Coll. Archives Larbor ; Frise 07 : Rabat E et p. 342 © MP/Leemage/Bridgeman ; Frise 08 : Rabat E et p. 10, 12, © BIS / Ph. Coll. Archives Larbor ; Frise 09 : Rabat E et p. 12, © Fototeca/Leemage/Bridgeman ; Frise 10 : Rabat E, DR ; Frise 11 : Rabat E, DR ; Frise 12 : Rabat E et p. 152 © Raphael GAILLARDE/Gamma-Rapho/ Getty Images

**Édition :** Pauline Bley

**Conception graphique :** Favre et Lhaïk

**Couverture :** Véronique Lefebvre

**Réalisation et schémas :** Soft Office

**Recherche iconographique :** Laetitia Guillemain

**Coordination artistique :** Pierre Taillemite

**Fabrication :** Jean-Philippe Dore

**Vidéos :** Yvan Monka

**Animations :** Sébastien Girard et Thomas Huguet

Les éditions Bordas tiennent à remercier les sociétés Cabrillog, Casio, Numworks et Texas Instrument pour leur aide et leur collaboration à l'élaboration de ce manuel.

Les droits de reproduction des illustrations sont réservés en notre comptabilité pour les auteurs ou ayants droit dont nous n'avons pas trouvé les coordonnées malgré nos recherches et dans les cas éventuels où les mentions n'auraient pas été spécifiées.



Bordas est un éditeur qui s'engage pour la préservation de l'environnement et utilise du papier issu de forêts gérées de manière responsable et d'autres sources contrôlées.

Ce livre a été imprimé en France en avril 2020 par BLG, imprimeur certifié **IMPRIM'VERT®**

N° de projet : 10259733

Dépôt légal : avril 2020



## LE NUMÉRIQUE POUR LE PROFESSEUR

### LE MANUEL NUMÉRIQUE ENSEIGNANT

OFFERT à l'enseignant adoptant\*



- ◆ Avec de nombreuses ressources numériques :
  - livre du professeur
  - banque d'exercices interactifs différenciés
  - interface de programmation en Python
  - programmes Python (ordinateur et calculatrices)
  - vidéos et animations
  - fichiers logiciels corrigés
  - corrigés détaillés d'exercices

◆ **Spécimen numérique intégral**  
consultable dès maintenant\*

◆ Certaines de ces ressources numériques  
sont également disponibles sur le **site enseignant**  
[indice.editions-bordas.fr](http://indice.editions-bordas.fr)

\* Voir le site Bordas : [www.editions-bordas.fr](http://www.editions-bordas.fr)

## LE NUMÉRIQUE POUR LES ÉLÈVES

**Le manuel numérique\* élève  
est OFFERT pendant 5 ans  
aux adoptants du manuel papier.**

**\*Version en ligne déployée dans votre ENT !  
À commander sur [www.cns-edu.com](http://www.cns-edu.com)**

### CE MANUEL EST AUGMENTÉ

Avec l'application gratuite  
**Bordas FlashPage,**



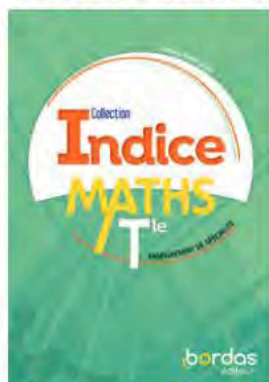
vos élèves ont un accès facile et rapide  
aux ressources numériques du manuel :

- vidéos
- corrigés détaillés d'exercices
- animations

L'usage de l'application Bordas FlashPage n'est pas possible ?

Les ressources élève sont accessibles depuis le **site élève**  
[lycee.editions-bordas.fr](http://lycee.editions-bordas.fr)

### POUR COMMANDER



Cabri,  
partenaire de Bordas



Toutes les mathématiques  
en une seule app.  
[cabricloud.com](http://cabricloud.com)



◆ 978 204 733764 6 ◆ 35,90 €

Le manuel élève est au format compact.

**Licences 100 % numériques**

◆ Licence 1 an : 978 204 739114 3 ◆ 8 € ◆ Licence 5 ans : 978 204 739116 7 ◆ 32 €

Disponible gratuitement sur le site enseignant

Manuels compatibles

★ **pearltrees**



SPECIMEN ENSEIGNANT

ISBN 978-2-04-733800-1



9 782047 338001

**bordas**  
éditeur

